This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR

1701 / 125+

Bull. 3

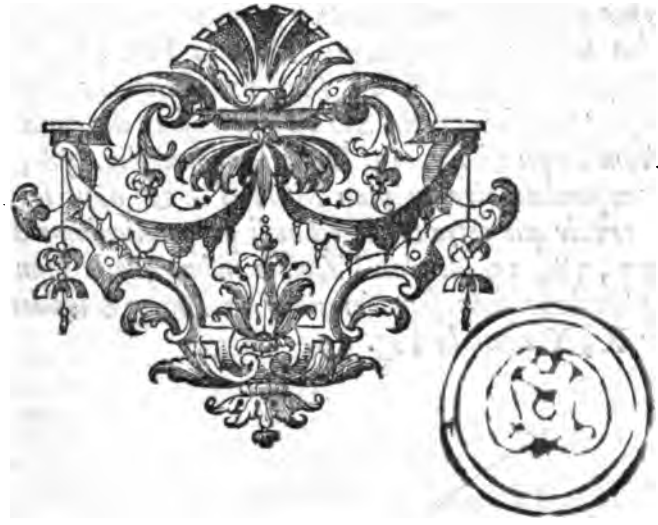
QA
804
.T76

Jan - Trabaud —

Irabaud.

PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET
L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION
aux Mécaniques & à la Physique.

PREMIER TRAITÉ.



A PARIS,

Chez JEAN DESAINT & CHARLES SAILLANT, Libraires, rue Saint Jean-de-Beauvais, vis-à-vis le Collége.

M. DCC. XLI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

AVIS

Pour les trois Figures de la planche 5e du quatriéme Livre.

POUR mettre ces trois Fig. dans la ſituation convenable lorſqu'on veut s'en ſervir, 1°. il faut élever la partie où le poids R *eſt répréſenté perpendic. au plan de la planche & tenir la partie* MONS *qui eſt la plus grande & la plus apparente de toutes parallelement au même plan; & afin de l'appuyer & lui donner un pied qui la ſoutienne dans cette ſituation horizontale, il faut relever ou plier trois parallelog. rectangles qui ne ſont déſignez par aucune lettre, & qui n'ont aucune diagonale, de maniere qu'ils ſoient perpendiculaires au plan de la planche. A légard des parallelogrammes rectangles qui ſont marquez avec des lettres, & qui ont des diagonales, il faut les tenir auſſi dans une ſituation perpendiculaire au plan de la planche, chacun ſelon le pli qu'il a reçu. 2°. Dans la Fig.* 38, *il faut concevoir que le parallelogramme* BDSE *eſt ſitué parallelement aux autres parallelogrammes, & que ſa hauteur* SD *eſt au-deſſous du plan* MONS, *l'extrémité* D *étant la plus baſſe. 3°. Dans la même Fig.* 38, *il faut que la corde* CH *ſoit perpendiculaire au plan* MONS; *& dans les Figures* 37, 39, *il faut concevoir que cette corde eſt auſſi perpendiculaire à* MONS. *4°. Aux Figures* 37, 38, 39, *le plan* TZ *eſt le même que le plan* PGMQ. *5°. Pour quelques planches il faut ſuppléer dans la Fig.* 38 *les lettres* f, F, *& les les lettres* X, Y *dans la Fig.* 39.

Hist. of Science
Cunningham
10-22-31
24935

AVERTISSEMENT.

APrès que l'impreſſion de cet Ouvrage fut commencée, des perſonnes qui ſe conſacrent à l'inſtruction de la jeuneſſe, exhorterent l'Auteur de la terminer promptement, parce qu'elles avoient deſſein d'en faire uſage. Quelque ſoin qu'on ait pris de répondre à leurs vûes, il n'a pas été poſſible d'y ſatisfaire pleinement. Les mêmes perſonnes ont néanmoins ſouhaité avoir ces quatre premiers Livres, quoiqu'ils n'aient été achevés que tard. Les deux qui reſtent, & qui doivent les accompagner, ne tarderont pas d'être imprimés. On joindra au tout une Préface & un Diſcours ſur le Mouvement. Dans le Diſcours on ſe propoſe d'applanir certaines difficultez qui ſe préſentent à ceux qui commencent à étudier cette matiere, & ſur leſquelles les eſprits ſont partagez; on fera voir qu'elles peuvent bien arrêter la curioſité d'un Philoſophe qui veut approfondir la nature des choſes, mais qu'elles ne ſçauroient préjudicier à la vérité des faits, ni jetter de l'incertitude ſur les regles par leſquelles on détermine certains rapports, ni rendre douteuſes les conſéquences qu'on en tire.

Lorſqu'on ſe mit à compoſer cet Ouvrage, le premier deſſein étoit d'abord de ne travailler que pour les Ecoliers qui font leur phyſique dans les Colléges, & de compoſer un Livre qui ne contînt que les matieres de mécanique que MM. les Profeſſeurs leur expliquent, ſoit de vive voix, ſoit dans les écrits qu'ils dictent; mais on fit réflexion que la plûpart des jeunes gens qui ſortent de Philoſophie ne bornent pas l'étude des choſes naturelles à ce qu'ils en ont appris dans leur cours de Phyſique, attendu que la brieveté du tems oblige les Maîtres de reſſerrer les matieres, d'en traiter pluſieurs ſommairement, & de laiſſer à leurs diſciples le ſoin de les étendre par leurs méditations particulieres, ou en y joignant la lecture de quelque Livre. On crut donc qu'il étoit à propos de donner premierement à cet écrit une étendue proportionnée aux divers beſoins, & telle à peu près que des élémens doivent avoir, & qu'il y auroit enſuite plus de facilité de faire un abregé convenable, parce qu'on ſeroit plus à portée de profiter des avis des perſonnes intelligentes. Si les Maîtres prépoſés pour l'inſtruction de la jeuneſſe, jugent que cet abregé doive être utile, on eſt diſpoſé d'en entreprendre le travail.

Dans le premier & le ſecond Livre on a été aſſez exact à citer les endroits qui ſervent de preuve & de fondement à la démonſtration; mais les citations ſont moins fréquentes dans le troiſiéme & le quatriéme Livre, parce qu'on a ſuppoſé que le lecteur ſe rendroit les matieres plus familieres à meſure qu'il en verroit davantage, & qu'il étoit inutile de multiplier les citations qui occupent une partie de l'attention, & qui rendent en quelque ſorte l'eſprit pareſſeux. Lorſqu'un nombre eſt ſeul entre deux crochets, il indique l'article cité du Livre courant. Ainſi ſi on trouve, par exemple, dans le ſecond Livre cette expreſſion (20) elle avertit qu'il faut conſulter le 20 article de ce Livre. Mais ſi on y trouve celle-ci (*Liv.* I. 4.) il faut voir le 4 article du premier Livre.

Pour faciliter la lecture de ce Livre à ceux qui ont les Elémens de Géométrie de M. RIVARD, on a mis à la fin une Table des Propoſitions d'Arithmétique & de Géométrie dont on a fait uſage, & l'on a cité à la fin de chacune l'endroit des élemens où elles ſe trouvent. On s'eſt ſervi de la troiſiéme édition imprimée à Paris chez DESAINT & SAILLANT, rue deS. Jean de Beauvais.

EXPLICAT. DES SIGNES DONT ON S'EST SERVI.

CE ſigne + ſignifie *plus*, & eſt la marque de l'addition, cet autre — ſignifie *moins*, & eſt la marque de la ſouſtraction. Ainſi $a+b.\ 3+4$, ſignifie qu'il faut ajouter 4 à 3, & la grandeur exprimée par la lettre *b* à la grandeur exprimée par la lettre *a*. De même $5-2$ ſignifie qu'il faut retrancher 2 de 5. Ce ſigne = placé entre deux grandeurs, ſignifie que la premiere eſt égale à la ſeconde.

Ce ſigne > placé entre deux grandeurs, ſignifie que la premiere eſt plus grande que la ſeconde. Mais ce ſigne < placé entre deux, ſignifie que la premiere eſt moindre que la ſeconde.

Ce ſigne × marque qu'il faut faire une multiplication : ainſi 4×3 fait connoître qu'il faut multiplier 4 par 3.

Ce ſigne $\sqrt{}$ indique l'extraction d'une racine : ainſi $\sqrt[2]{18}$, fait connoître qu'il faut extraire la racine quarrée de 18.

Changement & Addition pour la page 20.

Ligne 19, aprés DS, *il faut lire ce qui ſuit :* or ſi Fig. 8 & 10 on ajoute DS à AD, que Fig. 9 on l'en retranche, & que Fig. 11. on retranche AD de DS, on aura AS. Si Fig. 7, 8, 9 & 10, on retranche FS de AS, & que Fig. 11 on retranche AS de FS, le reſte AF ſera connu. Si Fig. 8, 10 & 11, on ajoute S*f* à DS, ou que Fig. 9 on l'en retranche, la ſomme ou le reſte D*f* ſera connu. Cela fait, &c.

FAUTES A CORRIGER.

Page 36, *ligne* 21, donc $\frac{Ve}{T}$, *liſez* $\frac{Ve}{t}$.
Page 48, *lig. premiere*, variez, *liſez* arrivez.
Pag. 97, *lig.* 29, ne, *liſez* en.
Pag. 98, *lig.* 8 & 12, FGN, *f g n*, *liſez* FGR, *f g r*.
Pag. 118, *lig.* 27, nombre paire, *liſez* nombre pairement pair.
Pag. 160, *lig. avant derniere* AD, *liſez* BD.
Pag. 167, *lig.* 12, ou, *liſez* au.
Pag. 199, *art.* 208, *à la marge* Fig. 30, *liſez* Fig. 36.
Pag. 223, *lig.* 16, d'où il s'enſuit, *liſez* d'où il ſuit.
Pag. 257, *lig.* 12, des trois, *liſez* des trois cas.
Pag. 269, *lig.* 23, arées, *liſez* aretes.
Pag. 280, *lig.* 7 CF, *liſez* LF. *Ibid. lig.* 9, CF, *liſez* BF.
Pag. 321, *lig.* 14, 15 & 18, FN, *liſez* FH. *Ibid. lig.* 17, EFN, *liſez* EFH.
Pag. 324, à ſon centre F, *liſez* à ſon centre O.
Pag. 344, *art.* 131 *à la marge* Fig. 40, *liſez* Fig. 40, 41.
Pag. 356, *lig.* 17, NG, NE, *liſez* MG, ME.
Pag. 370, *lig.* 4, *l c*, *liſez l* C.
Pag. 384, *lig.* 10, LH, *liſez* SH.

PRINCIPES
SUR LE
MOUVEMENT
ET
L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Physique.

LIVRE PREMIER.

Du Mouvement en tant qu'il convient a tous les Corps.

1. DANS le Mouvement il y a cinq choſes à conſidérer, la Puiſſance qui meut le Corps, le Corps même ou ſa maſſe, l'eſpace qu'il parcourt, la Direction qu'il ſuit, & le tems ou la durée du mouvement. Or on peut réduire ces cinq choſes à trois conſidérations générales ;

7. REMARQUES. 1°. L'eſpace & le tems ſont des quantitez de differente nature ; il ne faut pas néanmoins en conclure qu'il ne peut y avoir de rapport entre l'eſpace & le tems ; qu'ainſi la viteſſe d'un corps n'eſt point le rapport de l'eſpace au tems, ou n'eſt pas exprimée par ce rapport ; car lorſqu'on compare l'eſpace au tems, ce n'eſt pas ſous l'idée préciſe & déterminée d'eſpace & de tems, qu'on les conçoit, mais ſous l'idée générale de quantitez ; or il y a un vrai rapport entre l'eſpace & le tems ainſi conſiderez.

2°. Lorſqu'on veut déterminer en nombres, le rapport qui eſt entre les viteſſes de deux corps, il faut que les eſpaces ſoient exprimez en parties de même nom par exemple en pieds, en toiſes, &c. Il faut auſſi obſerver la même choſe à l'égard des tems ; ſans cette précaution, on ne peut avoir le rapport qu'on cherche. Ainſi ſi le corps A avoit parcouru 300 toiſes en 17 minutes, & que le corps B eût parcouru une lieüe en $\frac{1}{4}$ d'heures, pour déterminer en nombres le rapport des viteſſes, il faudroit auparavant réduire les eſpaces en toiſes ou en lieües, & les tems en minutes ou en heures.

Si $V = v$ $\quad \frac{E}{T} = \frac{e}{t}$

8. COROLLAIRES. 1°. Si les rapports des eſpaces aux tems ſont égaux, les viteſſes ſont égales ; & réciproquement ſi les viteſſes ſont égales, les rapports des eſpaces aux tems ſont égaux.

Si $V > v$ ou $V < v$ $\quad \frac{E}{T} > \frac{e}{t}$ ou $\frac{E}{T} < \frac{e}{t}$

9. 2°. Si les rapports des eſpaces aux tems ſont inégaux, les viteſſes ſont auſſi inégales, & le plus grand rapport donne la plus grande viteſſe. Et réciproquement ſi les viteſſes ſont inégales, les rapports des eſpaces aux tems ſont inégaux, & la plus grande viteſſe eſt exprimée par le plus grand rapport.

Si $E = e$ $\quad V : v :: t : T$

10. 3°. Si les eſpaces parcourus ſont égaux, les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les tems. Car deux rapports qui ont un même antécedent, ſont entr'eux réciproquement comme les conſéquens (3. *Arit.*) ; or dans les rapports des eſpaces aux tems, ce ſont les eſpaces qui ſont les antécedens, & les tems, les conſéquens ; d'ailleurs les viteſſes ſont entr'elles comme ces rapports, donc elles ſont entr'elles réciproquement comme les tems.

$V : v :: Et : eT$

11. 4°. Les viteſſes de deux mobiles, ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces, & de la raiſon inverſe des tems ; c'eſt-à-dire, que pour avoir le rapport de la viteſſe du premier à celle du ſecond, il faut multiplier l'eſpace du premier par le tems du ſecond, & l'eſpace du ſecond par le tems du premier (4. *Arit.*). Que le corps A parcoure 300 toiſes en 5 minutes, &

que le corps B en parcoure 100 en 10 minutes, je dis que les viteſſes des mobiles A & B ſont entr'elles comme les produits 300×10 & 100×5.

Si les tems étoient égaux, que le corps A parcourût 300 toiſes en 10 minutes, les viteſſes ſeroient entr'elles comme les eſpaces parcourus 300 & 100 (4); mais puiſque le corps A emploie un tems deux fois moindre, ſa viteſſe eſt deux fois plus grande (10); donc le rapport des viteſſes eſt deux fois plus grand que le rapport des eſpaces parcourus (18. *Arit.*); donc pour avoir le rapport des viteſſes, il ne s'agit que de doubler le rapport des eſpaces; or ſi on multiplie les eſpaces 300 & 100, le premier par le tems double du mobile B, & le ſecond par le tems ſimple du mobile A, les rapports des produits 300×10 & 100×5 eſt double du rapport des eſpaces 300 & 100 (18. *Arit.*); donc le rapport des viteſſes, qui dans l'hypotheſe préſente eſt double du rapport des eſpaces parcourus, eſt égal au rapport des produits 300×10 & 100×5; ainſi les viteſſes des mobiles A & B ſont entr'elles comme ces preduits. Donc elles ſont, &c.

12. 5°. Si les viteſſes des mobiles A, B ſont égales, les eſpaces parcourus ſont comme les tems. Car puiſque le corps A a même viteſſe que le corps B, en tems égal il parcourt un eſpace de même longueur; donc dans un tems double ou triple, il parcourt une eſpace double ou triple. Donc les eſpaces parcourus ſont comme les tems.

Si $V = v$

$E : e :: T : t$

13. 6°. Si les eſpaces ſont comme les tems auxquels ils ſont parcourus, les viteſſes ſont égales. Car puiſque le rapport des eſpaces eſt le même que le rapport des tems, il s'enſuit que ſi les tems ſont égaux, les eſpaces parcourus ſont auſſi égaux; donc dans l'hypotheſe préſente les mobiles parcourent des eſpaces égaux en des tems égaux. Donc leurs viteſſes ſont égales.

14. 7°. Les eſpaces que deux corps parcourent ſont en raiſon compoſée des viteſſes & des tems. Si la viteſſe du corps A eſt à celle du corps B comme 6 eſt à 2, & le tems du corps A à celui du corps B comme 10 eſt à 5; la raiſon compoſée des viteſſes & des tems ſera égale à celle des produits 6×10 & 2×5 (4. *Arit.*): or je dis que les eſpaces parcourus par les mobiles A & B ſont entr'eux comme ces produits. Car ſi les tems des mouvemens étoient égaux, les eſpaces parcourus ſeroient entr'eux comme les viteſſes 6 & 2 (4); mais puiſque le tems du corps A eſt double de celui du corps B, il parcourra un eſpace double de celui qu'il eût parcouru dans l'hypotheſe des tems égaux; d'où il ſuit que le rapport des eſpaces eſt double de celui des viteſſes 6 & 2 (18. *Arit.*); or ſi on multiplie les viteſſes 6 & 2 par les tems 10 & 5, dont l'un eſt

$E : e :: VT : vt$

double de l'autre, le rapport des produits 6×10 & 2×5 eſt double du rapport des viteſſes 6 & 2 (18. *Arit.*) ; donc le rapport des eſpaces, lequel eſt double de celui des viteſſes, eſt auſſi égal à celui des produits 6×10 & 2×5. Donc les eſpaces, &c.

15. Il ſuit de là que l'eſpace qu'un corps parcourt pendant le tems du mouvement, eſt exprimé par un parallelogramme rectangle, dont les côtez repréſenteroient, l'un le tems, & l'autre la viteſſe ; car un parrallelogramme rectangle eſt le produit de ſes deux côtez (1. *Géom.*) ; donc ſi ces côtez répréſentent, l'un le tems, & l'autre la viteſſe, le parallelogramme rectangle ſera égal ou proportionnel au produit du tems & de la viteſſe ; donc il exprimera auſſi l'eſpace parcouru, car cet eſpace eſt répréſenté par le produit du tems & de la viteſſe (14).

$T : t :: E\gamma : e\gamma$

16. 8°. Les tems des mouvemens ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon inverſe des viteſſes. Suppoſons que l'eſpace parcouru par le corps A ſoit à l'eſpace parcouru par le corps B comme 10 eſt à 5, & la viteſſe du corps A à celle du corps B comme 6 eſt à 2 : ſi on multiplie l'eſpace 10 du corps A par la viteſſe 2 du du corps B, & l'eſpace 5 du corps B par la viteſſe 6 du corps A, les produits 10×2 & 5×6 ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces 10 & 5, & de la raiſon réciproque des viteſſes 6 & 2 (4. *Arit.*) : or je dis que les tems des mouvemens ſont entr'eux comme ces produits. Car ſi les viteſſes étoient égales, les tems des mouvemens ſeroient entr'eux comme les eſpaces 10 & 5 (12) ; mais puiſque la viteſſe 6 du corps A eſt triple de la viteſſe 2 du corps B, le tems du corps A ſera trois fois moindre que ſi les viteſſes avoient été égales. D'où il ſuit que le rapport des tems eſt trois fois plus petit que le rapport des eſpaces parcourus 10 & 5 (18. *Arit.*) : or ſi on multiplie l'eſpace 10 du mobile A par la viteſſe 2 du mobile B, & l'eſpace 5 du mobile B par la viteſſe 6 du mobile A, le rapport des produits 10×2 & 5×6, ſera trois fois moindre que le rapport des eſpaces 10 & 5 (18. *Arit.*) ; donc le rapport des ~~eſpaces 10 & 5~~ Tems ſera égal au rapport des produits 10×2 & 5×6. Donc, &c.

17. 9°. Lorſqu'on connoît l'eſpace qu'un corps parcourt, & le tems, on connoît auſſi ſa viteſſe en diviſant l'eſpace par le tems ; car la viteſſe eſt exprimée par le rapport de l'eſpace au tems ; or on a la valeur d'un rapport en diviſant l'antécedent par le conſéquent (1. *Arit.*) ; donc ſi on diviſe l'eſpace qui eſt l'antécedent par le tems qui eſt le conſéquent, on connoîtra la viteſſe. Si on connoît la viteſſe & le tems, on connoîtra l'eſpace en multipliant la viteſſe par le tems. Car la viteſſe eſt le quotient de

l'eſpace diviſé par le tems (6.) ; or ſi on multiplie le quotient par le diviſeur, l'on a le dividende (6. *Arit.*) ; donc ſi on multiplie la viteſſe qui eſt le quotient, par le tems qui eſt le diviſeur, on aura l'eſpace qui eſt le dividende. Si on connoît l'eſpace & la viteſſe, on aura le tems en diviſant l'eſpace par la viteſſe ; car l'eſpace eſt exprimé par le produit de la viteſſe & du tems (14.), donc ſi on diviſe ce produit par la viteſſe, le quotient fera connoître le tems, car lorſqu'on diviſe le produit de deux quantitez par l'une d'elles, le quotient fait trouver l'autre (7. *Arit.*), d'où il ſuit que de ces trois choſes, la viteſſe, l'eſpace, & le tems ; deux étant connues, la troiſiéme peut l'être auſſi.

18. 10°. La viteſſe d'un corps étant égale ou plutôt proportionnelle au rapport de l'eſpace au tems, ſi l'on diviſe ou que l'on multiplie les deux termes du rapport, par un même diviſeur ou multiplicateur, le nouveau rapport exprimera encore la viteſſe du corps. Car l'on ſçait que le rapport de deux grandeurs ne change point, lorſqu'on les multiplie ou qu'on les diviſe par une même troiſiéme (8. *Arit.*) ; ainſi ſi la viteſſe du corps eſt telle, qu'il parcoure 100 toiſes en 5 minutes, cette viteſſe étant exprimée par le rapport $\frac{100}{5}$, elle pourra l'être par celui-ci $\frac{1000}{50}$, ou encore par celui-ci $\frac{20}{1}$ qui ſont deux rapports égaux au premier. En effet il faut que le corps aille auſſi vite pour parcourir 1000 toiſes en 50 minutes, ou 20 toiſes en une minute, que pour parcourir 100 toiſes en 5 minutes ; car il ne fera jamais ni plus ni moins de 100 toiſes par 5 minutes.

D'où l'on voit que ſi l'on partage par la penſée l'eſpace & le tems en un même nombre infini de parties, le rapport qui ſera entre l'infinitiéme partie de l'eſpace, & l'infinitiéme partie du tems exprimera encore la viteſſe du corps. Car il faut qu'un corps aille auſſi vîte pour faire l'infinitiéme partie de 100 toiſes dans l'infinitiéme partie de 5 minutes, que pour faire 100 toiſes en 5 minutes : d'un côté l'eſpace parcouru diminue juſqu'à devenir infiniment petit, mais de l'autre le tems diminue auſſi infiniment, & dans la même raiſon que l'eſpace. C'eſt pourquoi il eſt indifferent d'exprimer la viteſſe d'un corps par le rapport de deux grandeurs finies, ou de deux grandeurs infiniment petites, pourvu que leur rapport ſoit le même que celui des grandeurs finies.

19. Si l'on nomme (V) la viteſſe d'un mobile, (E) l'eſpace, (T) le tems, l'on aura $V = \frac{E}{T}$ (6.), ou en multipliant les deux termes de l'égalité par T, $TV = E$ (8. *Arit.*) ou $E = TV$, & ſi l'on nomme (v) la viteſſe d'un autre mobile, (e) l'eſpace qu'il parcourt, (t) le tems on aura $v = \frac{e}{t}$ ou $e = tv$. Ces expreſſions

abregées ſont d'un grand uſage pour démontrer d'une maniere courte & facile tout ce qui vient d'être dit, & un grand nombre d'autres propoſitions concernant la viteſſe dans le mouvement uniforme. On en pourra voir des exemples dans la ſuite.

20. La viteſſe dont on vient de parler eſt appellée propre, parce qu'elle n'appartient qu'au corps qui eſt en mouvement; mais il y a une autre viteſſe qu'on nomme rélative ou reſpective, c'eſt celle par laquelle deux corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, quelles que ſoient d'ailleurs leurs viteſſes propres; ſoit qu'il y ait un des corps en repos, où qu'ils ſoient tous deux en mouvement.

21. M. le Chevalier de Louville dans un Mémoire année 1724, pag. 63, ſur la nouvelle Méthode pour calculer les Eclipſes de Lune géométriquement, & ſans table des ſinus, parle des mouvemens relatifs en ces termes : *Il ſemble qu'on n'ait pas crû juſqu'à préſent pouvoir déterminer la diſtance ni la ſituation que gardent entr'eux deux corps en mouvement, ſans en ſuppoſer un des deux fixe, il a fallu pour lors changer la direction & la viteſſe de celui qu'on laiſſoit en mouvement, & cependant on va faire voir qu'il eſt fort facile de trouver en quel tems qu'on voudra leur ſituation & leur diſtance, ſans faire cette ſuppoſition, puiſque nous n'employons dans tout ce calcul que des équations du ſecond degré, ni d'autres courbes que les ſections coniques.*

Or on va montrer qu'il eſt encore plus facile de trouver la ſituation & la diſtance de deux corps en mouvement; puiſque pour cela il ſuffit de ſe ſervir de la regle & du compas, ſans recourir aux ſections coniques; & que ſi l'on veut employer le calcul ſans table de ſinus, on le peut auſſi par la réſolution de quelques triangles.

De la Viteſſe reſpective de deux Corps.

22. L'on vient de dire que la viteſſe reſpective eſt celle par laquelle des corps s'approchent, ou s'éloignent les uns des autres, quelles que ſoient d'ailleurs leurs viteſſes propres. Il ſuffira de conſidérer deux corps.

23. La viteſſe reſpective eſt fondée ſur la viteſſe propre; car ſi deux corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre, c'eſt parce qu'ils ſont mus tous deux, ou que du moins il y en a un qui eſt mu. Lorſque les corps ſont tous deux en mouvement, la viteſſe reſpective n'eſt la viteſſe propre ni de l'un, ni de l'autre corps, mais elle en réſulte. Si l'un des corps eſt en repos, la viteſſe reſpective n'eſt pas différente de la viteſſe propre du corps qui eſt mu.

24. Lorſque

24. Lorſque l'on compare la viteſſe reſpective avec la viteſſe propre de l'un des mobiles, les tems des mouvemens étant égaux, il s'enſuit qu'elles ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus (4.). Il s'agit donc de définir quel eſt l'eſpace que deux mobiles parcourent, pour s'approcher ou pour s'éloigner l'un de l'autre. Si lorſque les corps commencent à être mus, ils ſe touchent; l'eſpace qu'ils auront parcouru pour s'éloigner, eſt l'intervalle qui les ſépare au moment que l'on compare la viteſſe reſpective à la viteſſe propre. Ce qui eſt évident. Ainſi ſi deux corps ſe touchent à l'inſtant T, & qu'après un certain tems ils ſoient éloignez l'un de l'autre de 10 toiſes, l'eſpace qu'ils auront parcouru pour s'éloigner eſt de 10 toiſes, quels que ſoient les eſpaces particuliers que chaque corps ait parcouru dans l'intervalle du tems qu'ils ſe ſont éloignez l'un de l'autre de 10 toiſes. Si lorſque le mouvement commence, les corps ſont éloignez l'un de l'autre, l'eſpace qu'ils parcourent pour s'éloigner ou pour s'approcher, eſt la différence qu'il y a entre l'intervalle qui les ſéparoit lorſqu'ils ont commencé à ſe mouvoir, & celui qui les ſepare au moment de la comparaiſon que l'on fait des deux viteſſes. Dans le cas où deux corps s'approchent l'un de l'autre, on ſuppoſe que l'inſtant auquel on compare la viteſſe reſpective à la viteſſe propre de l'un des corps n'eſt pas après leur rencontre mutuelle, mais que cet inſtant la précede, ou bien qu'il ne differe pas de l'inſtant même auquel cette rencontre arrive. Cela étant, ſi deux corps ſont éloignés de 10 toiſes lors de leur départ, & qu'on trouve qu'en un certain moment ils ne ſont plus éloignez que de quatre toiſes, ou bien qu'ils ſe touchent, l'eſpace qu'ils auront parcouru pour s'approcher ſera de 6 ou de 10 toiſes, différence de l'intervalle qui les ſéparoit lors du départ & de l'intervalle qui les ſépare au moment propoſé.

Si les corps vont en des ſens oppoſez, & qu'ils s'éloignent l'un de l'autre, qu'étant diſtans, lors du départ, l'un de l'autre de 10 toiſes, ils ſe trouvent éloignez de 15 toiſes, l'eſpace qu'ils auront parcouru pour s'éloigner l'un de l'autre eſt de 5 toiſes, différence de 15 à 10 toiſes.

25. L'on nomme direction d'un corps, la ligne droite ſur laquelle il eſt mu, ou tend à ſe mouvoir, s'il eſt empêché & qu'il ne puiſſe la décrire.

26. Si deux corps ſont mus ſur une même ligne droite, ſuivant des directions oppoſées, l'eſpace qu'ils parcourent pour s'approcher, eſt égal à la ſomme des eſpaces que chaque corps

parcourt. On aura cet eſpace ſi l'on retranche la ſomme des eſpaces particuliers que les corps décrivent, de l'intervalle qui étoit entre eux lorſqu'ils ont commencé à ſe mouvoir. On ſuppoſe encore, de même que dans les deux cas ſuivans, que l'inſtant de la comparaiſon des viteſſes précede ou tombe dans l'inſtant de la rencontre mutuelle.

D'où l'on voit que dans l'hypotheſe préſente la viteſſe reſpective eſt égale à la ſomme des viteſſes propres; car la viteſſe reſpective eſt aux viteſſes propres, comme l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective eſt aux eſpaces parcourus par les viteſſes propres (4); or l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective eſt la ſomme des eſpaces parcourus par les viteſſes propres. Donc &c.

27. Si deux corps ſont mus ſur une ligne droite ſuivant la même direction, ſoit que les corps s'approchent ou qu'ils s'éloignent, l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective, eſt égal à la différence des eſpaces parcourus par les viteſſes propres: de ſorte que ſi de l'eſpace que parcourt le corps qui va plus vîte, on retranche l'eſpace parcouru par l'autre corps, le reſte ſera l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective.

D'où l'on conclurra par un raiſonnement ſemblable au précédent, que dans le cas préſent la viteſſe reſpective eſt égale à la différence des viteſſes propres.

28. Si enfin l'un des corps eſt en repos, & qu'il ſoit ſur la direction de celui qui eſt mu, l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective eſt égal à l'eſpace que parcourt le corps qui eſt en mouvement.

D'où il ſuit que la viteſſe reſpective eſt égale à la viteſſe propre de ce corps.

29. Dans les mouvemens rélatifs il y a pluſieurs circonſtances à conſidérer, les viteſſes propres des mobiles, les eſpaces parcourus, les tems de mouvemens, la diſtance, la ſituation & les lieux où chaque corps ſe trouve pour quelque tems que ce ſoit.

Lorſque toutes ces circonſtances ſont réelles, les mouvemens relatifs ſont réels & vraîment éxiſtans; mais ſi quelques-unes ſont ſeulement apparentes, tout ce qui paroît dans les mouvemens n'eſt pas réel, cette apparence, qui n'eſt pas toujours conforme à la réalité, eſt fondée ſur la ſituation de l'obſervateur, à l'égard des corps dont il remarque les différens mouvemens, & ſur certaines regles d'Optique.

Comme les mouvemens relatifs, tant réels qu'apparens, ſont de grand uſage, les uns dans les Mécaniques & les autres dans l'Aſtronomie; on a pris ſoin de les expoſer d'une maniere claire

& préciſe, & de les réduire à des regles qui ôtent tout tâtonnement, lorſqu'il s'agit de déterminer les circonſtances que l'on vient d'articuler.

Deux corps peuvent être mus ſur une même ligne ou ſur des lignes différentes. Dans ce dernier cas les directions peuvent être inclinées ou paralleles, enfin deux routes paralleles peuvent être droites ou courbes; entre les routes en lignes courbes que deux corps peuvent ſuivre, on ne conſidérera ici que la circulaire. On réduit donc tout ce que l'on a à dire ſur les mouvemens rélatifs réels, à trois cas. Dans le premier on conſidérera deux corps en tant que mus ſur une même ligne droite; dans le ſecond on les conſidérera ſur deux routes paralleles; dans le troiſiéme on ſuppoſera qu'ils ſuivent des directions inclinées l'une à l'autre.

On ſuppoſe que les corps ſont de figure ſphérique; ainſi la viteſſe du centre fera connoître la viteſſe du corps; on ſuppoſe encore que leur rencontre mutuelle n'altére point leurs mouvemens, & qu'elle ne change point leurs directions, de même que s'ils étoient pénétrables.

3 0. *Premier cas, lorſque deux corps ſont mus ſur une même ligne droite.*

Si deux corps A, B, ſont mus uniformement ſur la ligne KZ ſuivant la même direction; je dis que la différence des viteſſes eſt à l'une d'elles, comme la diſtance AB qui joint les centres lors de leur départ, eſt à l'une des diſtances AE, ou BE que les corps parcourent en même-tems pour ſe rencontrer. Fig. 1.

Si l'on compare la différence des viteſſes à la viteſſe du corps A, l'on aura la diſtance AE; mais ce ſera la diſtance BE, ſi on fait entrer dans la proportion la viteſſe du corps B.

On ſuppoſe que les viteſſes ſont entr'elles, comme les lignes M & N. Donc tandis que le corps A parcourroit la longueur M, le corps B parcourroit la longueur N; mais l'on ſuppoſe auſſi que ſi les corps partent en même-tems, leurs centres arriveront enſemble au point E; donc les eſpaces AE & BE parcourus en même-tems, ſont entr'eux comme les viteſſes (4), c'eſt-à-dire, comme les longueurs M & N: donc M. N: AE. BE. *divid.* M——N. M:: AE——BE ou AB. AE. (9. Arit.). On aura auſſi M——N. N:: AE——BE ou AB. BE. (9. Arit.) c'eſt-à-dire, la différence des viteſſes, eſt à l'une d'elles, comme AB eſt à AE ou BE.

Lorſque deux corps ſont mus ſuivant la même direction, la

viteſſe reſpective eſt égale à la différence des viteſſes propres: donc M——N exprime la viteſſe reſpective; d'ailleurs AB, différence des eſpaces parcourus AE, BE, eſt l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective. Donc, ſelon les proportions précédentes, l'on aura la viteſſe reſpective eſt à l'une des viteſſes propres, comme l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective eſt à l'eſpace que parcourt le corps dont la viteſſe entre dans la proportion; à l'eſpace, dis-je, que ce corps parcourt juſqu'au point de leur rencontre.

31. L'on voit donc que ſi les viteſſes des corps ſont connues, on peut déterminer d'une maniere aiſée l'endroit de leur rencontre par l'une des proportions précédentes dans leſquelles on connoît les trois premiers termes (10. Arit.); car par-là les eſpaces AE ou BE ſeront connus, & par conſéquent les tems des mouvemens, le lieu de chaque corps, & leur ſituation ſeront auſſi connus.

32. Si les viteſſes M & N ſont connuës, enſemble les tems des mouvemens, l'on trouvera de même les eſpaces parcourus, la diſtance des corps à la fin de ces tems, leur lieu & leur ſituation; car puiſque les viteſſes ſont connuës, l'on ſçait la longueur ou l'eſpace que chaque corps peut parcourir dans un tems donné, & par conſéquent la diſtance qui eſt entre les corps. On ſuppoſe toujours que la diſtance AB lors du départ eſt connuë.

33. Si les viteſſes & la diſtance des corps ſont connuës, pour déterminer les eſpaces parcourus, les tems des mouvemens, & le lieu de chaque mobile, il faut connoître de plus leur ſituation, c'eſt-à-dire, ſi c'eſt le corps B qui précede encore le corps A, ou ſi c'eſt le corps A qui a paſſé le corps B: car il eſt viſible que de part & d'autre du point E où les centres arrivent en même-tems, les corps A & B peuvent ſe trouver à une diſtance l'un de l'autre, égale à la diſtance donnée.

Fig. 2. Suppoſons donc que l'on veuille ſçavoir le lieu de chaque corps, lorſqu'ils ſont éloignez l'un de l'autre de l'intervalle D, il faut prendre de part & d'autre du point A, AF & $Af = D$ & faire M——N. M :: FB. FL. ou M——N. M :: $fB. fl$; prendre enſuite AG=FL ou $Ag = fl$, & les points G, L, ou g, l, ſont ceux ou les centres arrivent en même-tems, lorſqu'ils ſont éloignez de l'intervalle D, les points cherchez ſeront G & L ſi le corps B precede encore le corps A; mais l'on aura les points g, l, ſi le corps A a devancé le corps B.

Car ſi le corps A partoit du point F ou du point f, les centres

arriveroient en même-tems au point L ou *l* (30) ; ainſi le corps A parcourroit FL ou *fl*, tandis que le corps B parcourt BL ou B*l* ; or puiſque AG=FL & A*g*=*fl*, il s'enſuit que le corps A parcourra réellement AG, ou A*g* tandis que le corps B parcourra BL, ou B*l*. Donc les centres ſe trouveront en même-tems aux points G, L, ou *g*, *l* ; il reſte donc que GL, ou *gl* ſoit égale à l'intervalle D, ce qui eſt évident, car AG=FL ; donc ſi on ôte la partie commune FG, on a GL=AF=D, l'on a auſſi A*g*=*fl* ; donc ſi on retranche la partie commune A*l*, le reſte *lg*=A*f*=D.

Après avoir ainſi déterminé les points où les centres arrivent en même-tems, étant éloignez l'un de l'autre de l'intervalle D, l'on connoît les eſpaces AG, BL, ou A*g*, B*l* que les corps parcourent en même-tems, donc l'on connoîtra auſſi les tems des mouvemens.

34. L'on voit donc que ſi deux corps vont d'un même côté ſur une même ligne, on peut connoître les circonſtances de leurs mouvemens. Ces circonſtances ſont la viteſſe de chaque mobile, l'eſpace qu'ils parcourent, le tems du mouvement, la diſtance à laquelle ils ſont l'un de l'autre. Or ſi les viteſſes particulieres ſont connues, & que l'une des trois autres circonſtances ſoit donnée, on trouvera les deux autres. Mais ſi c'eſt la diſtance qui eſt donnée avec les viteſſes, pour connoître les eſpaces parcourus & le tems, il faut de plus connoître la ſituation des mobiles, comme il a été déja remarqué.

35. Si les corps vont dans des ſens oppoſez, on trouvera le point E où les centres doivent ſe rencontrer en faiſant M + N . M :: AB . AE, ou M + N . N :: AB . BE, car il eſt viſible que tandis que par la ſomme des viteſſes M + N les deux mobiles parcourront AB, le corps A, par ſa viteſſe propre, parcourra AE, & le corps B, BE. Fig. 3.

36. S'il s'agit de trouver les points G, L, ou bien *g*, *l* où les centres arrivent en même-tems, étant éloignez l'un de l'autre de l'intervalle D ; il faut prendre de part & d'autre du point A, AF & A*f*=D, & faire la proportion M + N . M :: FB . FL, ou M + N . M :: *f*B . *fl*. prendre AG=FL ou A*g*=*fl* ; & les centres des corps A & B ſeront en même-tems aux point G, L, ou *g*, *l*. Ce ſera les points G, L, ſi les corps ne ſe ſont pas encore rencontrez ; mais l'on aura les points *g*, *l*, ſi les corps ſe ſont déja rencontrez lorſqu'ils ſont éloignez l'un de l'autre de l'intervalle D. Fig. 4.

Car ſi le corps A partoit du point F ou *f*, les centres ſe trou-

veroient en même-tems aux points L ou *l* (35) ; mais puiſque le corps A part du point A, il s'enſuit que lorſque le corps B arrivera en L, le corps A arrivera en G, car AG=FL, & lorſque le corps B arrivera en *l*, le corps A arrivera en *g*, puiſque Ag=*fl* : donc les centres des mobiles ſe trouveront en même-tems en G, & L, ou *g* & *l*. Il reſte donc que GL ſoit égale à AF, ce qui eſt évident, car FL=AG, ſi on retranche la partie commune FG l'on aura GL=AF=D. de même Ag=*fl*. Si on retranche la partie commune A*l* on aura *gl*=A*f*=D.

On ne s'arrête pas au cas particulier où l'un des corps ſeroit en repos, car il n'y a aucune difficulté.

37. *Second cas, lorſque les corps* A, B *ſont mus ſur des lignes paralleles droites ou circulaires.*

On nomme viteſſe angulaire celle par laquelle un corps ou ſon centre décrit ſur une circonférence des arcs d'un certain nombre de degrez, quelle que ſoit la grandeur abſoluë de ces arcs.

38. D'où il ſuit que ſi deux corps décrivent en même-tems ſur des circonférences inégales des arcs ſemblables ou d'un même nombre de degrez, leurs viteſſes angulaires ſont égales ; de même s'ils achevent leurs circonférences en des tems égaux, on dit que leurs viteſſes angulaires ſont les mêmes, quoique les circonférences décrites ſoient fort inégales. S'ils décrivent leurs circonférences en des tems inégaux, on dira que leurs viteſſes ſont inégales & que la plus grande viteſſe eſt celle du mobile qui acheve ſon tour plutôt, quoique la circonférence décrite ſoit peut-être la moindre des deux : ainſi dans la viteſſe angulaire l'on a ſeulement égard au nombre de degrez que contient l'arc décrit, lorſque les arcs décrits ſont ſemblables & contiennent le même nombre de degrez, on regarde ces arcs comme des eſpaces égaux par rapport à la viteſſe angulaire ; de même toutes les circonférences ſont des eſpaces égaux à cet égard. D'où l'on voit que les viteſſes angulaires de deux corps qui décrivent deux circonférences ſont entr'elles réciproquement comme les tems qu'ils emploient à les décrire (30).

39. On nomme tems *periodique* celui qu'un corps emploie à faire une révolution.

40. D'où il ſuit que les viteſſes angulaires de deux mobiles ſont entr'elles réciproquement comme les tems periodiques.

41. Donc ſi les tems periodiques ſont connus, les viteſſes angulaires ſont auſſi connuës, puiſque dans la viteſſe angulaire, on a ſeulement égard au nombre de degrez que contient l'arc décrit :

on peut ſuppoſer que deux mobiles qui décrivent des circonférence inégales, ſont mus ſur la même circonférence, pourvu qu'ils y conſervent la même viteſſe angulaire, c'eſt-à-dire, qu'ils y décrivent des arcs d'un même nombre de degrez que ſur leur circonférence propre.

42. Dans les cas préſens, les centres des corps ne peuvent ſe rencontrer; il peut même ſe faire que les maſſes paſſent l'une devant l'autre ſans ſe toucher, ſi les lignes paralleles ſont trop diſtantes l'une de l'autre. On nommera comme dans le premier cas les viteſſes des corps A & B ſur les lignes droites paralleles, ſçavoir la grande qui eſt celle du corps A, (M) & celle du corps B qui eſt la moindre (N).

43. Dans ce ſecond cas ſi le tems des mouvemens eſt connu, on trouvera facilement le lieu de chaque corps, leur diſtance & leur ſituation, en cherchant d'abord par les tems connus, & les viteſſes auſſi connuës, les eſpaces parcourus.

44. Si l'eſpace parcouru par l'un des corps eſt connu, les autres circonſtances ſeront auſſi connues, le tems des mouvemens, le lieu, la diſtance, & la ſituation des corps.

45. Le ſeul point qui puiſſe faire de la peine, eſt lorſque la diſtance qui eſt entre les corps, eſt donnée, & qu'il s'agit de déterminer les autres circonſtances. Pour y parvenir il faut encore ſçavoir comme dans le cas précedent, la ſituation des corps, c'eſt-à-dire, ſçavoir ſi le corps A qui va plus vîte eſt encore précedé par le corps B, ou bien s'il l'a paſſé & le devance.

46. Il s'agit donc de trouver les lieux G, L, ou g, l des corps A, B lorſqu'ils ſeront à une diſtance donnée D. Du point A il faut mener AF & Af égale à D qui rencontre XY aux points F, f; faire enſuite la proportion M — N. M :: FB. FL, ou M — N. M :: fB. fl. du point L ou l mener LG ou lg parallele à AF ou Af qui rencontre KZ au point G ou g qui ſera le lieu où le centre du corps A arrivera en même-tems que celui du corps B arrivera en L ou l; car ſi les corps partoient en même-tems des points F ou f & B, leurs centres arriveroient enſemble au point L ou l (30), ainſi le corps A parcourroit FL ou fl, tandis que le corps B décriroit BL ou Bl; mais AG = FL (2. *Géom.*), & Ag = fl (2. *Géom.*); donc tandis que le corps B ira de B en L ou l, le corps A ira de A en G ou g, & ces centres ſeront éloignez de l'intervalle GL ou gl = AF ou Af = D. Fig. 5.

47. Si l'on veut avoir les lieux Q, R où les centres arrivent en même-tems lorſqu'ils ſont les moins diſtans qu'il eſt poſſible; il

faut du point A abbaiſſer la perpendiculaire AS, & faire M—N. M :: BS. QS, du point Q élever la perpendiculaire QR, & les centres des corps arriveront en même-tems aux points R, Q, où ils ſeront éloignez l'un de l'autre de la perpendiculaire QR qui eſt la moindre des diſtances qui puiſſe être entre les centres des corps.

48. Si la diſtance D qu'on propoſe devoir être entre les centres des corps étoit moindre que la perpendiculaire AS ou QR, il n'y auroit point de lieux ſur les paralleles, où ces centres puſſent être éloignez de cette diſtance ; il ſeroit donc impoſſible de déterminer la ſituation de la ligne qui la meſure, & celle des corps ſur cette ligne.

Comme la perpendiculaire AS eſt la ſeule qu'on puiſſe mener du point A ſur XY, elle ne peut avoir qu'une poſition ; il n'eſt donc pas néceſſaire pour trouver les vrais lieux des corps, que l'on ſpécifie quelle eſt leur ſituation avant qu'ils ſe trouvent enſemble ſur cette perpendiculaire, car on voit bien qu'il faut que le corps A qui va plus vîte ſoit encore précedé par le corps B.

49. Si la ſomme des demi-diametres des corps AB, eſt égale à la perpendiculaire QR, les corps ſe toucheront, lorſque leurs centres y ſeront arrivez. Si la ſomme des demi-diametres eſt moindre que la perpendiculaire QR, le corps A paſſera le corps B ſans le toucher. Si cette ſomme eſt plus grande que la perpendiculaire QR, on pourra déterminer les lieux où les centres arriveront, lorſqu'ils ſeront éloignez l'un de l'autre de la ſomme des demi-diametres, ou lorſque les corps ſe toucheront.

50. Si on nomme les viteſſes angulaires des corps A, B, qui décrivent d'une viteſſe uniforme, les circonférences KZ, XY, ſçavoir la viteſſe du corps A qui va plus vîte (M), & celle du corps B, (N) l'on déterminera avec la même facilité l'endroit où le corps A doit rencontrer le corps B, c'eſt-à-dire, ſe trouver avec lui ſur une même ligne qui paſſe par le centre commun des circonférences décrites ; & ſi l'on aſſigne la diſtance qui doit être entre leurs centres, on pourra trouver les lieux des corps, lorſqu'ils ſeront à cette diſtance l'un de l'autre.

Fig. 6.

Fig. 6. Si on prolonge le rayon CA juſqu'au point S de l'autre circonférence, l'arc BS eſt l'intervalle qui eſt entre les deux corps, c'eſt pourquoi ſi on fait. M—N. M :: SB. SQ, le rayon CRQ eſt celui où les centres ſe trouvent en même-tems (30. 38).

51. Si l'on demande les lieux des centres lorſqu'ils ſeront éloignez l'un de l'autre d'un arc donné D ; il faut prendre de part & d'autre

d'autre du point S, des arcs SF, S*f* égaux à l'arc donné D, & faire M——N . M :: FB . FL. ou M——N . M :: *f*B . *fl*. prendre l'arc FL ou *fl*, & le porter de S en G ou *g*, & le centre du corps A arrivera ſur le rayon CG ou C*g*, dans le tems que le centre du corps B arrivera en L ou *l*, ce qui eſt évident par tout ce qui précede. Car ſi le corps A partoit du point F ou *f*, il rencontreroit le corps B au point L ou *l*: mais puiſqu'on ſuppoſe qu'il part du point S, il s'enſuit qu'il ſera éloigné du corps B, de tout l'arc GL ou *gl*=D.

52. *Troiſiéme cas lorſque les corps ſont mûs ſur des directions inclinées l'une à l'autre.*

Si les corps A, B, ſe meuvent ſur deux lignes droites KZ, XY inclinées l'une à l'autre, & qui prolongées ou non ſe coupent en un point C, on déterminera encore les circonſtances de leurs mouvemens. Sur la direction du corps B, il faut prendre DC qui ſoit à AC comme N eſt à M; du point A mener AD, & du point B à la ligne AD prolongée ou non, mener tant d'autres lignes qu'on voudra telles que BF, BS, &c. Si des points F, S, &c. on mene FG, SR paralleles à XY qui rencontrent KZ aux points G, R, &c. tandis que le corps A parcourra ſur ſa direction les parties AG, AR, &c. le corps B parcourra ſur la ſienne des parties égales à GF, SR (4). Fig. 7. 8. 9. 10. 11.

Car à cauſe des triangles ſemblables ADC, AFG, l'on a (8. *Géom.*) AC . CD :: AG . GF : c'eſt-à-dire que les lignes AG, GF ſont dans la même raiſon que les viteſſes; donc elles ſeront parcourues en même-tems par ces viteſſes (4). Donc tandis que le corps A parcourt AG ſur ſa direction, le corps B parcourt ſur la ſienne un chemin égal à GF. 1

53. Corollaires. Si l'on mene GE parallele à BF, BE ſera égale à GF (2. *Géom.*); donc on détermine par-là, l'endroit où le centre du corps B doit arriver, tandis que celui du corps A, parcourt AG.

54. On peut déterminer de cette maniere tous les endroits où les mobiles ſe trouvent en même-tems, pourvu que le tems ſoit connu, ou l'eſpace que l'un des corps a parcouru. On détermine auſſi leur diſtance & leur ſituation; car GE qui eſt la diſtance des corps lorſqu'ils ſont en G & E eſt égale à BF (2. *Géom.*); de ſorte que ſi du point B l'on mene à la ligne KZ, tant de lignes que l'on voudra, telles que BF, BS, B*f* &c. elles ſont égales aux diſtances qui ſont entre les centres des corps, lorſqu'ils ſont aux points de leurs directions que l'on détermine par le moyen de ces

lignes. Ainſi BS eſt la diſtance des corps lorſqu'ils ſont aux points R, Q, qu'on détermine par le moyen de cette ligne.

55. 3°. L'on peut par conſéquent trouver les lieux des corps, lorſque leurs centres ſeront à la moindre diſtance poſſible l'un de l'autre. Du point B il faut mener BS perpendiculaire à AD, du point S, SR parallele à XY, du point R mener RQ parallele à BS, & les points R, Q, ſont ceux où les mobiles ſe trouveront lorſqu'ils ſeront à la moindre diſtance poſſible l'un de l'autre. Car toutes les diſtances qu'il peut y avoir entre les mobiles pendant tout le tems des mouvemens, ſont égales chacune à quelqu'une des lignes menées du point B à la ligne AD : or la plus courte des lignes menées du point B à la ligne AD eſt la perpendiculaire BS (3. *Géom.*) ; donc la plus courte diſtance qui puiſſe être entre les corps, ne peut être moindre que BS ou QR ſon égale (2. *Géom.*) ; donc lorſque les mobiles ſont aux points R, Q, ils ſont à la moindre diſtance poſſible.

56. 4°. Puiſque BS eſt perpendiculaire à AD, QR parallele à BS, eſt auſſi perpendiculaire à AD (4. *Géom.*), & par conſéquent oblique à AC ; donc lorſque les centres des mobiles ſont à la plus courte diſtance l'un de l'autre, ils ſont ſur une ligne oblique à la direction de celui qui va plus vîte.

57. 5°. Les centres des mobiles ſe trouvent enſemble ſur une
Fig. 9. perpendiculaire à la direction du corps A qui va plus vîte, avant d'arriver à la ligne de la moindre diſtance qui eſt QR ; car ſi l'on prolonge BS en V où elle rencontre KZ, l'angle BVC étant extérieur, eſt plus grand que l'angle intérieur ASV qui eſt droit (5. *Géom.*) ; donc BVC eſt obtus, donc ſi du point B on mene une ligne à AD, qui prolongée ſoit perpendiculaire à KZ, elle tombera plus près du point A que BV (5. *Geom.*) ; donc ſi à cette perpendiculaire on mene une parallele qui détermine les lieux des mobiles ſur leurs directions (52), elle ſera plus proche de A que QR qui eſt parallele à BS, & qui détermine les lieux Q, R où les mobiles ſe trouvent lorſque la diſtance des centres eſt la moindre qu'il eſt poſſible ; donc les mêmes centres ſe trouvent ſur une perpendiculaire à la route du corps A qui va plus vîte avant que d'arriver à la ligne de leur plus courte diſtance. C'eſt-là une propoſition que M. le Chevalier de Louville démontre d'une maniere differente, tant par le calcul, que géometriquement, contre ce qu'ont penſé des célebres aſtronomes.

58. 6°. Si on veut trouver les lieux des mobiles lorſqu'ils ſont à une diſtance donnée telle qu'on voudra, on le peut avec la même

facilité que pour la plus courte diſtance. Il faut du point B mener à AD deux lignes telles que BF & B*f* égales à la diſtance donnée, des points F, *f* mener deux paralleles à XY qui rencontrent KZ aux points G, *g*, deſquels il faut mener GE, *ge* paralleles à BF, B*f* & les points G, E ou *g*, *e* ſont ceux où les centres ſe trouvent en même-tems lorſqu'ils ſont éloignez l'un de l'autre, de la longueur BF ou B*f* (52).

59. 7°. Il eſt évident que les mobiles parcourent autant de chemin depuis le moment que leurs centres ſe trouvent à une diſtance donnée, juſqu'au moment de leur plus courte diſtance, que depuis ce moment juſqu'à ce qu'ils ſe retrouvent à la même diſtance donnée, car SF=S*f* (6. *Géom.*), donc à cauſe des paralleles FG, SR, *fg*, les eſpaces GR, R*g* ſont égaux (7. *Géom.*). Donc le tems qui s'écoule depuis le moment où les centres ſont à une diſtance donnée, juſqu'au moment où ils ſe retrouvent à la même diſtance l'un de l'autre, eſt partagé également par l'inſtant de la plus courte diſtance.

60. Il eſt évident que ſi en tirant la ligne AD elle paſſoit par le point B, les viteſſes ſeroient entr'elles comme AC & BC; par conſéquent les centres arriveroient en même-tems au point de concours C (4).

61. 8. ~~On peut remarquer que lorſque les mobiles tendent au point C, & que leur plus courte diſtance doit être avant de paſſer le point de concours C, pour lors ils ſe trouvent premierement ſur une perpendiculaire à la route du corps B, enſuite ſur une perpendiculaire à la route du corps A, enfin ſur la ligne de leur plus courte diſtance; mais ſi leurs mouvemens ſont tels qu'ils ſe trouvent d'abord ſur la ligne de leur plus courte diſtance, ils arriveront enſuite ſur la perpendiculaire à la route du corps A, & enfin ſur la perpendiculaire à la route du corps B, c'eſt-à-dire, que ces circonſtances arriveront dans un ordre renverſé.~~

L'on peut auſſi remarquer que la propoſition eſt générale, & qu'elle s'étend à tous les cas où deux corps ſont mus d'une viteſſe uniforme ſur des lignes droites.

62. Il reſte à faire voir que l'on peut déterminer les circonſtances des mouvemens relatifs, ſans recourir à l'uſage des tables.

Dans ce calcul on peut ſuppoſer que les diſtances des mobiles ſont données, ou que l'eſpace parcouru par l'un d'eux eſt connu.

On ſuppoſe d'abord que les diſtances ſont connues excepté la moindre de toutes, qui étant déterminée en elle-même n'eſt point arbitraire, & que d'ailleurs il n'y a rien qui la faſſe connoître im-

au lieu de 61. Lisés

Lorsque le mobile B qui va moins vite doit passer le point de concours C avant le corps A, pour lors ils se trouvent après avoir passé l'un et l'autre le nœud, 1° à leur plus courte distance, 2° sur la perpendiculaire à la route du corps A, et enfin sur la perp. à la route du corps B. Fig 8 9, et 11.

mais si le mobile A qui va plus vite, doit passer le point de concours C, avant le mobile B, pour lors les mobiles se trouvent, 1° sur la perpend. à la route du corps B, ensuite sur la perpend. à la route du corps A et enfin à leur plus courte distance. Fig. c'est à dire que ces circonstances arriveront dans un ordre renversé

médiatement. Puiſque l'angle KCX eſt conſtant, c'eſt-à-dire, toujours le même, ſi de quelque point de l'une des directions, on abbaiſſe une perpendiculaire ſur l'autre, l'on formera un triangle rectangle dont les côtez ont un rapport conſtant, & par conſéquent on peut le ſuppoſer connu. Dans le triangle rectangle ACX l'on connoît le rapport des côtez AC, CX, & le côté AC qui eſt la diſtance du corps A au point de concours des directions, donc le côté CX eſt connu par-là, de même que le côté AX. (8. *Géom.*) Dans le triangle rectangle ADX, l'on connoît les côtez AX & DX, car CX eſt connu, de même que CD par la proportion M . N :: AC . CD ; donc le côté AD ſera connu (9. *Géom.*) Dans le triangle rectangle ABX, l'on connoît AX & AB ; donc BX ſera connu, & par conſéquent BD. Les triangles ſemblables ADX, BDS, feront connoître la plus courte diſtance BS (8. *Géom.*) Cette plus courte diſtance étant connue, les autres BF &c. étant arbitraires, l'on aura tout autant de triangles rectangles BFS dans leſquels on connoît deux côtez, donc les troiſiémes tels que FS ſeront connus (9. *Géom.*) Par le moyen du triangle BDS on peut connoître DS ; ~~qui étant ajoutée ou retranchée de AD, donne pour ſomme ou pour reſte AS ; AF eſt auſſi connu en retranchant FS de AS, de même que Df, après avoir ajouté DS à Sf, ou l'en avoir retranché.~~ Cela fait il ſera aiſé de connoître les eſpaces AG, GR, Rg parcourus par le corps A ; enſemble les eſpaces FG, SR, *gf*. L'eſpace FG étant connu, on aura celui qui répond à GR en retranchant FG de SR &c. les eſpaces que les corps parcourent en même-tems ſur leurs directions étant ainſi déterminez en nombres, l'on pourra trouver la diſtance où ils ſont chacun du lieu de départ & du point de concours C : & ſi l'on convertit en tems les eſpaces parcourus, l'on aura celui qui s'eſt écoulé en les parcourant.

63. 2°. Si l'eſpace que l'un des corps a parcouru eſt donné, on peut trouver la diſtance qui eſt entre leurs centres : ainſi ſi l'on connoît l'eſpace AG que le corps A a parcouru, il ſera aiſé de connoître celui que le corps B a parcouru en même-tems : les parties AG, GR, Rg étant connues, on pourra connoître les parties de la ligne AD qui leur répondent ; il faut enſuite trouver la perpendiculaire BS, laquelle étant connue l'on aura des triangles rectangles dans leſquels on connoîtra les deux côtez de l'angle droit, les hypothenuſes, ſavoir les diſtances des mobiles ſeront connues par là.

64. Si on veut ſe ſervir des tables de ſinus, on peut abreger le calcul en commençant par le triangle ACD dans lequel on con-

or Si Fig 8 et 10 on ajoute DS a AD, et que Fi. 9 on l'en retranche, et que Fi. 11 on retranche AD de DS, on aura AS. Si Fi. 7, 8, 9, 10 on retranche FS de AS et que Fi. 11. on retranche AS de FS, le reste AF ſera connu. Si Fi. 8, 10, 11. on joute Sf a DS, ou que Fi. 9 on l'en retranche, la Somme ou le reste Df ſera connu. Le fait de

noît deux côtez & l'angle compris; donc le côté AD ſera connu (10. *Géom.*) Dans le triangle ADB l'on connoît les côtez AD, AB, & l'angle ADB; donc le côté DB ſera connu (11. *Géom.*) Dans le triangle BDS l'on connoît tous les angles & le côté BD; donc BS ſera connu. On acheve enſuite le reſte comme dans la premiere des deux ſuppoſitions qu'on a faites, ſi l'on ſuppoſe que les diſtances ſont connues; mais il faut continuer comme dans la ſeconde méthode, ſi les eſpaces étant ſuppoſez connus, l'on cherche les diſtances.

DES MOUVEMENS APPARENS.

65. L'on vient de conſiderer les mouvemens relatifs en eux-mêmes & en tant que réels; mais il arrive aſſez ſouvent qu'ils paroiſſent tous autres qu'il ne ſont en effet. L'éloignement des corps, leur ſituation entr'eux & à l'égard de l'obſervateur, les figures qu'ils décrivent ſont autant de ſources d'erreur pour la vue, & qui font qu'elle ne peut pas diſcerner toujours la réalité d'avec la ſimple apparence. Certains corps paroiſſent être en mouvement lorſqu'ils ſont en repos: il y en a au contraire qui paroiſſent être en repos lorſqu'ils ſont en mouvement; les uns ſemblent s'arrêter tout court, les autres retourner en arriere, quoique les uns & les autres continuent de pourſuivre leur route. Cette diverſité d'aſpects d'une même choſe, fait voir que le rapport des yeux n'eſt pas un témoignage infaillible, & que la vue ne fait pas toujours connoître ce qui ſe paſſe entre des corps qui ſont mus. Il eſt bien vrai que lorſque nous voyons certains corps ſe mouvoir, il exiſte du mouvement quelque part, mais la vûe ſeule ne nous apprend pas toujours à quels corps le mouvement appartient. Pour découvrir la raiſon de cet effet, il faut ſavoir que lorſque nous ouvrons les yeux pour regarder les objets qui nous environnent, ils peignent leur image au fond de l'œil ſur la retine; & c'eſt en conſéquence de l'impreſſion que l'organe de la vûe en reçoit que nous ſommes avertis qu'il y a des corps autour de nous, & que nous les voyons. Si les corps qui ſont au dehors changent de place, leurs images en changent auſſi ſur la retine; or toutes les fois que l'image parcourt une certaine étendue ſur la retine, l'objet paroît avoir un mouvement ſemblable en ſens contraire: ſi l'image va du côté droit de l'œil vers le côté gauche, l'objet paroîtra aller de gauche à droite, conformément à la loi établie par l'auteur de la nature; enſorte que le mouvement ſoit réel, ſoit apparent d'un objet eſt toujours lié avec le déplacement de ſon

image ſur la retine ; mais ce changement de place de l'image eſt un témoignage équivoque de ce qui ſe paſſe hors de nous ; car cette image peut changer de place ou bien parce que l'objet même en change, ou parce que l'œil ſeul ſe remue. C'eſt-là ce qui arrive lorſqu'on eſt au bord d'un vaiſſeau qui va vîte, car on voit que les terres & les villes s'éloignent. Une perſonne qui pirouette & tourne fort vîte ſur ſes talons, éprouve la même choſe ; tous les objets qui l'environnent lui paroiſſent aller en rond, parce que chacun peint à ſon tour ſon image ſur la retine, & qu'en y parcourant une certaine étendue, elle affecte l'œil de la même maniere que ſi les objets étoient mus réellement. On ne peut donc pas conclure qu'un corps eſt mu de cela ſeul qu'il paroît ſe mouvoir, car cette apparence eſt uniquement fondée ſur le mouvement de l'image ſur la retine : or ce mouvement de l'image n'eſt pas toujours l'effet du mouvement de l'objet auquel elle ſe rapporte. L'ors donc que certains corps paroiſſent ſe mouvoir, on peut bien croire que cette apparence eſt cauſée par un mouvement réel, mais on riſqueroit de ſe tromper, ſi ſans autre preuve, on la réaliſoit dans l'objet auquel elle ſe rapporte. Les mouvemens apparens ſont fort fréquens dans la nature ; mais la théorie en eſt ſur-tout néceſſaire dans l'aſtronomie. C'eſt en faveur de cette partie de la phyſique, qu'on va expoſer les principales circonſtances de ces mouvemens ; & parce que les aſtres ſe meuvent en rond ou qu'ils paroiſſent s'y mouvoir, on va déterminer de quelle maniere ces apparences doivent ſe faire remarquer dans le cercle.

66. Dans les mouvemens apparens on juge de l'eſpace qu'un corps parcourt, en le rapportant à certains points fixes qui ſont à côté ou aude-là du corps. On obſerve d'abord auquel des points il répond ; ſi à quelque tems de là on trouve qu'il répond à de nouveaux points, on juge qu'il eſt en mouvement, & on eſtime ſa viteſſe en comparant l'eſpace apparent au tems qui s'eſt écoulé entre les deux obſervations.

Il peut ſe faire qu'un mobile ſans diſcontinuer ſa courſe, paroiſſe néanmoins s'arrêter.

Imaginons une allée d'une longueur qui ſoit à perte de vûe, fermée des deux côtez par deux rangées d'arbres paralleles : on ſçait que l'œil placé à l'un des bouts de l'allée, & regardant vers l'extrêmité oppoſée, verra les deux rangées d'arbres s'approcher l'une de l'autre, comme ſi on les avoit inclinées pour les faire rencontrer ; & ſi elles ſont aſſez prolongées elles paroîtront con-

courir à un point vers l'autre bout. Qu'on ſe répréſente auſſi deux obſervateurs qui étant aux deux bouts de l'allée en traverſent la largeur, il eſt certain qu'ils paroîtront l'un à l'autre être immobiles, & reſter à la même place, puiſque de l'un des bouts les deux rangées d'arbres paroiſſent ſe joindre & fermer l'allée vers l'autre bout : or les deux obſervateurs ſe voient l'un l'autre ſuivant des rayons viſuels paralleles entr'eux, & aux deux rangées d'arbres.

67. D'où l'on voit que ſi un corps en mouvement, eſt à une fort grande diſtance, & qu'un obſervateur qui le ſuit des yeux, le voie ſuivant des rayons viſuels paralleles, il doit paroître en repos, & demeurer au même endroit.

68. Si la route du mobile eſt tellement dirigée à l'égard de l'obſervateur, que les mêmes points fixes auxquels il avoit été rapporté auparavant, reparoiſſent de nouveau à côté ou au-delà du mobile, l'obſervateur le verra retrograder ou retourner en arriere, car il lui ſemblera qu'il refait le même chemin. L'on va voir que ſi deux obſervateurs ſont mus ſur deux circonférences de cercle concentriques, les trois apparences dont on vient de parler, peuvent avoir lieu, c'eſt-à-dire, qu'en certains endroits de leur route, l'un paroîtra à l'autre, aller vers le même côté que cet autre & dans le même ſens ; qu'en d'autres endroits l'un verra l'autre s'arrêter quoiqu'ils ne diſcontinuent point de marcher ; qu'enfin en certains autres, il ſemblera à l'un que l'autre rebrouſſe chemin, & qu'il retourne en arriere.

69. On ſuppoſe deux circonférences concentriques KZ, XY, Fig. 12. & trois obſervateurs l'un placé au centre C, & les deux autres A, B qui ſe meuvent ſur les circonférences ſans jamais s'arrêter. L'un des obſervateurs peut voir ſans interruption les deux autres. Cela poſé,

1°. Celui qui eſt au centre verra les deux autres avancer ſans ceſſe dans le même ordre ſur leurs circonférences, & aller de ſuite quelles que ſoient leurs viteſſes : ainſi les mouvemens apparens des mobiles A, B, à l'égard de l'obſervateur C, ne different point des mouvemens réels, quant à la direction.

70. 2°. Si l'un des obſervateurs A, B porte ſes regards vers le centre C, il verra le corps qui y eſt placé, ſe mouvoir & décrire la même circonférence qu'il décrit ; car il rapportera le corps C ſucceſſivement à des points fixes qui étant à la ſuite les uns des autres, ſont diamétralement oppoſez aux endroits par ou l'obſervateur paſſe. Le corps C paroîtra donc décrire les mêmes

arcs que l'obſervateur décrit réellement, & faire ſon tour dans le même tems que l'obſervateur acheve le ſien. C'eſt pourquoi ſi les mobiles A, B tournent en des tems differens, le mouvement apparent du corps C, ſera auſſi différent pour les deux obſervateurs.

71. 3°. Si l'un des obſervateurs, par exemple, celui qui eſt en A tourne ſur lui-même comme une roue autour de ſon eſſieu, il verra les corps B, C tourner autour de lui, en ſens contraire, & dans le même intervalle de tems; c'eſt-à-dire, que ſi l'obſervateur A tourne de droite à gauche, les corps C, B, paroîtront tourner de gauche à droite, ce qui eſt conforme à l'expérience & aux principes qu'on vient détablir. Ainſi le corps C paroîtra à l'obſervateur A avoir deux mouvemens, l'un par lequel il décrit la circonférence KZ, l'autre par lequel il paroît tourner autour de l'obſervateur dans le même-tems que l'obſervateur tourne ſur lui-même.

72. 4°. Si ſur les circonférences KZ, XY on prend les arcs AH, BD qui ſoient dans la même raiſon que les viteſſes des mobiles, & qui ſoient tellement inclinez ou obliques l'un par rapport à l'autre que les lignes AB, HD menées par leurs extrêmitez, ſoient paralleles, pendant le tems que les obſervateurs décriront ces arcs, ils ſeront ſtationaires l'un à l'égard de l'autre, ou l'un paroîtra à l'autre s'arrêter pendant tout ce tems-là. Car puiſque les arcs AH BD ſont comme les viteſſes, ils ſeront décrits en même-tems, d'ailleurs puiſque les lignes AB, HD qui paſſent par les extrêmitez de ces arcs ſont paralleles, les obſervateurs ſe trouvant en même-tems aux points A, B & enſuite aux points H, D, il s'enſuit que l'un verra l'autre ſuivant des rayons viſuels paralleles & cela pendant tout le tems que les arcs AH, BD ſeront parcourus; car comme l'on ſuppoſe que ces arcs ſont fort petits, on peut les regarder comme des lignes droites; c'eſt pourquoi ſi on mene d'autres paralleles à AB, HD qui rencontrent ces arcs, elles les diviſeront en parties proportionnelles aux mêmes arcs (7. *Géom.*), c'eſt-à-dire, en parties qui ſeront entr'elles comme les viteſſes des mobiles, & qui ſeront par conſéquent parcourues en même-tems. Donc les lignes droites qui paſſeront par les endroits des mobiles pendant le tems que les arcs AH, BD ſeront parcourus, ſont paralleles aux lignes AB, HD, donc pendant le même-tems un obſervateur verra l'autre ſuivant des rayons viſuels paralleles; par conſéquent l'un ſera ſtationaire à l'égard de l'autre (65.)

Il eſt manifeſte que la même apparence a lieu pour l'un & l'autre obſervateur en même-tems, & qu'elle commence ou finit au même inſtant pour tous deux.

Si l'on diviſe les arcs AH, BD en deux parties égales aux points E, F, qu'on mene les tangentes EL, FL, juſqu'au point L où elles ſe rencontrent, elles ſont dans la même raiſon que les viteſſes des mobiles A, B. Car ſi on mene EF, elle ſera parallele à HD ou GI (7. *Géom.*), & l'on aura EL. FL :: EG. FI; mais parce que les arcs EH, FD étant fort petits, on peut les regarder comme égaux aux parties EG, FI des tangentes, l'on aura EL. FL :: EH. FD, c'eſt-à-dire, que ces tangentes ſont entr'elles comme les viteſſes des mobiles A, B. Fig. 12.

Il ſuit de-là que ſi les mobiles A, B ſont ſituez l'un par rapport à l'autre, de maniere que les tangentes que l'on menera de l'endroit où ils ſe trouvent, juſqu'au point de leur rencontre, ſoient entr'elles comme leurs viteſſes, ils ſeront ſtationnaires à ces endroits-là même : car ils parcourront pendant quelque tems des arcs qui ſont comme ces tangentes ; & de plus ces arcs ſeront inclinez l'un à l'autre, de maniere que les lignes menées par leurs extrêmitez, ſeront paralleles comme il paroît par la conſtruction précedente.

Si le point F s'approche de la tangente EL, en s'éloignant du rayon CP, le rapport des viteſſes étant encore exprimé par celui des tangentes, il faudra que la viteſſe du mobile B diminue, & elle pourra diminuer juſqu'à ce que le point F étant infiniment proche de EL l'obſervateur B l'ait toute perdue, & ſe trouve en repos ſur la tangente EL ; auquel cas non-ſeulement il paroîtra ſtationnaire, mais il le ſera effectivement; cependant l'obſervateur A conſervant toute ſa viteſſe, paroîtra à l'obſervateur B placé ſur EL, s'arrêter pendant tout le tems qu'il décrira l'arc AH, car cet arc paroît être un prolongement de la tangente EL ; ainſi lorſque le mobile A le parcourra, il cauſera dans l'obſervateur B, la même apparence que s'il ſe mouvoit ſur la tangente EL, & que l'obſervateur B le vît pendant tout ce tems ſuivant le rayon viſuel LE.

La même apparence peut donc avoir lieu ſoit que les deux obſervateurs ſe meuvent, ſoit que l'un d'eux ſoit en repos, & l'endroit où la ſtation doit ſe faire n'eſt pas un lieu fixe ; car il peut changer ſelon que la viteſſe de l'obſervateur le plus éloigné eſt grande ou petite.

73. Si le point F s'approche du rayon CP, & que le rapport des viteſſes ſoit toujours exprimé par celui des tangentes, il faudra que la viteſſe du mobile B augmente, & elle augmentera juſqu'à ce que la tangente FL devienne égale à la tangente EL ; ce qui arrivera lorſque le point de concours L ſera à une diſtance infinie, & que le point F tombera ſur le point P : pour lors les tangentes EL, FL étant perpendiculaires à CP (14. *Géom.*), elles ſeront paralleles (28. *Géom.*) ; or il eſt évident que pour lors, les paralleles menées d'une circonférence à l'autre étant paralleles à CP ne pourront pas retrancher des arcs égaux ou qui ſoient dans la raiſon des viteſſes ; c'eſt pourquoi il n'y aura point de ſtation, ou elle ſera la plus courte qu'il eſt poſſible.

74. Il n'y a donc de ſtations que lorſque le mobile A qui eſt plus proche du centre C va plus vîte que le mobile B.

75. Puiſque dans le cas où il peut y avoir ſtation, le mobile A doit aller plus vîte que le mobile B, & que d'ailleurs lors de la ſtation, le mobile B peut préceder le mobile A, ainſi qu'il paroît par la figure, il s'enſuit que le mobile A devancera après le mobile B, & qu'il ſe trouvera à ſon égard dans une ſituation toute ſemblable à la précedente, à cela près qu'il précedera le mobile B, au lieu qu'ici il en eſt précedé ; c'eſt pourquoi après la premiere ſtation, il ne tardera pas d'y en avoir une ſeconde. Lorſque les viteſſes des mobiles ſont égales, les deux ſtations (ſi on peut dire qu'il y en ait) arrivent au même endroit, ſçavoir ſur la ligne CP, & ſe réuniſſent en une.

76. Entre deux ſtations il y a néceſſairement une rétrogradation. Car il eſt viſible que dans la premiere ſtation, le mobile B qui va moins vîte, précede, & que dans la ſeconde il eſt précedé par le mobile A ; que dans la premiere ſtation, les rayons viſuels ſuivant leſquels un obſervateur voit l'autre, ſont dirigez de la droite vers la gauche, & que dans la ſeconde ſtation ils ſont dirigez de la gauche vers la droite. Donc depuis la premiere ſtation juſqu'à la ſeconde, les rayons viſuels ſe termineront à des points fixes qui ont ſervi de guide avant la premiere ſtation. Donc les mobiles paroîtront refaire le même chemin ; ils ſeront donc rétrogrades.

77. Si les viteſſes des mobiles ſont égales, on vient de voir que les deux ſtations ſe réuniſſent en une, par conſéquent il ne peut y avoir de rétrogradation. Car la rétrogradation arrive entre deux ſtations.

78. On peut encore démontrer cette propoſition d'une ma- Fig. 13.
niere ſenſible. Suppoſons que la grande circonférence ſoit double de la petite. Si l'on diviſe la petite en 6 parties égales, & la grande en 12, les viteſſes étant égales, tandis que le mobile A parcourra une partie ſur ſa circonférence, le mobile B en parcourra une ſur la ſienne, puiſque les parties ſont égales des deux côtez (13. *Géom.*). Suppoſons que les mobiles partent enſemble des points A, B. Les rayons viſuels ſuivant leſquels un obſervateur verra l'autre, ſont BA, CO, DP, EQ, FR, GS, HA, IO, KP, LQ, MR, NS, BA, après quoi les deux mobiles ſe retrouveront aux mêmes points d'où ils ſont partis; or ſi l'on y prend garde, les rayons viſuels pendant tout le tems du mouvement ſe terminent, ou ſont dirigez vers des points qui ſe ſuivent tous dans le même ordre. Donc ſi les mobiles ont des viteſſes égales, il ne peut y avoir de rétrogradation.

Il ſuit de-là que ſi les mobiles achevent leur tour, en des tems qui ſoient comme les diſtances au centre, il n'y aura point de rétrogradation; car pour lors les viteſſes ſont égales, ce qui ſe prouve ainſi. Les circonférences ſont comme les rayons ou les diſtances au centre, donc elles ſont auſſi entr'elles comme les tems: donc les eſpaces parcourus ſont comme les tems, donc les viteſſes ſont égales (13); & par conſéquent il ne peut y avoir de rétrogradation (77.)

79. Si le mobile qui eſt le plus éloigné du centre, avoit une viteſſe plus grande que celui qui en eſt plus proche, il n'y auroit pas non plus de rétrogradation.

80. Donc ſi les viteſſes angulaires étoient égales, il n'y auroit pas de rétrogradation. Car pour lors les deux mobiles ſeroient toujours à égale diſtance l'un de l'autre, & leur aſpect ſeroit le même par tout. L'on voit donc que les ſtations & les rétrogradations apparentes ont pour fondement l'inégalité des viteſſes; il faut cependant que ce ſoit le mobile qui eſt plus près du centre qui aille plus vîte. Parlà il pourra tantôt précéder, tantôt ſuivre le mobile qui en eſt plus éloigné, & ſe trouver dans les ſituations favorables à ces ſortes d'apparences.

81. Par les principes qu'on a établi on peut déterminer tous les endroits de ſuite où les mobiles doivent être ſtationnaires & rétrogrades, & les marquer ſur les circonférences qu'ils décrivent. Il faut d'abord trouver l'endroit de la premiere ſtation.

On ſuppoſe que le mobile qui eſt plus près du centre eſt en A. Il s'agit de trouver ſur la circonférence de l'autre mobile le point

B dont la ſituation ſoit telle que les deux obſervateurs placés ſur ces corps, ſoient ſtationnaires, l'un à l'égard de l'autre.

Fig. 14. Par le point A il faut mener la tangente GAL indéfiniment prolongée, & qui coupe la grande circonférence aux points G, L; du point A comme centre, & de l'intervalle AG ou AL, décrire une demi-circonférenc GEL; du point A, & par le centre C mener ACD ſur laquelle il faut prendre AD qui ſoit à AG comme la viteſſe du mobile A eſt à la viteſſe du mobile B; du point D mener DEF qui touche la demi-circonférence décrite au point E, & qui prolongée rencontre GAL au point F; il faut prendre EF & la porter de F en B, où elle rencontre la circonférence du mobile B. Cela fait, ſi les deux mobiles arrivent en même-tems en A & B, ils y ſeront ſtationnaires.

Pour le démontrer il faut mener AE au point E où DEF touche la demi-circonférence GEL, & l'on aura deux triangles rectangles ſemblables DAF, AEF; l'angle F eſt commun, les angles DAF, AEF ſont droits (14. *Géom.*); donc l'angle D eſt égal à l'angle EAF (15. *Géom.*); donc l'on a AD. AE ou AG :: AF. FE ou FB (8 *Géom.*). C'eſt-à-dire que les viteſſes exprimées par AD. AG, ſont entr'elles comme les tangentes FA & FB : car FB eſt elle-même tangente. Puiſque EF touche la demi-circonférence GEL, on a FL. FE :: FE. FG (16. *Géom.*), Si dans cette proportion on met FB au lieu de FE, on aura encore FL. FB :: FB. FG; donc FB touche la circonférence du mobile B (16. *Géom.*); donc les viteſſes exprimées par AD, AG, ſont comme les tangentes AF, FB. Donc les mobiles étant en même-tems aux points A, B ſeront ſtationnaires l'un par rapport à l'autre (72).

82. Si l'on prend de l'autre côté de CAP, le point S, qui ſoit éloigné de D autant que B, il ſera ſitué à l'égard de A de même que B; donc deux mobiles qui ſeroient en même-tems, l'un en B & l'autre en S, ſeroient ſtationnaires tous deux à la fois, à l'égard de l'obſervateur en A. Et réciproquement un mobile qui arriveroit au point A, ſeroit ſtationnaire à l'égard des obſervateurs en B & S.

83. Les points A & B de la premiere ſtation étant trouvez, on peut déterminer ceux de la ſeconde. Il faut trouver la ſitua-

Fig. 15. tion du rayon ou demi-diametre CK ſur lequel les mobiles arrivent en même-tems. Puiſque les viteſſes des mobiles ſont connues, les tems périodiques, c'eſt-à-dire, les tems des révolutions, ſont auſſi connus, de même que les viteſſes angulaires, car elles ſont entr'elles réciproquement comme les tems des révolutions; & puiſque

l'on connoît la ſituation des mobiles, l'on connoît auſſi l'arc BD dont le mobile B précede le mobile A : c'eſt pourquoi après avoir nommé, comme ci-devant, (M,N,) les viteſſes angulaires des mobiles, ſi l'on fait M—N . M :: DB . DK, l'on aura le point K où le mobile B arrive en même-tems que le mobile A parvient au point X (50) ; car AX eſt d'autant de degrez que DK. Cela fait, ſi l'on prend KS=BK & XG=AX, l'on aura la ſituation des mobiles lors de la ſeconde ſtation, car il eſt viſible que cette ſeconde ſituation eſt ſemblable à la précédente.

84. La rétrogradation arrivera donc pendant le tems que les mobiles parcourront les arcs BS, AG.

1°. Si les lignes ou rayons viſuels AB, GS ſont inclinez l'un à l'autre, il eſt évident qu'entre les deux ſtations il doit y avoir une rétrogradation. Car depuis la premiere ſtation en AB juſqu'à ce que les obſervateurs arrivent en même-tems ſur CK, l'obſervateur inférieur rapporte toujours l'obſervateur ſupérieur à la gauche de CK ; mais depuis qu'ils ont paſſé eux-mêmes à la gauche de cette ligne, juſqu'à la ſeconde ſtation en GS, l'obſervatur inférieur ne ceſſe de rapporter l'obſervateur ſupérieur à la droite de la ligne CK, comme la figure le montre : or cela ne peut être ainſi à moins que l'obſervateur ſupérieur n'ait paru à l'obſervateur inférieur retourner de la gauche vers la droite de CK. Donc il doit y avoir une rétrogradation entre les deux ſtations en AB & GS, lorſque ces lignes ſont inclinées l'une à l'autre. Or 2°. il eſt néceſſaire que cela ſoit. Car ſi les lignes ou rayons viſuels AB, GS étoient paralleles entr'eux, ils ſeroient auſſi paralleles à CK qui diviſe les arcs AB, GS chacun en deux parties égales : mais puiſque OP & MN ſont parcourus en même-tems, il faut que PK & NX ſoient auſſi parcourus en même-tems, puiſque les obſervateurs arrivent ſur CK l'un & l'autre au même inſtant ; il faudroit donc que la parallele PN diviſât les arcs OK, MX compris entre les paralleles MO, CK dans la raiſon des viteſſes, c'eſt-à-dire, dans la même raiſon : or il eſt certain que la raiſon de MN à OP eſt plus grande que la raiſon de NX à PK, en ſuppoſant que les lignes MO, NP, CK ſont paralleles, à cauſe que l'arc NM étant plus oblique à l'égard des paralleles MO, NP, que n'eſt l'arc NX, à légard des paralleles NP, CK, doit occuper une plus grande étendue à proportion que l'arc NX. Il ne doit donc pas arriver que les rayons viſuels AB, GS ſoient paralleles. Entre les deux ſtations il y a donc une rétrogradation.

85. On peut déterminer de la même maniere les lieux des

autres ſtations & rétrogradations. Sur quoi il faut remarquer qu'après la ſeconde ſtation en G, S, il ne peut y en avoir une troiſiéme, que lorſque le mobile A aura achevé un tour, & qu'il ſera retourné vers X, G. Si on veut avoir le lieu de la troiſiéme ſtation, & déterminer par conſéquent l'endroit de la ſeconde rétrogradation, les viteſſes angulaires étant encore nommées M, N, il faut conſidérer que les deux obſervateurs partent, ſçavoir l'inférieur de E, & le ſupérieur de S. Cela poſé, il faut faire la proportion M—N eſt à M comme l'arc ELDS eſt à un quatriéme terme qui déterminera l'eſpace parcouru par le mobile inférieur depuis le départ de G ou E juſqu'à ce qu'il attrappe l'obſervateur ſupérieur ; c'eſt-à-dire, juſqu'à ce qu'il ſe trouve ſur le même rayon que lui. Car puiſque l'obſervateur inférieur précede le ſupérieur, il faut qu'il faſſe le tour ELDS avant que de l'attraper ; donc ELDS eſt l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective M—N ; par conſéquent le quatriéme terme de la proportion, eſt l'eſpace parcouru par la viteſſe propre de l'obſervateur inférieur juſqu'au lieu de leur rencontre. Si après avoir déterminé la ſituation du rayon ſur lequel les obſervateurs ſe trouvent en même-tems, on prend de part & d'autre des arcs égaux aux arcs AX, BK ; on déterminera les lieux des deux ſtations & la ſituation de l'arc de rétrogradation. Il eſt évident que pendant tout ce tems les mobiles ſeront *directs*, c'eſt-à-dire, que l'un verra l'autre aller dans le ſens qu'il va réellement ; car il eſt aiſé de voir que depuis que les mobiles ſont arrivez en G, S & qu'ils continuent de tourner, les rayons viſuels ſont tous dirigez vers des points qui ſont tous dans le même ordre & dans le même ſens que les mobiles vont.

Cela ſe prouve encore, parce que la rétrogradation ne peut avoir lieu qu'après que les obſervateurs ſe ſeront trouvez une ſeconde fois dans une ſituation ſemblable à celle qu'ils avoient en AB, & qui eſt la même que celle qu'on vient de déterminer.

86. Il eſt enfin aiſé d'appercevoir que les mobiles ſont plus long-tems directs que rétrogrades, & plus long-tems rétrogrades que ſtationnaires. Puiſque l'arc décrit pendant que les mobiles ſon directs, eſt plus grand que l'arc ELDS, que d'ailleurs l'arc ELDS eſt plus grand que l'arc de rétrogradation BS, il s'enſuit que les obſervateurs ſont plus long-tems directs que rétrogrades. Ils ſont auſſi plus long-tems rétrogrades que ſtationnaires ; car les petits arcs qu'ils décrivent à chaque inſtant pendant la ſtation doivent être compris entre des rayons viſuels pa-

rallèles ; ils doivent auſſi être dans la raiſon des viteſſes : or des paralleles ne peuvent couper ſur deux cercles concentriques, des portions d'arcs qui ſoient dans la même raiſon, ce n'eſt que ſenſiblement, au cas qu'ils ſoient très petits, & encore dans une certaine ſituation.

Avant de finir la matiere des mouvemens relatifs, on va propoſer deux Problêmes qui ſe préſentent naturellement, & qui ſont du ſujet que l'on traite.

PROBLÊME I.

87. Une horloge à deux aiguilles, l'une qui marque les heures & l'autre les minutes : celle des minutes va 12 fois plus vîte que celle des heures. Trouver les endroits du cadran où l'aiguille des minutes rencontrera celle des heures.

La marche des aiguilles eſt réglée de maniere qu'à quelque endroit du cadran qu'on les ſuppoſe, elles ſe rencontrent à midi point de 12 heures. On peut donc ſuppoſer qu'elles partent enſemble de ce point. Cela poſé puiſque l'aiguille des minutes va 12 fois plus vîte que celle des heures elle aura fait le tour du cadran dans le tems que celle des heures ſera allée du point de 12 heures à celui d'une heure, ainſi le point de rencontre ſera néceſſairement entre les points d'une heure & de deux heures. Puiſque la viteſſe de l'aiguille des heures eſt 12 fois moindre que celle des minutes, ſi l'on exprime cette derniere viteſſe par 1 celle de l'aiguille des heures ſera $\frac{1}{12}$, & ſi on la retranche de 1 ou de $\frac{12}{12}$ pour avoir la différence des viteſſes, l'on aura $\frac{11}{12}$ pour cette différence. La diſtance qui eſt entre les deux aiguilles lorſque celle des minutes eſt au point de midi, & celles des heures au point d'une heure, étant d'une heure, l'on aura (50) la viteſſe reſpective qui eſt la différence des viteſſes, eſt à la viteſſe de l'aiguille des minutes, comme l'intervalle qui eſt entre les deux aiguilles lorſqu'elles ſont l'une au point de midi, & l'autre au point d'une heure, eſt à un quatriéme terme qui exprimera l'eſpace que l'aiguille des minutes parcourt pour attraper l'aiguille des heures. En nombres $\frac{11}{12} \cdot 1 :: 1\text{h} \cdot X = \frac{1 \times 1 \times 12}{11} = \frac{12}{11}\text{h}$, c'eſt-à-dire, que l'aiguille des minutes attrapera l'aiguille des heures, lorſqu'elle ſe ſera éloignée du point de midi, de $\frac{12}{11}$ d'heure ou de $1 + \frac{1}{11}$ d'heure. Ce qui eſt d'ailleurs évident, car l'aiguille des minutes va 12 fois plus vîte que celle des heures. Or $\frac{12}{11}$ eſt douze fois plus grand que $\frac{1}{11}$, lequel onziéme l'aiguille des heu-

res fait tandis que l'aiguille des minutes fait les $\frac{12}{11}$ de l'arc compris entre le point de midi & celui d'une heure.

Si on ſuppoſe que chaque tour de l'aiguille des minutes commence à l'endroit où elle a attrapé celle des heures, l'on aura tous les autres points de rencontre. Ainſi de même qu'après le premier tour elle a rencontré l'aiguille des heures à une heure un onziéme, après le ſecond tour elle la rencontrera à deux heures deux onziémes, après le troiſiéme tour elle l'attrapera à 3 heures $\frac{3}{11}$ enſuite à 4 heures $\frac{4}{11}$. 5 heures $\frac{5}{11}$. 6 heures $\frac{6}{11}$. 7 heures $\frac{7}{11}$. 8 heures $\frac{8}{11}$. 9 heures $\frac{9}{11}$. 10 heures $\frac{10}{11}$. 11 heures $\frac{11}{11}$ ou point de midi. des 12 points qui marquent les heures ſur le cadran, celui de midi eſt le ſeul où les deux aiguilles ſe rencontrent.

PROBLÊME II.

88. Deux voyageurs marchent dans un même chemin, & vont d'un même côté, le premier à une lieüe d'avance & va dix fois plus lentement que celui qui le ſuit. On demande à quel endroit de la route celui qui va devant ſera attrapé par celui qui va après.

La plus grande viteſſe étant 1 ou $\frac{10}{10}$, & la moindre $\frac{1}{10}$ leur différence ſera $\frac{9}{10}$. L'on aura donc $\frac{9}{10}$. 1 :: 1 lieüe. X. $= \frac{1 \times 1 \times 10}{9}$ $= \frac{10}{9}$ lieüe ; c'eſt-à-dire, que le dernier voyageur fera $1 + \frac{1}{9}$ de lieüe pour attraper le premier. Car comme il va dix fois plus vîte, il doit faire en même-tems dix fois plus de chemin. Or $\frac{10}{9}$ eſt dix fois plus grand que $\frac{1}{9}$ que le premier voyageur parcourt tandis que le ſecond fait les $\frac{10}{9}$.

Ce Problême eſt célebre dans l'antiquité ſous le nom d'Achille & de la Tortue. Achille n'attrapera jamais la Tortue, diſoit Zenon. Car tandis qu'Achille fera la premiere lieüe, la Tortue fera la dixiéme de la ſeconde lieüe ; & tandis qu'Achille fera la dixiéme de la ſeconde lieüe, la Tortue fera la dixiéme de cette dixiéme, & ainſi à l'infini.

On vient de voir néanmoins qu'Achille doit rencontrer la tortue au moment qu'elle aura fait $\frac{1}{9}$ de lieüe. Le raiſonnement de Zenon péche en ce qu'il ſuppoſe que l'eſpace qu'Achille doit parcourir pour attraper la tortue eſt infini, car puiſqu'Achille marche d'une viteſſe finie & déterminée, ſi ſuivant Zenon, il n'avoit qu'un eſpace fini à parcourir pour attraper la Tortue, il l'attraperoit après un tems fini quel qu'il ſoit (ce qui eſt évident) ; mais puiſque ſuivant le raiſonnement de Zenon, Achille ne

doit

doit jamais attraper la Tortue, il faut qu'il ſuppoſe un eſpace infini. Or on vient de voir que cet eſpace eſt très-fini. Donc le ſophiſme de Zenon conſiſte en ce qu'il le ſupppoſe infini.

Zenon avoit raiſon de dire que tant qu'Achille & la Tortue parcourroient de dixiémes de dixiémes de la ſeconde lieüe, l'un n'attraperoit jamais l'autre; mais comme ces dixiémes de dixiémes ſont un eſpace fort court, quoiqu'infinis en nombre de parties, il s'enſuit qu'il y a un inſtant auquel ils ſeront tous parcourus; & c'eſt à cet inſtant qu'Achille attrappera la Tortue.

De la quantité de mouvement.

89. Dans un même corps la viteſſe & la quantité de mouvement ſont la même choſe, ou plutôt la quantité de mouvement eſt proportionnelle à la viteſſe; mais lorſqu'on compare les mouvemens de deux corps, on eſt obligé de diſtinguer entre la viteſſe & la quantité de mouvement. Suppoſons que deux bales, l'une de plomb & l'autre de liege de même groſſeur, ſoient mues avec la même viteſſe, on apperçoit aiſément qu'il y a plus de mouvement dans la bale de plomb que dans celle de liege, quoique les viteſſes ſoient les mêmes, & qu'il faut plus de mouvement pour mouvoir une groſſe maſſe que pour en mouvoir une moindre lorſqu'on leur donne la même viteſſe.

90. Si l'on a deux corps de même matiere dont l'un ſoit ſix fois plus grand que l'autre, & qu'ils ſoient mus avec des viteſſes égales, le corps ſextuple aura ſix fois plus de mouvement. Car que l'on conçoive la maſſe ſextuple diviſée en ſix parties égales, chacune ſera égale au moindre corps, & ſera mue avec la même viteſſe; donc chaque ſixiéme partie aura autant de mouvement que le petit corps. Donc les ſix parties enſemble auront ſix fois plus de mouvement que le petit corps.

91. D'où il ſuit que ſi deux corps inégaux en maſſes ſont mus avec des viteſſes égales, leurs quantitez de mouvement ſont dans la raiſon des maſſes.

92. *La maſſe* d'un corps eſt la quantité de matiere qu'il contient. *Le volume* eſt la grandeur du corps en tant qu'il eſt long, large & profond.

93. Si deux corps ont des maſſes égales & des viteſſes inégales, leurs quantitez de mouvement ſont comme les viteſſes. Il ſuffit de faire attention à l'idée que l'on a du mouvement, pour concevoir que ſi deux bales égales en tout ſont pouſſées avec des viteſſes inégales, que l'une reçoive par exemple une viteſſe triple

de l'autre, elle aura à raiſon de la viteſſe triple, une quantité de mouvement triple.

PROPOSITION SECONDE.

94. *Si deux corps* A, B *ſont mus d'un mouvement uniforme, leurs quantitez de mouvement ſont en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes.* On ſuppoſe que toutes les parties des corps ſont mues en ligne droite ſans rouler ou tourner.

$F : f :: MV : mv$

donc

$[Fmv = fMV]$

mais $V = \frac{E}{T}$, $v = \frac{e}{t}$

donc

$[FmeT = fMEt]$

DEMONSTRATION. Suppoſons que le corps A ait une viteſſe triple; & une maſſe quadruple de celles du corps B, le produit de la viteſſe triple & de la maſſe quadruple eſt 12 & le produit de la petite maſſe & de la moindre viteſſe eſt 1 × 1 ou 1. Il faut faire voir que les quantitez de mouvement des corps A, B ſont comme 12 & 1 qui ſont en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes (4. *Arit.*). Concevons que le corps A eſt diviſé en quatre parties égales entr'elles, & par conſéquent égales au corps B, elles auront donc chacune à raiſon de leur viteſſe triple une quantité de mouvement triple de celle du corps B (93); mais puiſque le corps A eſt quadruple de chaque partie, pour avoir la quantité entiere de ſon mouvement, il faut quadrupler celle d'une des parties (91), c'eſt-à-dire, qu'il faut multiplier par 4 une quantité déja triple: ce qui donne une quantité de mouvement douze fois plus grande que n'eſt celle du corps B. Donc les quantitez de mouvement des corps A & B ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes, ou en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes.

$Si\ F = f$

$V : v :: m : M$

95. COROLLAIRES. 1°. Si les quantitez de mouvement des mobiles A, B ſont égales, les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les maſſes. Car pour lors les produits des maſſes & des viteſſes ſont égaux (94). Donc la viteſſe du mobile A eſt à la viteſſe du mobile B comme la maſſe du mobile B eſt à la maſſe du mobile A (11. *Arit.*): c'eſt-à-dire, que les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les maſſes.

et Si

$V : v :: m : M$

$F = f$

96. 2°. Si les viteſſes ſont dans la raiſon réciproque des maſſes, c'eſt-à-dire, ſi la viteſſe du corps A eſt à celle du corps B, comme la maſſe du corps B eſt à la maſſe du corps A, les quantitez de mouvement ſont égales; car la quantité de mouvement du corps A eſt le produit de ſa maſſe & de ſa viteſſe qui ſont les extrêmes de la proportion; & la quantité de mouvement du corps B eſt auſſi le produit de ſa maſſe & de ſa viteſſe qui ſont les moyens de la proportion (94): or dans une proportion géométrique le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens (12. *Arit.*); donc les

quantitez de mouvement des corps A & B ſont égales. C'eſt l'inverſe de la précédente.

97. 3°. Si les quantitez de mouvement ſont comme les viteſſes, les maſſes ſont égales ; & ſi elles ſont comme les maſſes, ce ſont les viteſſes qui ſont égales. Car pour lors les produits des maſſes & des viteſſes ſont entr'eux ou comme les viteſſes ou comme les maſſes ; donc puiſqu'en multipliant les viteſſes par les maſſes ou les maſſes par les viteſſes, le rapport ne change point, il faut que les maſſes ſoient égales ou bien les viteſſes (8. *Arit.*).

Si $F : f :: V : v$
$M = m$
Si $F : f :: M : m$
$V = v$

98. 4°. Si les tems des mouvemens ſont égaux, les quantitez de mouvement ſont comme les produits des maſſes & des eſpaces parcourus. Car lorſque les tems ſont égaux les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus (4) ; c'eſt donc la même choſe de multiplier les maſſes par les eſpaces parcourus, ou de les multiplier par les viteſſes ; or ſuivant la propoſition (94), les mouvemens ſont comme les produits des maſſes & des viteſſes ; donc ils ſont auſſi entr'eux comme les produits des maſſes & des eſpaces parcourus.

Si $T = t$
$F : f :: ME : me$

99. 5°. Si les eſpaces parcourus par deux mobiles ſont égaux, les quantitez de mouvement ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes, & de la raiſon réciproque des tems.

Car les quantitez de mouvement de deux mobiles A & B ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes, ou en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes (94) ; or lorſque les eſpaces parcourus ſont égaux, comme on le ſuppoſe ici, les viteſſes ſont en raiſon réciproque des tems (10) ; donc dans la raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes, on peut mettre la raiſon inverſe des tems (14. *Arit.*) ; donc au lieu de multiplier les maſſes par les viteſſes, on peut les multiplier par les tems, pourvu qu'on change l'ordre qu'ils ont, & qu'on multiplie la maſſe du corps A par le tems du corps B, & la maſſe du corps B par le tems du corps A ; cela étant les produits qui viendront ſeront entr'eux comme les produits des maſſes & des viteſſes ; donc les quantitez de mouvement qui ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes (94) ſont auſſi entr'elles comme les produits des maſſes & des tems pris en raiſon inverſe. Donc elles ſont en raiſon compoſé, &c. (4. *Arit.*)

100. Lorſqu'une grandeur eſt produite de deux autres, l'on a trois choſes, ſçavoir, le produit & les deux produiſans ; or ſi l'on connoît deux de ces trois choſes, la troiſiéme peut être connue.

Le mouvement d'un corps eſt le produit de la maſſe & de la viteſſe (94) : l'on a donc trois choſes, le mouvement, la maſſe, & la viteſſe. Deux des trois étant connues, on peut trouver la troiſiéme. 1°. Si la maſſe & la viteſſe ſont données, on aura la quantité de mouvement en multipliant la maſſe par la viteſſe (94). 2°. Si la quantité de mouvement eſt connue avec la maſſe, on aura la viteſſe en diviſant le mouvement par la maſſe (7. *Arit.*). 3°. L'on aura la maſſe en diviſant la quantité de mouvement par la viteſſe (7. *Arit.*).

101. REMARQUE. Les propoſitions que l'on vient d'expoſer ſur la viteſſe & la quantité de mouvement fourniſſent des *formules* ou expreſſions abregées, avec leſquelles on peut démontrer non-ſeulement tout ce qui a été dit du rapport des viteſſes & des quantitez de mouvement, lorſqu'il eſt uniforme, mais encore pluſieurs autres propoſitions qu'on peut former ſur le même ſujet.

On nommera (M) la maſſe du corps A, (V) ſa viteſſe, (T) le tems ou la durée du mouvement, (E) l'eſpace qu'il parcourt, (F) ſa quantité de mouvement. On nommera auſſi (*m*) la maſſe du corps B, (*v*) ſa viteſſe, (*t*) le tems ou la durée du mouvement, (*e*) l'eſpace qu'il parcourt, (*f*) ſa quantité de mouvement.

L'on aura $V . v :: \frac{E}{T} . \frac{e}{t}$ (6.), donc $\frac{Ve}{t} = \frac{vE}{T}$ (12. *Arit.*), & après avoir ôté les fractions, $VeT = vEt$ (13. *Arit.*) qui eſt une premiere formule. On aura encore $F . f :: MV . mv$ (94), donc $Fmv = fMV$ qui eſt une ſeconde formule. Si au lieu des viteſſes $V . v$, l'on ſe ſert de Et, eT qui ſont dans la même raiſon (11), l'on aura une troiſiéme formule $FmeT = fMEt$.

On va appliquer ces formules à quelques propoſitions, afin d'en faire voir l'uſage.

1°. Si les tems des mouvemens ſont entr'eux comme les viteſſes, les eſpaces parcourus ſont comme les quarrez des viteſſes.

Car l'hypotheſe donne $T . t :: V . v$. la premiere formule donne $T . t :: vE . Ve$ (11. *Arit.*) : donc $V . v :: vE . Ve$ (14. *Arit.*); donc $V^2e = v^2E$ (12. *Arit.*) ; donc $E . e :: V^2 . v^2$ (11. *Arit.*). On peut encore démontrer cela en cette maniere.

Suppoſons que le tems du mouvement du corps A ſoit triple de celui du corps B, donc ſelon l'hypotheſe, la viteſſe du corps A ſera triple de celle du corps B ; or un mobile qui eſt mu avec une viteſſe triple, dans le même-tems doit parcourir un eſpace triple (4) ; mais ſi le tems au lieu d'être égal eſt auſſi triple, il faudra tripler l'eſpace qui eſt déja triple : ainſi l'eſpace parcouru ſera 9

fois plus grand, c'eſt-à-dire, que les eſpaces ſont entr'eux comme 9 & 1 quarrez des viteſſes.

2°. Si les viteſſes ſont comme les maſſes, les quantitez de mouvement ſont comme les quarrez des viteſſes.

La ſeconde formule donne $F.f :: MV.mv$ (11. *Arit.*). L'hypotheſe donne $V.v :: M.m$; ſi au lieu des maſſes on met dans la premiere proportion les viteſſes $V.v$. (14. *Arit.*) qui ſont dans la raiſon des maſſes, l'on aura $F.f :: V^2.v^2$.

3°. Si les tems ſont comme les eſpaces parcourus, les quantitez de mouvement ſont comme les maſſes, car par l'hypotheſe $T.t :: E.e$, donc $Te = tE$ (12. *Arit.*). Si on diviſe les deux termes de la troiſiéme formule $FTme = ftME$ par Te & tE, les quotiens ſeront $Fm = fM$ (15. *Arit.*), donc $F.f :: M.m$. (11. *Arit.*)

On peut encore démontrer la propoſition en cette maniere : les tems ſont entr'eux comme les eſpaces parcourus, donc en tems égaux les eſpaces parcourus ſont égaux. Or lorſque les eſpaces & les tems ſont égaux, les viteſſes ſont auſſi égales ; mais lorſque les viteſſes ſont égales, les quantitez de mouvement ſont comme les maſſes : donc ſi les tems ſont comme les eſpaces, les quantitez de mouvement ſont comme les maſſes.

On pourroit appliquer les formules à un plus grand nombre de propoſitions ſuivant les hypotheſes différentes que l'on feroit, mais les propoſitions précédentes ſuffiſent pour en montrer l'uſage.

CHAPITRE SECOND.

Des forces qui meuvent les corps.

102. Dans le Chapitre précedent on a conſideré le mouvement comme produit & comme exiſtant dans les corps qui ſont mus ; dans celui-ci on le conſiderera comme étant l'effet d'une cauſe. On ſçait qu'un corps qui eſt en repos y demeure, ſi une cauſe ne le met en mouvement. C'eſt des cauſes du mouvement qu'on ſe propoſe de traiter ici. On n'examinera point leur nature ni le lieu où elles réſident ; mais on s'appliquera principalement à éxaminer leurs effets, à connoître leur caractere & la loi ſuivant laquelle elles agiſſent.

103. On nomme *cauſe* du mouvement tout ce qui le produit ou qui concourt à ſa production, quelle que ſoit ſa maniere d'agir.

104. *Puiſſance* eſt tout ce qui peut mouvoir un corps. Tout corps en mouvement eſt une puiſſance, parce qu'il peut mouvoir les corps qu'il rencontre. Le mot de *cauſe* a une ſignification plus générale que le mot de puiſſance.

105. *La force* d'une puiſſance eſt l'action qu'elle exerce ou l'effort qu'elle fait pour mouvoir, on la prend fort ſouvent pour la puiſſance même.

106. Le mouvement peut être produit par une ſeule puiſſance, & on peut l'appeller mouvement *ſimple* : ou pluſieurs puiſſances concourent à ſa production, & il eſt appellé *compoſé* : le mouvement compoſé ſe fait en ligne droite ou en ligne courbe.

On va dabord parler du mouvement produit par une ſeule puiſſance, enſuite du mouvement compoſé ſuivant la ligne droite, enfin du mouvement compoſé en ligne courbe.

Du mouvement produit par une ſeule puiſſance.

107. Un corps, ſuivant l'idée qu'on en a, eſt également ſuſceptible de repos & de mouvement, & l'expérience montre qu'il eſt indifferent pour l'un & l'autre de ces états ; s'il eſt en repos, il y demeure juſqu'à ce qu'une cauſe ou puiſſance l'en retire : s'il eſt en mouvement, il s'y conſerve juſqu'à ce qu'un obſtacle inſurmontable l'arrête & détruiſe ſa viteſſe. Ainſi lorſqu'on tire un canon, le boulet iroit toujours en ligne droite ; mais l'air qu'il fend lui ôte d'un côté une partie de ſa viteſſe, & de l'autre la péſanteur l'abbaiſſe continuellement & l'approche de la terre, tant quenfin il la touche, & conſume par ſa rencontre ce qui lui reſte de mouvement.

108. Une puiſſance qui s'applique à un corps, produit le mouvement par une ſeule impulſion, un ſeul effort ; ou bien elle renouvelle ſon action, & pourſuit le corps pendant un tems fini. Dans le premier cas le mouvement eſt uniforme dans ſa durée, ſuppoſé qu'il ne ſe trouve point d'obſtacle : & la puiſſance eſt appellée *ſimplement motrice* ou *force inſtantanée*. Dans le ſecond cas le mouvement eſt acceleré, & la puiſſance eſt appellée force *accélératrice*.

Une force n'eſt accélératrice que parce qu'elle agit pendant pluſieurs inſtans ; mais ſi on la conſidere dans un ſeul inſtant, elle ſera force ſimplement motrice pour cet inſtant. Les forces dont on parlera dans la ſuite ſont forces ſimplement motrices ou inſtantanées, à moins qu'on n'avertiſſe du contraire ; car l'on regardera comme telles les forces accélératrices, en les conſidérant

ſeulement agiſſantes dans des inſtans particuliers & pris ſéparément, & non pas dans la totalité des inſtans ; car ce ſont les efforts particuliers qui font connoître le vrai caractere d'une force, & les effets qu'elle peut produire.

109. Une force ſimplement motrice n'eſt ni *variable* ni *conſtante*, puiſqu'elle n'agit qu'un inſtant. Mais la force accélératrice qui agit pendant pluſieurs inſtans, peut être ou *conſtante*, ou *variable* ; *conſtante*, ſi ſon action eſt égale pendant des inſtans égaux ; *variable*, ſi ſes efforts augmentent ou diminuent.

110. Une force conſtante produit pendant des inſtans égaux, des degrez égaux de viteſſe. La force variable communique pendant des inſtans égaux des degrez inégaux des viteſſes : or quelle que ſoit la loi qui regle l'action de la puiſſance, les degrez de viteſſe ſont proportionnels à ſes efforts ; un effort double communique au corps une viteſſe double, un effort triple eſt ſuivi d'une viteſſe triple. Suivant l'axiome univerſellement reçu, *Les effets ſont proportionnels aux cauſes qui les produiſent.*

Lorſqu'on dit que les degrez de viteſſes ſont proportionnels aux forces qui les produiſent, on ſuppoſe que la force agit pleinement ſur le corps, c'eſt-à-dire, qu'elle s'y applique de maniere que toutes les parties ſoient déterminées à aller ſuivant la même direction, & que l'action de la puiſſance n'eſt ni arrêtée ni modifiée par quoi que ce ſoit. Cela étant, puiſque le corps ne s'oppoſe point au mouvement, il doit recevoir des degrez de viteſſe proportionnels aux forces motrices.

111. Un corps qui a reçu d'une force une certaine viteſſe, eſt lui-même une puiſſance qui par ſon mouvement peut agir ſur les autres corps & les mouvoir, ainſi qu'on a remarqué (104).

Outre les deux ſortes de forces ou puiſſances conſtantes & variables, on parle encore de *forces vives* & de *forces mortes*.

112. Voici la notion qu'en donne M. Bernouilli dans un diſcours ſur les loix de la communication du mouvement Chap. 3. *La* force vive *eſt celle qui réſide dans un corps lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme.*

113. *La* force morte *eſt celle que reçoit un corps ſans mouvement lorſqu'il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir, ou à ſe mouvoir plus ou moins vîte lorſque ce corps eſt déja en mouvement.*

Ces définitions ſeront éclaircies par les paroles mêmes de l'Auteur, lorſque dans la remarque qu'on fera à la fin de cet article, on rapportera au long ce que M. Bernouilli dit de la force vive & de la force morte au Chap. 5e de ſon diſcours.

114. Un corps en repos cede à la moindre force, à moins qu'il ne ſoit empêché, & la viteſſe qu'il reçoit eſt proportionnelle à la force qui le preſſe. Dans un corps qui eſt en repos, il n'y a rien par quoi il réſiſte à l'action qui le preſſe ou le ſollicite, c'eſt-à-dire, rien qui rende inutile cette action & en empêche l'effet, c'eſt pourquoi le corps doit obéir, & aller vers l'endroit où la force le porte: or on a remarqué plus haut (110), que la viteſſe qu'il reçoit eſt proportionnelle à la force qui le pouſſe; qu'une force double ou triple lui donne une viteſſe double ou triple.

115. D'où il ſuit que ſi deux forces meuvent des corps égaux avec des viteſſes inégales, elles ſont entr'elles comme les viteſſes.

116. Si deux corps de maſſes inégales ſont mus avec des viteſſes égales, les forces motrices ſont entr'elles comme les maſſes.

Suppoſons que la grande maſſe eſt triple de la petite, & qu'elle eſt diviſée en trois parties égales entr'elles & à la petite maſſe, elles ſeront mues ſéparément avec une viteſſe égale à celle de la grande maſſe dont elles ſont les parties, & par conſéquent égale à celle de la petite maſſe; donc la force motrice de chacune d'elles eſt égale à celle de la petite maſſe, donc ſi les trois parties demeurent unies, & qu'elles conſervent la même viteſſe, il faudra leur appliquer une force motrice triple de chaque force particuliere, & par conſéquent triple de celle qui meut la petite maſſe. Donc les forces qui meuvent des corps de maſſes inégales avec des viteſſes égales, ſont entr'elles comme les maſſes.

PROPOSITION TROISIE'ME.

117. *Si des forces meuvent des corps de maſſes inégales avec des viteſſes inégales, elles ſont en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes, ou comme le produits des maſſes & des viteſſes* (4. *Arit.*).

DEMONSTRATION. Suppoſons que le corps A a une viteſſe triple & une maſſe quadruple de celles du corps B; je dis que la force qui eſt appliquée au corps A eſt à celle du corps B, comme 12 produit de la maſſe & de la viteſſe du corps A eſt à 1 produit de la maſſe & de la viteſſe du corps B.

Il faut concevoir que le corps A eſt partagé en quatre parties égales entr'elles & au corps B, elles auront une viteſſe triple de celle du corps B; donc la force motrice de chacune ſera triple de celle qui meut le corps B; ainſi le rapport de cette force à celle du corps B eſt égal à celui de 3 à 1 (115); mais ſi la maſſe de cette quatriéme partie devient quadruple de la maſſe du corps B, la viteſſe demeurant la même, la force qui lui ſera appliquée

appliquée ſera quatre fois plus grande que ſi cette maſſe étoit reſtée égale à la maſſe du corps B (116) ; donc le rapport de cette force à celle du corps B ſera quatre fois plus grand qu'il n'eût été, c'eſt-à-dire, quatre fois plus grand que le rapport de 3 à 1, (puiſque l'antécedent devient quatre fois plus grand, le conſéquent demeurant le même (19. *Arit.*) : il eſt évident que cette force devenue quadruple ne differe pas de celle du corps A, puiſque c'eſt même maſſe & même viteſſe de part & d'autre ; donc le rapport de la force du corps A à celle du corps B eſt quatre fois plus grand que celui de 3 à 1 qui eſt celui des viteſſes : or ſi on multiplie la viteſſe 3 du corps A par ſa maſſe 4 & la viteſſe 1 du corps B par ſa maſſe 1, le rapport des produits ſera quatre fois plus grand que celui de 3 à 1 (20. *Arit.*) & par conſéquent égal au rapport de la force du corps A à celle de corps B. Donc ce rapport eſt compoſé de celui des maſſes & de celui des viteſſes (4. *Arit.*), ou égal à celui de 12 à 1 qui ſont les produits des maſſes & des viteſſes.

118. Les forces motrices de deux corps ſont entr'elles comme les quantitez de mouvement qu'elles produiſent. Car ces quantitez ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes (94). Or les forces motrices ſont auſſi entr'elles comme ces produits (117). Donc, &c.

119. Si les quantitez de mouvement ſont égales, les forces motrices ſont égales.

120. Si les viteſſes ſont en raiſon réciproque des maſſes, les forces ſont encore égales, car pour lors les quantitez de mouvement ſont égales (96).

Les Corollaires que l'on a déduits en parlant du rapport des quantitez de mouvement, conviennent aux forces motrices des corps ; il n'eſt donc pas néceſſaire de les répeter ici.

121. Si un corps eſt mu par une force accélératrice conſtante, il reçoit à chaque inſtant des degrez égaux de viteſſe, car la force n'eſt conſtante que parce qu'à chaque inſtant elle fait des efforts égaux ſur le mobile : les degrez de viteſſe qu'il en reçoit doivent donc être égaux.

122. Si un corps eſt mu par une force accélératrice conſtante, le nombre des degrez de viteſſe qu'il acquiert, eſt égal au nombre des inſtans qui s'écoulent pendant le tems de l'accélération.

Car le mobile reçoit à tous les inſtans des degrez de viteſſe qui ſont égaux entr'eux ; d'ailleurs il les conſerve tous, (on ſuppoſe ici qu'il ne les perd pas par la rencontre de quelque obſtacle) ;

donc le nombre des degrez de viteſſe eſt égal au nombre des inſtans qui s'écoulent pendant l'accélération.

Si l'on aſſemble par la penſée les inſtans à meſure qu'ils s'écoulent, leurs ſommes ſeront dans la progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. donc les degrez de la viteſſe acquiſe, qui ſont en même nombre, ſont auſſi dans la même progreſſion. Ainſi après le premier inſtant le mobile aura un degré de viteſſe : après deux inſtans il aura deux degrez de viteſſe : après trois inſtans il aura trois degrez de viteſſe, &c. D'où l'on voit que la viteſſe d'un mobile qui eſt mu par une force accélératrice conſtante augmente dans la même raiſon que le tems s'écoule.

123. Si la force accélératrice eſt infiniment petite, la viteſſe qu'elle donne au premier inſtant eſt auſſi infiniment petite : c'eſt pourquoi elle peut être conſiderée comme nulle par rapport à la viteſſe acquiſe après un tems fini.

124. Si l'on ſuppoſe que les cotez AB, BC de l'angle droit d'un triangle rectangle repréſentent l'un, ſçavoir AB le tems, & l'autre BC la viteſſe acquiſe après le tems AB, & que par quelque point D du côté AB l'on mene une parallele DE à la baſe BC, elle repréſentera la viteſſe acquiſe après le tems AD. Fig. 16.

Les baſes BC, DE, ſont dans la même raiſon que les côtez AB, AD (8. *Géom.*), c'eſt-à-dire, dans la même raiſon que les tems exprimez par AB, AD : or les viteſſes acquiſes ſont dans la même raiſon que les tems (121), donc elles ſont auſſi dans la raiſon de BC à DE : mais par l'hypotheſe BC exprime la viteſſe acquiſe après le tems AB ; donc DE exprime la viteſſe acquiſe après le tems AD.

125. Si l'on conçoit le côté AB diviſé en une infinité de parties égales, ou en autant qu'il y a d'inſtans dans le tems AB, que par les points de diviſion l'on imagine des lignes telles que DE paralleles à la baſe, l'on aura toutes les differentes viteſſes que le mobile aura eu dans la totalité des inſtans du mouvement acceleré.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

126. *L'eſpace qu'une force accélératrice conſtante & infiniment petite fait parcourir à un corps, eſt exprimée par le triangle* ABC.

DEMONSTRATION. Le tems AB étant diviſé en parties infiniment petites ou en inſtans, le degré de viteſſe que la force imprime au mobile dans chaque inſtant, eſt infiniment petit

(123) ; donc les viteſſes avec leſquelles le corps eſt mu dans chaque inſtant de la durée de l'accélération ne ſe ſurpaſſent priſes de ſuite que d'une partie infiniment petite ; donc les paralleles telles que BC, DE qui répréſentent ces viteſſes (124), ne ſe ſurpaſſent auſſi priſes de ſuite que d'une partie infiniment petite ; elles ſont donc infiniment proches les unes des autres & rempliſſent éxactement l'aire du triangle ; donc l'aire du triangle répréſente toutes les differentes viteſſes avec leſquelles le corps a été mu dans chaque inſtant de la durée de l'accélération : de plus les parties du tems étant égales, les viteſſes de tous les inſtans ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus (4), donc ſi l'eſpace parcouru dans un inſtant, par exemple, ſi l'eſpace parcouru dans l'inſtant B eſt répréſenté par BC qui répréſente auſſi la viteſſe de cet inſtant, les eſpaces parcourus aux autres inſtans ſeront répréſentez par les paralleles correſpondantes qui répréſentent les viteſſes de ces inſtans : or la viteſſe BC peut répréſenter l'eſpace qu'elle fait parcourir dans l'inſtant B. Donc les autres viteſſes telles que DE répréſenteront les eſpaces parcourus dans les inſtans correſpondans tels que D. Donc l'aire du triangle, &c. Fig. 16.

Remarque. La parallele BC étant la plus grande de toutes, répréſente tous les degrez de viteſſe que le mobile a reçu pendant l'accélération ; mais elle ne répréſente pas leur durée, ou toutes les différentes viteſſes que le corps a eu dans la totalité des inſtans, car les degrez de viteſſe une fois imprimez demeurent, & le corps les conſerve aux inſtans ſuivans ; or lorſqu'il s'agit de déterminer l'eſpace parcouru, il ne ſuffit pas de faire attention à la viteſſe (3), il faut avoir encore égard à la durée du mouvement. Dans le mouvement uniforme pour avoir la durée de la viteſſe ou la viteſſe du mobile éxiſtante dans la totalité des inſtans, il faut multiplier cette viteſſe par le tems du mouvement. Ainſi ſi la viteſſe uniforme eſt répréſentée par BC, & que la durée du mouvement ſoit répréſentée par AB, le produit de BC par AB (1. *Géom.*), c'eſt-à-dire, le rectangle BF répréſentera la durée de la viteſſe, ou la viteſſe dans la totalité des inſtans, ce qui eſt évident ; car par là on poſe la parallele BC qui répréſente la viteſſe autant de fois qu'il y a de points dans AB ; c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il y a d'inſtans dans le tems du mouvement : mais dans le mouvement variable, les viteſſes de tous les inſtans ſont inégales, un ſeul rectangle ne peut donc pas répréſenter la durée de cette viteſſe, on peut néanmoins la répréſenter par autant de rectangles qu'il y a d'inſtans dans la durée du mouve-

ment, & la ſomme de ces rectangles répréſentera la durée de la viteſſe croiſſante ou décroiſſante. Dans l'hypotheſe préſente les viteſſes du mobile ſont en progreſſion arithmétique (122); donc les rectangles qui répréſentent leur durée ſont auſſi en progreſſion arithmétique : d'ailleurs les paralleles telles que BE, BC peuvent être conſiderées comme autant de rectangles qui ont pour hauteur une partie infiniment petite de la hauteur AB qui répréſente le tems ; & ces paralleles priſes de ſuite ſont en progreſſion arithmétique (25. *Géom.*); leur ſomme répréſentera donc la durée de la viteſſe croiſſante du mobile. Donc le triangle ABC qui eſt égal à la ſomme des petits rectangles, répréſente la durée de la viteſſe croiſſante du mobile, & par conſéquent l'eſpace parcouru, car l'eſpace répond toujours éxactement à la viteſſe & lui eſt proportionnel (4) ; d'où l'on voit que la parallele BC qui répréſente ſeulement les degrez de viteſſe acquiſe ne pouvant pas répréſenter leur durée, ne peut pas non plus répréſenter l'eſpace parcouru durant l'accélération.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

127. *Deux forces accélératrices conſtantes ſont entr'elles comme les viteſſes qu'elles produiſent en même-tems dans deux mobiles égaux.*

DEMONSTRATION. Car puiſque les mobiles ſont égaux, les forces ſont entr'elles comme les viteſſes inſtantanées qu'elles leur communiquent (110. 115.) : or les viteſſes acquiſes en tems égaux, ſont dans la même raiſon que les viteſſes inſtantanées ; car les viteſſes que les forces produiſent pendant tous les inſtans de l'accélération, ſont dans la même raiſon que les viteſſes du premier inſtant (110) ; donc leurs ſommes, c'eſt-à-dire, les viteſſes acquiſes par les mobiles en tems égaux, ſont dans la même raiſon que les viteſſes du premier inſtant (16. *Arit.*). Donc les forces qui les ont produites ſont auſſi dans la raiſon des viteſſes, qu'elles produiſent en même-tems dans deux mobiles égaux.

128. *Les mêmes forces ſont encore entr'elles comme les eſpaces que les mobiles parcourent en tems égaux.*

Les eſpaces que les mobiles parcourent ſont répréſentez par deux triangles rectangles dont les côtez de l'angle droit répréſentent, ſçavoir les hauteurs, les tems, & les baſes les viteſſes acquiſes (126). Or par l'hypotheſe les tems ſont égaux, donc les hauteurs ſont égales ; donc les triangles, c'eſt-à-dire, les eſpaces parcourus ſont dans la raiſon des baſes ou des viteſſes ac-

quiſes. Donc les forces accélératrices qui ſont comme les viteſſes acquiſes (127), ſont dans la raiſon des eſpaces parcourus en même-tems.

PROPOSITION SIXIE'ME.

129. *Deux forces accélératrices conſtantes ou variables qui pendant le tems de l'accélération, ſont dans le rapport conſtant des maſſes, & qui font parcourir des eſpaces égaux, les font parcourir en même-tems.*

Demonstration. *Premier cas*, lorſque ces forces ſont conſtantes. Puiſque les forces dont il s'agit ſont conſtantes, elles produiſent l'une & l'autre la même quantité de mouvement à chaque inſtant (110); donc ces forces ſont entr'elles comme les quantitez de mouvement inſtantanées qu'elles produiſent (118). Si l'on nomme (F) la premiere force, (*f*) la ſeconde, (MV) la quantité de mouvement produite par la premiere, (*mv*) la quantité de mouvement produite par la ſeconde, l'on aura F . *f* :: MV . *mv*; mais par l'hypotheſe les forces ſont auſſi entr'elles comme les maſſes M . & *m*: donc (14. *Arit.*) M . *m* :: MV . *mv*. Donc ſi on diviſe les deux antécedens par M, & les deux conſéquens par *m*, on aura (17. *Arit.*) 1 . 1 :: V . *v*, c'eſt-à-dire, que les forces communiquent à chaque inſtant des viteſſes égales; or par l'hypotheſe les eſpaces parcourus ſont égaux; donc les tems des mouvemens ſont égaux, c'eſt-à-dire, que ces eſpaces égaux ſont parcourus en même-tems avec des viteſſes égales de part & d'autre.

Second cas, lorſque les forces ſont variables. Quoiqu'elles ſoient variables, elles ſont néanmoins dans le rapport conſtant des maſſes; par conſéquent les quantitez de mouvement inſtantanées qu'elles produiſent ſont toutes entr'elles dans le rapport conſtant des maſſes. D'où l'on conclura que les viteſſes inſtantanées qu'elles produiſent ſont dans le rapport conſtant de 1 à 1, par conſéquent la viteſſe que la force F communique à la maſſe M, eſt égale à la viteſſe que la force *f* communique au même inſtant à la maſſe *m*; d'où l'on conclura comme dans le cas précedent que les eſpaces égaux ſont, &c.

130. Et réciproquement ſi les tems des mouvemens ſont égaux, les eſpaces parcourus ſont égaux; car les forces étant toujours dans le rapport conſtant des maſſes, communiqueront à chaque inſtant des viteſſes égales (97), les tems des mouvemens ſont ſuppoſez égaux. Donc les mobiles avec des viteſſes égales parcourront des eſpaces égaux en des tems égaux.

PROPOSITION SEPTIE'ME.

Fig. 17. 131. *Si le corps* A *eſt pouſſé de* A *vers* C *par une force accélératrice, de maniere que les viteſſes qu'il a aux différens points* D, I *de* AC *ſoient entr'elles comme les ordonnées* DO, IN, *du quart de cercle* AG *qui a pour rayon* AC; *je dis que ſi le corps eſt mu uniformément avec la viteſſe qu'il a acquiſe au point* C, *ſur le quart de cercle* AG, *il le parcourra en même-tems que* AC.

DEMONSTRATION. Il faut mener les ordonnées DO, IN infiniment proches l'une de l'autre (elles ſont perpendiculaires au rayon AC) & mener OM perpendiculaire ſur IN, le petit arc ON peut être pris pour une ligne droite: ce qui donne les deux triangles ſemblables OMN, DOC, en voici la preuve: les angles D & M ſont droits, l'angle DCO a pour meſure l'arc AO (17. *Géom.*), & l'angle ONM, l'arc AN ou AO (18. *Géom.*), car ces deux arcs ne different que de l'arc infiniment petit ON, d'ailleurs ON eſt une partie de la tangente tirée du point N; donc les deux triangles ſont ſemblables (15. *Géom.*). Lorſque le corps A eſt arrivé au point C, ſa viteſſe par l'hypotheſe eſt exprimée par le rayon CG, donc la viteſſe qu'il aura à tous les points du quart de cercle ſera exprimée par le rayon. Lorſque le corps A eſt au point D, ſa viteſſe eſt exprimée par DO. Cela poſé les triangles ſemblables ONM, DOC donnent (8. *Géom.*) ON. OM ou DI :: OC. OD, c'eſt-à-dire que les eſpaces ON & DI ſont dans la raiſon des viteſſes exprimées par OC & OD lorſque le mobile eſt aux points O & D. Donc ces eſpaces ſeront parcourus en même-tems (4). On démontrera de la même maniere que tout autre petit arc HL ſera parcouru en même-tems que la partie EF correſpondante. Donc l'arc entier AG ſera parcouru en même-tems que le rayon AC du quart de cercle.

132. COROLLAIRES. Il ſuit de-là 1°. que ſi de quelque point de AC tel que D, on mene DO perpendiculaire à AC, qui rencontre le quart de cercle au point O, que la viteſſe du corps A ſur AC, ſoit exprimée depuis A juſqu'à D par les ordonnances telles que DO, & que ſa viteſſe ſur l'arc AG ſoit exprimée par le rayon AC ou CG, le tems par AO ſera égal au tems par AD.

133. 2°. *Les efforts que la force accélératrice fait ſur le mobile* A, *aux différens points de* AC *ſont entr'eux comme les diſtances où le mobile eſt du point* C: *ainſi l'effort de la force lorſque le mobile eſt au point* D, *eſt à l'effort lorſqu'il eſt en* E, *comme* DC *eſt à* EC.

DEMONSTRATION. Après avoir mené DO, EH, perpendiculaires à AC, il faut prendre les arcs égaux ON, HL, & mener NI, LF, paralleles à DO, EH, & par les points O, H abbaiſſer OM, HP perpendiculaires à NI, LF. Cela fait l'on aura quatre triangles qui deux à deux ſont ſemblables, OMN ſemblable à DOC & HPL ſemblable à EHC, comme il vient d'être prouvé dans la propoſition ; donc (8. *Géom.*) $\begin{cases} MN . ON :: DC . OC. \\ HL . PL :: CH . EC. \end{cases}$

Si l'on multiplie par ordre les termes des deux proportions, que l'on diviſe les deux premiers produits par HL & ON qui ſont des grandeurs égales, & les deux derniers par les rayons CH, CO, l'on aura MN . PL :: DC . EC (21. 8. *Arit.*) : or MN & PL étant les différences des viteſſes que le mobile a lorſqu'il eſt aux points D, I, & aux points E, F, il s'enſuit qu'il acquiert la viteſſe MN, dans l'inſtant qu'il parcourt DI ; & qu'il acquiert la viteſſe PL en parcourant le petit eſpace EF ; mais les efforts que fait la force accélératrice pendant les deux inſtans que le mobile parcourt DI, EF ſont comme les viteſſes inſtantanées qu'elle lui donne (110. 115). Car les inſtans ou tems infiniment petits par DI, EF, ſont égaux, puiſqu'ils ſont égaux aux tems par les arcs ON, HL. Donc ces mêmes efforts ſont auſſi entr'eux comme les diſtances DC, EC où il acquiert ces viteſſes.

134. 3°. La raiſon pour laquelle les forces qui pouſſent le corps A aux differens points de AC, ſont entr'elles comme les diſtances où ce mobile eſt du point C, c'eſt parce que les viteſſes qu'il a aux différens points de AC, ſont entr'elles comme les ordonnées du quart de cercle AG ; auquel cas avec la viteſſe acquiſe au point C le mobile parcourroit uniformément le quart de cercle AG, dans le tems qu'il arrive de A en C par un mouvement accéleré. Donc réciproquement ſi les forces qui pouſſent le mobile A lorſqu'il eſt aux différens points de AC, ſont comme les diſtances où il eſt du point C, il aura à ces diſtances des viteſſes qui ſeront entr'elles comme les ordonnées qui correſpondent à ces points ; & par la viteſſe qu'il aura acquiſe en C, il parcourroit uniformément le quart de cercle AG dans le même-tems qu'il va de A en C par un mouvement accéléré.

135. 4°. *Si les mobiles* A, B *ſont mus ſur* AC *vers* C, *de* Fig. 11. *maniere que les forces qui pouſſent chaque mobile, ſoient entr'elles comme les diſtances où ils ſont du point* C, *ils arriveront en même-tems à ce point.*

Lorſque les mobiles ſeront variez arrivez en C ils auront par le nombre (134), des viteſſes qui ſont exprimées par les ordonnées CG, CK, ou comme les arcs AG, BK (13. *Géom.*) ; donc avec ces viteſſes ces arcs ſeroient parcourus en des tems égaux (4) ; mais le tems par AG eſt égal au tems par AC (131), & le tems par BK égal au tems par BC ; donc les tems par AC & BC ſont égaux ; donc les mobiles arriveront en même-tems au point C.

136. 5°. *Le tems que le mobile* A *emploie à parcourir* AC *uniformément avec la viteſſe acquiſe en* C, *eſt au tems qu'il emploie à parcourir la même* AC *avec la viteſſe croiſſante, comme le rayon* AC *eſt au quart de la circonférence.*

DEMONSTRATION. Le tems par AC avec une viteſſe accélérée eſt égal au tems par l'arc AG parcouru uniformément avec la viteſſe acquiſe par AC (130) ; quant au tems c'eſt donc la même choſe que le mobile parcoure AC d'une viteſſe accélerée, ou qu'il parcoure le quart de la circonférence dont AC eſt le rayon avec la viteſſe toute acquiſe au point C. On ſuppoſe que le rayon AC eſt auſſi parcouru avec la même viteſſe acquiſe au point C ; donc AC & le quart de circonférence AG ſont des eſpaces parcourus uniformément avec la même viteſſe ; donc les tems ſont comme ces eſpaces (12) ; donc le tems par AC eſt au tems par AG comme AC eſt à AG : ſi au lieu du tems par AG on prend le tems par le rayon AC parcouru par une viteſſe accélérée, on aura la proportion, le tems par le rayon AC parcouru uniformément avec la viteſſe toute acquiſe au point C, eſt au tems par AC parcouru d'une viteſſe accélérée, comme AC eſt au quart de circonférence AG.

Remarque ſur les forces vives & les forces mortes.

On a vû que M. Jean Bernouilli Profeſſeur des Mathématiques à Baſle &c. dans un diſcours ſur les loix de la communication du mouvement Chap. III. définit ainſi la force vive & la force morte.

La *force vive* eſt celle *qui réſide dans un corps lorſqu'il eſt dans un mouvement uniforme* ; & la *force morte* celle que *reçois un corps ſans mouvement lorſqu'il eſt ſollicité & preſſé de ſe mouvoir ou à ſe mouvoir plus ou moins vîte lorſque ce corps eſt déja en mouvement.*

Au Chap. V. il explique plus en détail ce qu'il entend par force vive & force morte. *Je parle*, dit-il, *de cette force des corps que M. de Leibnits appelloit* force vive, *pour la diſtinguer d'une autre force à qui il avoit donné le nom de* force morte.... *Nous avons vû*

au

au Chap. III. que la force morte conſiſtoit dans un ſimple effort, & cet effort eſt tel qu'il peut ſubſiſter quoiqu'un obſtacle étranger l'empêche à tout moment de produire un mouvement local dans les corps ſur leſquels cet effort ſe déploie. Telle eſt, par exemple, la force de la peſanteur. Un corps peſant ſoutenu par une table horizontale fait un effort continuel pour deſcendre ; & il deſcendroit effectivement, ſi la table ne lui oppoſoit un obſtacle qui le retient ; ainſi la peſanteur produit une force morte dans les corps dont l'effet n'eſt que momentané. Chaque inſtant la peſanteur imprime aux corps ſur qui elle agit, un degré de viteſſe infiniment petit, lequel eſt auſſitôt abſorbé par la réſiſtance de l'obſtacle. Ces petits degrez de viteſſe périſſent en naiſſant & renaiſſent en périſſant, & c'eſt dans cette réciprocation conſtante, dans ce retour de production & de deſtruction, en quoi conſiſte l'effort de la peſanteur quand elle eſt retenue par un obſtacle invincible à qui nous avons donné le nom de force morte. Quant à l'obſtacle, il reçoit de cette preſſion, lorſqu'il réſiſte à l'effort de la peſanteur, une force toujours égale & réciproque à celle avec laquelle cette même peſanteur agit ſur lui ; la force morte a cela de particulier qu'elle ne produit aucun effet qui dure plus long-tems qu'elle : dès que cette force ceſſe, tout ceſſe avec elle, & ſon effet ne ſurvit jamais à ſon action. Si le corps peſant ſoutenu par une table perdoit tout à coup ſa peſanteur, la table ceſſeroit dans le même inſtant d'être preſſée.

Il n'en eſt pas de même de la force vive, *ſa nature eſt toute différente, elle ne peut ni naître ni périr en un inſtant comme la force morte, il faut plus ou moins de tems pour produire une force vive dans un corps qui n'en avoit pas, il faut auſſi du tems pour la détruire dans un corps qui en a. La force vive ſe produit ſucceſſivement dans un corps lorſque ce corps, étant en repos, une preſſion quelconque appliquée à ce corps, lui imprime peu à peu & par degrez un mouvement local. On ſuppoſe qu'aucun obſtacle ne l'empêche de ſe mouvoir. Ce mouvement s'acquiert par des degrez infiniment petits & monte à une viteſſe finie & déterminée qui demeure uniforme dès que la cauſe qui a mis ce corps en mouvement ceſſe d'agir ſur lui ; ainſi la force vive produite dans un corps en un tems fini par une preſſion qu'aucun obſtacle n'a retenue, eſt quelque choſe de réel, elle eſt équivalente à cette partie de la cauſe qui s'eſt conſumée en la produiſant, puiſque toute cauſe efficiente doit être égale à ſon effet pleinement executé.*

Le corps qui reçoit cette force n'étant retenu par aucun obſtacle, n'oppoſe de réſiſtance à cette force que celle qui dépend de ſon

inertie toujours proportionnelle à ſa maſſe ; de ſorte que les petits degrez de mouvement que la preſſion imprime ſucceſſivement à ce corps, s'y conſervent & s'accumulent juſqu'à produire enfin un mouvement local. On pourroit comparer la force vive effectuée par une preſſion continuelle qu'aucun obſtacle n'empêche à une ſurface décrite par le mouvement d'une ligne, ou à un ſolide décrit par le mouvement d'une ſurface ; il n'y a donc pas plus de comparaiſon à faire entre la ſimple preſſion ou la force morte, & la force vive qu'entre une ligne & une ſurface ; qu'entre une ſurface & un ſolide ; ce ſont des quantitez hétérogenes qui n'admettent point de comparaiſon.

Quelleque ſoit la cauſe d'une preſſion qui par la durée de ſon action produit enfin du mouvement, ſi elle eſt d'une quantité déterminée telle qu'un reſſort bandé, par exemple, qui par ſa détente emploie ſa force à produire une viteſſe actuelle dans un corps qui n'en avoit point auparavant ; je dis, & la choſe eſt évidente, qu'à meſure que ce corps reçois de nouveaux degrez de force, la cauſe qui les produit en doit perdre tout autant juſqu'à ce que toute la force du reſſort ſoit épuiſée & transferée au corps dans lequel elle eſt comme ramaſſée par l'accumulation de tous les petits degrez qui y ont été produits ſucceſſivement. C'eſt cette force entant qu'elle eſt dans le corps mis en mouvement par l'épuiſement de la preſſion du reſſort qu'on doit appeller proprement force vive en vertu de laquelle le corps ſe tranſporte d'un lieu en un autre avec une certaine viteſſe plus ou moins grande ſelon l'énergie du reſſort.

On a rapporté au long l'explication que M. Bernoulli donne de la force vive & de la force morte, afin qu'on puiſſe entrer plus facilement dans ſa penſée, & pour donner plus de jour aux réflexions qu'on va faire ſur ces deux ſortes de forces.

On voit 1°. que ſelon M. Bernouilli la force morte conſiſte dans une ſimple preſſion ſans mouvement, car le mouvement une fois communiqué demeure, quoique la preſſion ou la force externe ceſſe de s'appliquer au corps ; au lieu que *l'effet de la force morte ne ſurvit jamais à ſon action, tout ceſſe dès que cette force ceſſe.* 2°. La force vive d'un corps eſt celle qu'il reçoit en recevant le mouvement. Un reſſort par ſa détente pouſſe un corps, ſa force s'épuiſe à meſure qu'il ſe débande, & elle eſt *transferée au corps dans lequel elle eſt comme ramaſſée par l'accumulation de tous les petits degrez qui y ont été produits ſucceſſivement, c'eſt cette force entant qu'elle eſt dans le corps mis en mouvement par l'épuiſe-*

ment de la preſſion du reſſort, qu'on doit appeller proprement force vive. Or cette force ſuivant M. Bernouilli n'eſt pas proportionnelle au mouvement que le corps a reçu, c'eſt-à-dire, au produit de ſa maſſe & de ſa viteſſe, mais proportionnelle au produit de la maſſe & du quarré de la viteſſe. C'eſt la force morte qui eſt proportionnelle à la quantité de mouvement ou au produit de la maſſe & de la viteſſe *virtuelle*, c'eſt-à-dire, de la viteſſe que le corps reçoit dans un tems infiniment petit. Sur quoi on remarquera que M. Bernouilli conſidere cette force en elle-même, & entant qu'elle eſt reçue & qu'elle réſide dans un corps mis en mouvement.

M. Camus de l'Académie Royale des Sciences qui a traité le même ſujet dans un Mémoire 1728, trouve que les obſtacles que des corps en mouvement peuvent ſurmonter, ſont toujours comme les produits de leurs maſſes & des quarrez de leurs viteſſes; mais ces mêmes forces conſiderées de toute autre maniere ne ſont pas toujours & généralement comme les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes; car ſi un corps en mouvement agit contre une réſiſtance invincible, ſa force eſt ſeulement proportionnelle au produit de la maſſe & de la viteſſe, ou à ſa quantité de mouvement; en quoi il eſt d'accord avec M. Volfius qui détermine la force du choc contre un obſtacle invincible par le produit de la maſſe & de la viteſſe, c'eſt-à-dire, par la quantité de mouvement qu'il regarde comme équivalente à une force morte. M. Camus conclut donc qu'il n'y a que les forces des corps en mouvement conſidérées entant qu'elles peuvent ſurmonter des obſtacles qui puiſſent être appellées forces vives (ſuppoſant que les forces vives ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes). D'où l'on voit que les auteurs, ceux mêmes qui ſoutiennent que les forces vives ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes, ne conviennent point de l'idée qu'il en faut avoir.

Voici quelques réflexions qui pourront contribuer à fixer les idées ſur l'eſtimation des forces des corps en mouvement, & ſur la maniere de les comparer.

Réflexions ſur les forces des corps en mouvement, & ſur la maniere de les comparer.

137. 1°. Une force qui eſt appliquée à un corps, qui y eſt reçue, produit le mouvement, ſi elle n'eſt point empêchée; mais elle ne produit qu'une ſimple preſſion ſans mouvement, ſi elle

eſt retenue par un obſtacle. 2°. Si elle produit le mouvement, ou c'eſt par un effort unique & dans un inſtant qu'on conſidere comme indiviſible, ou elle le produit ſucceſſivement & à differentes repriſes. 3°. Lorſqu'un corps a été une fois mis en mouvement, il le conſerve, & la force qu'il a reçue lui demeure appliquée (au moins ſelon notre maniere de concevoir,) & on peut conſidérer cette force comme préſente à chaque inſtant de la durée du mouvement & comme renouvellant ſon effort pour conſerver la viteſſe qu'elle a communiqué au corps. 4°. Lorſqu'un corps a été une fois mis en mouvement, qu'il a reçu toute ſa viteſſe & que ſa force ne reçoit plus d'accroiſſement, en un mot qu'il eſt dans un mouvement uniforme, on peut conſidérer cette force dans cet état comme ſi elle avoit été produite en un inſtant & par un ſeul effort, quoiqu'il puiſſe ſe faire qu'elle ait été produite ſucceſſivement; car la force actuelle du corps n'en ſera ni plus ni moins grande, la viteſſe étant ſuppoſée la-même. 5°. Les forces inſtantanées dont on a parlé juſqu'ici, ſont proportionnelles aux produits des maſſes qu'elles meuvent, & des viteſſes qu'elles leur communiquent; car au moment qu'une force s'applique à un corps, qu'elle lui imprime une certaine viteſſe, & avant qu'il y ait aucun eſpace parcouru, l'eſprit n'apperçoit dans ce corps qu'une maſſe qui commence à être mue avec une certaine viteſſe; c'eſt à quoi ſe réduit tout l'effet de la force motrice; le mouvement qu'elle produit, eſt donc la meſure exacte de cette force, & on apperçoit que ſi le mouvement augmente ou diminue, il faut que la force motrice augmente ou diminue dans la même raiſon, pour produire un plus grand ou un moindre mouvement. Les forces inſtantanées ſont donc entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes. 6°. Si on conſidere la force motrice en tant que préſente aux differens inſtans de la durée du mouvement, & comme renouvellant à chaque inſtant la viteſſe du mobile, il eſt viſible que la force inſtantanée multipliée par le tems ou la durée du mouvement, exprimera la ſomme des efforts que l'on conçoit que cette force a fais pour la conſervation du mouvement: pour avoir donc le rapport de la ſomme des efforts d'une force, à la ſomme des efforts d'une autre force, il faudra multiplier leurs efforts inſtantanés ou les produits des maſſes & des viteſſes qui leur ſont proportionnels par les tems des mouvemens; or le rapport de ces produits n'eſt pas le même que le rapport des produits des maſſes & des quarrez des viteſſes: d'ailleurs lorſqu'on demande quel eſt le

rapport de deux forces, on ne demande point quelle eſt leur durée ou quelle eſt la ſomme des efforts de l'une & de l'autre force ; mais on demande le rapport de leurs efforts inſtantanés, ou le rapport des efforts produits en même-tems ; car pour déterminer ce rapport, *il faut néceſſairement ſuppoſer égaux ou les tems ou les eſpaces, &c.* comme M. de Mairan fait remarquer dans un Mémoire année 1728, ſur l'eſtimation & la meſure des forces motrices des corps. On voit donc que les forces des corps en mouvement entant qu'elles réſident dans ces corps, ne ſont point entr'elles comme les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes, ſoit qu'on les conſidere comme inſtantanées ou comme préſentes à tous les inſtans du mouvement, & que leur vrai rapport eſt le même que celui qui eſt entre les produits des maſſes & des viteſſes. On dira peut-être qu'il n'y a point de force ſimplement motrice, c'eſt-à-dire, qui produiſe le mouvement en un inſtant & par un ſeul effort ; qu'un corps n'acquiert la viteſſe qu'il a, que par ſucceſſion de tems, & que la naiſſance ou la production de ſa force n'eſt pas l'effet d'un inſtant ; qu'ainſi il n'y a point de force ſimplement motrice.

138. On peut répondre 1°. qu'entre les forces qui peuvent s'appliquer à un corps, il y en a qui n'agiſſent d'abord que par la ſeule preſſion ou impulſion ſans mouvement, tel eſt l'effort d'un reſſort lorſqu'il commence à ſe débander, la peſanteur agit à peu près de même. Il faut convenir que ces ſortes de forces n'arrivent à un degré fini & aſſignable, que par des progrez inſenſibles, & ne produiſent un mouvement d'une meſure déterminée qu'à pluſieurs repriſes : mais il eſt certain d'un autre côté que l'action de ces forces n'eſt pas la ſeule tendence au mouvement, mais un vrai mouvement ; car quelque petite que ſoit la viteſſe qui répond à chaque effort particulier, elle n'en eſt pas moins réelle, puiſqu'elle eſt l'élément d'une viteſſe éxiſtente & déterminable. Ces forces peuvent donc être conſidérées comme forces inſtantanées & ſimplement motrices pour chaque degré particulier de viteſſe qu'elles impriment de nouveau au mobile.

139. 2°. Il y a des forces dont toute l'action conſiſte dans le mouvement ; telle eſt la force d'un corps qui en choque un autre. Or ſi l'on ſuppoſe que le choc eſt entre des corps durs ſans reſſort, il n'y a pas de doute que la communication du mouvement ſe fait dans un inſtant, comme on verra dans la ſuite. Il eſt vrai qu'il n'eſt pas certain qu'il y ait des corps parfaitement durs, mais il n'eſt pas non plus démontré qu'il n'y en a pas ;

de grands Phyſiciens prétendent au contraire que les élémens des corps, c'eſt-à-dire, les parties de premiere compoſition ſont d'une dureté abſolue. On peut donc ſuppoſer qu'il y a des forces qui produiſent un vrai mouvement par un effort unique. D'où il ſuit qu'elles ſont ſimplement motrices & par conſéquent entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes.

140. La diſtinction que les auteurs célébres dont on vient de parler, mettent entre les forces vives & les forces mortes, eſt très-bien fondée. Autre eſt l'action d'un corps qui preſſe par ſa ſeule peſanteur, & autre la force du même corps lorſqu'étant mu il choque avec une viteſſe déterminée ; ces deux efforts ne peuvent pas être comparez entr'eux, parcequ'ils ſont de differente eſpece : la ſimple preſſion ſans mouvement n'eſt pas de même eſpece que lorſqu'elle eſt jointe au mouvement, ce ſont deux quantitez *incomparables*, quoiqu'elles puiſſent avoir des effets entiérement égaux ou ſemblables. M. de la Hire dans ſon Traité de Mécanique *pag.* 292, dit que ce ſeroit la même choſe que ſi on vouloit comparer une ligne à une ſuperficie qu'on auroit formée en faiſant mouvoir cette ligne par un eſpace ; on vient de voir que M. Bernouilli a remarqué la même choſe. Lors donc qu'on compare les forces des corps, il faut qu'elles ſoient de même eſpece, il faut comparer entr'elles les forces qui conſiſtent dans une ſimple preſſion, dans un ſimple effort ſans mouvement ; & entr'elles les forces des corps en mouvement : les forces mortes celles dont l'action conſiſte dans une ſimple preſſion, ſeront entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes qu'elles tendent à communiquer, (ces viteſſes peuvent être appellées *virtuelles*). Et les forces des corps en mouvement comme les produits des maſſes & des viteſſes réelles ou actuelles des mêmes corps auxquels elles ſont appliquées. En ſuivant cette regle, on pourra eſtimer les forces vives ſans les confondre avec les forces mortes. On entend encore parler des forces inſtantanées & conſiderées dans le mouvement uniforme. Il faut voir maintenant ſi les forces des corps dans les mouvemens accélerez & retardez, peuvent être eſtimées par les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes.

141. Dans le mouvement accéleré la viteſſe du mobile eſt accélerée à chaque inſtant, & les eſpaces parcourus aux inſtans ſuivans ſont d'autant plus grands que la viteſſe s'eſt accrue. Dans le mouvement retardé, c'eſt le contraire.

142. Dans le mouvement uniformément accéleré l'eſpace parcouru eſt repréſenté par un triangle rectangle dont la hauteur ré-

préſente le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe après ce tems. Si l'on ſuppoſe que deux corps A, B de maſſes égales, ſont mus par deux forces accélératrices conſtantes & égales, elles imprimeront aux mobiles des viteſſes qui ſont comme les tems, c'eſt-à-dire, des viteſſes égales en tems égaux; mais la viteſſe ſera triple quadruple, ſi le tems de l'une eſt triple ou quadruple du tems de l'autre (121). Suppoſons que l'une d'elles ait agi pendant un tems triple, l'eſpace que le mobile aura parcouru, eſt exprimé par un triangle rectangle dont la hauteur & la baſe ſont triples de la hauteur & de la baſe du triangle qui exprime l'eſpace parcouru par l'autre mobile qui n'a reçu qu'un degré de viteſſe; ces deux triangles rectangles ont deux côtez proportionnels; & l'angle compris égal, ils ſont donc ſemblables (26. *Géom.*), & par conſéquent entr'eux comme les quarrez des baſes (19. *Géom.*), c'eſt-à-dire, comme les quarrez des viteſſes qui ſont répréſentées par les baſes. Donc les eſpaces parcourus dans le mouvement uniformément accéleré par des forces conſtantes & égales, ſont entr'eux comme les quarrez des viteſſes; mais les forces des mobiles, les forces qu'ils ont acquiſes dans l'accélération, ſont entr'elles comme les eſpaces qu'elles ont fait parcourir; donc elles ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes. Voilà un des raiſonnemens que l'on fait en faveur des forces vives, pour prouver qu'elles ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des quarrez des viteſſes, ou en ſuppoſant que les maſſes ſont égales comme les quarrez des viteſſes. En voici un autre qui roule ſur les mêmes principes.

143. On fera voir dans la ſuite que ſi les mobiles A, B ſont mus contre leur premiere direction avec les viteſſes qu'ils y ont acquiſes, en ſorte que les forces qui les avoient d'abord accélérez, réagiſſent à préſent ſur eux, & travaillent avec autant d'effort à les retarder, qu'elles avoient agi en premier lieu pour les avancer & les accélérer; on fera voir, dis-je, que les mobiles perdront leurs viteſſes dans un tems égal à celui de l'accélération, & que leurs viteſſes finiſſant, ils auront retracé les mêmes eſpaces qu'ils avoient parcouru dans l'accélération. Voilà donc deux forces qui ont combatu contre deux autres forces, & qui en ſurmontant leurs réſiſtances, ont fait parcourir aux mobiles A, B des eſpaces qui ſont comme, l'on vient de voir, dans la raiſon des quarrez des viteſſes qu'ils ont perdues, & qui ſont les mêmes que celles qu'ils avoient acquiſes; or il eſt évident que les forces des mobiles ſont entr'elles comme les eſpaces qu'elles ont fait parcourir, & que ces mêmes eſpaces en meſurent la vérita-

ble quantité, puiſque ces forces ſe ſont conſumées en les faiſant parcourir aux mobiles. Donc ces forces ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes.

144. On remarquera 1°. à l'égard des deux raiſonnemens qu'on vient de faire, que quand il ſeroit vrai que les forces des mobiles A, B accélérez ou retardez de la maniere qu'on vient de ſuppoſer, ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes acquiſes & perdues, il ne faudroit pas pour cela conclure en général que dans toute ſorte de mouvemens accélérez & retardez les forces des mobiles, c'eſt-à-dire, leurs forces vives ſont dans la raiſon des quarrez des viteſſes acquiſes & perdues, car la propoſition ne pourroit être vraie tout au plus que lorſque les eſpaces parcourus par les mobiles ſont répréſentez par des figures ſemblables, ce qui n'eſt qu'un cas particulier.

145. 2°. Il eſt aiſé de faire voir que dans les mouvemens même uniformément accélérez ou retardez, les forces que les mobiles y acquierent ou y perdent, ne ſont pas dans la raiſon des quarrez des viteſſes. Suppoſons que les mobiles A, B ſont pouſſez par deux forces conſtantes, mais inégales entr'elles: ſi l'une eſt double de l'autre, dans le même-tems elle communiquera au mobile une viteſſe double, & dans un tems double une viteſſe quadruple; l'eſpace parcouru ſera donc exprimé par un triangle rectangle dont la hauteur ſera double & la baſe quadruple de la hauteur de la baſe d'un autre triangle qui répréſente l'eſpace parcouru par l'autre mobile; or ces triangles ſont entr'eux comme les produits des baſes & des hauteurs, c'eſt-à-dire, comme 8 & 1; donc les eſpaces parcourus ſont auſſi dans cette raiſon; mais les forces acquiſes par les mobiles, ſuivant les raiſonnemens précédens, ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus, c'eſt-à-dire, comme 8 & 1, dont le rapport eſt bien different de celui des quarrez des viteſſes, qui ſont entr'eux comme 16 & 1.

146. Si les mobiles A, B ſont mus en ſens contraires de leurs premieres directions, avec les viteſſes qu'ils y ont acquiſes, & que les forces qui les ont accélerez les retardent, ils perdront leurs viteſſes en des tems égaux à ceux de l'accélération, & leur viteſſe finiſſant ils auront retracé les mêmes eſpaces qu'ils avoient parcouru dans l'accélération, & l'on trouvera encore que les forces que les mobiles ont perdues, ſont entr'elles comme 8 & 1, & non pas comme 16 & 1, qui ſont les quarrez des viteſſes perdues.

147. D'où

147. D'où l'on voit que s'il eſt vrai que les forces vives lorſqu'elles naiſſent peu à peu ou par degrez, & qu'elles périſſent de même en s'éxerçant contre des obſtacles, ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes, ce n'eſt au plus ſuivant les preuves rapportées (*nombres* 142, 143), que dans le cas où les mobiles acquierent des viteſſes égales en tems égaux, où que les obſtacles qu'ils rencontrent leur ôtent pareillement des viteſſes égales en tems égaux, & que de plus on eſtime les forces acquiſes ou perdues par les eſpaces parcourus.

148. 3°. La vraie meſure ou quantité d'une force conſiſte dans les accroiſſemens qu'elle a reçus & qui l'ont formée, ou dans les pertes qu'elle a faites & qui l'ont détruite : or dans le cas des mouvemens uniformément accélerez, la ſomme des accroiſſemens eſt égale à la ſomme des efforts produits par la force conſtante, la ſomme de ces efforts eſt proportionnelle au tems, la viteſſe acquiſe eſt auſſi proportionnelle au tems ; donc la ſomme des efforts, & par conſéquent la force du mobile eſt proportionnelle à la viteſſe acquiſe. Le même raiſonnement a lieu pour les mouvemens retardez.

149. 4°. Lorſqu'on eſtime les forces acquiſes ou détruites des mobiles par le ſeul rapport des eſpaces parcourus ſans avoir égard au tems, on fait néceſſairement pluſieurs emplois d'une même force ; car comme l'eſpace ne détruit pas la force, une même partie de cette force, par exemple, celle qui eſt produite au premier inſtant ou celle qui eſt détruite au dernier, éxiſte dans le mobile pendant tout le tems du mouvement : or il eſt évident que s'il faut meſurer cette partie de la force par l'eſpace qu'elle a fait parcourir, ce ſera la répeter tout autant de fois qu'il y a d'inſtans dans la durée du mouvement ; qu'ainſi cette force partielle ſans être plus grande que celle qui a été produite la derniere ou détruite la premiere, ſera néanmoins eſtimée incomparablement davantage. L'eſpace, quelque grand qu'il ſoit, n'apporte aucun changement à la force, il la laiſſe telle qu'elle réſide dans un corps ; une petite force peut faire parcourir un fort grand eſpace avec le tems, ſi elle ne rencontre aucun obſtacle, & une grande force n'en faire parcourir qu'un fort petit, ſi elle eſt auſſi-tôt détruite ; l'eſpace ſeul ne ſuffit donc pas pour faire une juſte eſtimation des forces, & pour employer la même force pluſieurs fois, il ne s'enſuit pas que l'on en ait une plus grande. Un homme pour compter pluſieurs fois la même ſomme, n'en eſt pas pour cela plus riche. Dans une force qui ſe détruit peu à peu & par degrez

il faut diſtinguer deux parties, celle qui s'oppoſe à l'obſtacle & qui en ſurmonte la réſiſtance, & celle qui fait parcourir l'eſpace: ce ſont les parties de la force que la réſiſtance détruit ſucceſſivement, qui réunies en une ſomme, donnent enfin la force du corps, & non pas celles qui ont fait parcourir l'eſpace, en tant qu'elles l'ont fait parcourir, & dont les unes ont exiſté plus ou moins de tems que les autres, & ont fait parcourir par conſéquent un eſpace plus ou moins grand ſuivant le tems de leur durée. Lorſqu'on veut déterminer le rapport des forces par le rapport des eſpaces parcourus, il faut néceſſairement avoir égard au tems. *Voyez le Mémoire de M. de Mairan ann.* 1728.

150. On fait encore quelques raiſonnemens en faveur des forces vives; les uns ſont tirez des mouvemens accélerez ou retardez par des reſſorts: ce que l'on vient de voir au ſujet du mouvement inégal pourra aider à les éxaminer. Les autres ſont fondez ſur la décompoſition des mouvemens. L'on verra dans l'article ſuivant ce qu'il en faut penſer.

Enfin pour prouver que les forces vives ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes, on a recours à l'expérience.

151. Si deux boules égales de même matiere ſont accélerées par une même force qui ſoit conſtante (on verra dans la ſuite que telle eſt la péſanteur), que l'une des boules parcoure un eſpace quadruple de l'autre, les quarrez des viteſſes acquiſes, ſont dans le rapport des eſpaces parcourus (142): or ſi ces deux boules rencontrent directement avec les viteſſes acquiſes une matiere molle, comme de la cire & de la terre glaiſe, elles s'enfonceront à des profondeurs qui ſont entr'elles comme 4 & 1, c'eſt-à-dire, comme les quarrez des viteſſes; mais les forces que les mobiles employent ſont comme les enfoncemens, il faut une force quadruple à la boule qui s'enfonce quatre fois davantage; donc les forces de ces deux boules ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes.

Voici la réponſe qu'on peut faire. Cette expérience eſt liée avec pluſieurs circonſtances phyſiques qui affoibliſſent conſidérablement la preuve qu'on en veut tirer.

1°. Les forces avec leſquelles les boules s'éxercent contre la matiere molle pour s'y enfoncer, ne ſont pas ſeulement celles qu'elles ont acquiſes dans l'accélération, mais elles ſont encore aidées par leur propre poids: or dans l'eſtimation que l'on fait des forces des boules, on ne tient pas compte de l'effet ou preſſion cauſée par les poids des maſſes, lorſqu'elles commencent à toucher la ſurface de la glaiſe.

2°. On ſçait que pour rompre les liens qui tiennent les parties unies, il faut une certaine viteſſe ou promptitude dans le corps qui choque, ſans quoi le mouvement ſe perd & n'a d'autre effet que d'ébranler les parties du corps choqué ſans les diviſer ; de-là vient que ſi l'on tire deux mouſquets inégalement chargez contre un même mur, la bale qui va plus vîte percera le mur & y fera un trou profond, lorſque celle qui va moins vîte ne fera qu'une légere emprinte. La raiſon en eſt que le mouvement ſe perd en ſe communiquant aux differentes parties du mur avant que celles qui ſont ſous la force du choc ayent été rompues, ce qui n'arrive pas lorſque la viteſſe du corps qui choque eſt aſſez grande pour diviſer les parties auxquelles il s'applique avant que le mouvement ait pû ſe diſtribuer au reſte de la maſſe. D'où il ſuit que les enfoncemens ne ſont pas la juſte meſure des forces, puiſqu'elles ne ſe conſument pas toutes entieres à les faire, & il eſt viſible que c'eſt le corps qui va moins vîte, qui à cauſe de ſa lenteur doit perdre à proportion une plus grande partie de ſa force inutilement.

3°. Les boules rompent non-ſeulement les liens qui uniſſent les parties, mais elles communiquent de leur mouvement à la matiere qu'elles détachent, la rupture des liens ou les enfoncemens ne ſont donc pas la vraie meſure des forces.

DU MOUVEMENT EN LIGNE DROITE compoſé de pluſieurs forces.

152. Le mouvement compoſé eſt produit par pluſieurs forces ou puiſſances qui agiſſent conjointement ou en même-tems ſur un corps. Un homme qui paſſe une riviere à la nâge fournit un exemple du mouvement compoſé : pendant qu'il s'efforce pour arriver à l'autre bord, par le chemin le plus court, l'eau qui le pouſſe continuellement, ne lui permet pas de le ſuivre ; ainſi de la double action du nâgeur & du courant, il réſulte un mouvement compoſé ſuivant une direction moyenne qui eſt entre celle du nâgeur & le fil de l'eau. D'où l'on voit que ſi un corps eſt tiré ou pouſſé à la fois ſuivant deux directions differentes, il eſt néceſſairement mis en mouvement. Mais ſi les directions ſont ſur une même ligne, & que le corps ſoit pouſſé ou tiré en des ſens oppoſez, pour lors il pourra être en repos ou en mouvement : il ſera en repos ſi les forces qu'on ſuppoſe lui être appliquées ſont égales ; il ſera mu ſi l'une d'elles eſt moindre que l'autre.

153. Des puiſſances peuvent s'appliquer à un corps de maniere qu'il tourne en même-tems qu'il ſuit une direction moyenne en-

les autres : mais si deux puissances s'appliquent immédiatement à un globe, & que leurs directions passent par le centre, il sera mu sans qu'il tourne, & toutes les parties du globe traceront des lignes paralleles entr'elles. Ainsi si le corps sphérique K est poussé en même-tems par les puissances M, N suivant les directions CA, CB, il n'ira que par un chemin, & toutes ses parties seront mues parallelement à CD que l'on suppose être la direction du centre C. En voici la raison.

Si le corps n'étoit poussé que par la puissance M, toutes les parties seroient mues parallelement à CA qui seroit le chemin du centre C. Ce qui est évident, puisque rien ne détermine le corps à tourner : de même si le corps n'étoit poussé que par la puissance N, toutes les parties seroient mues parallelement à CB qui seroit la direction du centre ; ainsi ni l'une ni l'autre des puissances M, N, agissant séparément sur le corps K, ne le détermine à tourner : d'ailleurs par la maniere dont elles s'appliquent au corps, leur effort porte directement au centre ; donc le centre suivra une direction CD moyenne entre CA & CB ; donc puisque les autres parties ne sont pas déterminées à tourner par aucune des puissances, il s'ensuit qu'elles seront mues parallelement à CD.

PROPOSITION HUITIE'ME.

Fig. 20. 154. *Supposant encore que le corps* K *ou le centre* C *suit la direction moyenne* CD ; *si de quelque point* D *de cette direction on mene* DA, DB *paralleles aux directions* CA, CB *pour former le parallelogramme* AB ; *je dis que les puissances* M, N, *ou les efforts qu'elles font sur le corps* K, *sont dans la raison des côtez* CA, CB.

DEMONSTRATION. Supposons que dans l'instant que les puissances sont appliquées au corps, il parcoure la partie indéfiniment petite CP ; il faut du point P mener PG, PE paralleles aux côtez CA, CB.

Si la puissance M avoit agi seule tandis que par le concours des deux, le corps est allé de C en P, il seroit allé à quelque point de la direction CA ; donc puisqu'il est arrivé au point P, il faut que la puissance N l'ait éloigné de la direction CA ; mais la puissance N pour déterminer le corps à se trouver en P, a agi parallelement à sa direction CB, c'est-à-dire, que le centre du corps étant en P, la direction de cette puissance étoit EP ; donc elle a agi avec le même effort que si elle avoit fait venir le mobile de E en P, & qu'elle lui eût fait parcourir EP. De même si la puis-

ſance N avoit agi ſeule tandis que le centre du mobile eſt allé de C en P, il ſeroit allé à quelque point de la direction CB: donc puiſqu'il eſt allé en P, il faut que la puiſſance M l'ait éloigné de cette direction; mais pour cet effet la puiſſance M a agi parallelement à CA, en ſorte que le corps étant en P ſa direction étoit GP; donc la puiſſance M a agi avec le même effort que ſi elle avoit fait venir le mobile de G en P, & qu'elle lui eût fait parcourir GP; donc les efforts que les puiſſances M & N ont fait dans l'inſtant que le mobile eſt allé de C en P, ſont exprimez par GP, EP (115. 4.), ou par CE, EP (2. *Géom.*). Or à cauſe des triangles ſemblables CEP, CAD, l'on a CE. EP :: CA. AD ou CB, (8. *Géom.*), c'eſt-à-dire, que les efforts des puiſſances M, N ſont dans la raiſon des côtez du parallelogramme AB formé ſur leurs directions.

155. Corollaire. Puiſque l'effort qui reſulte de l'action conjointe des puiſſances, eſt exprimé par CP (115. 4.), il s'enſuit que cet effort eſt à ceux des puiſſances M & N, comme la diagonale CD eſt aux côtez CA, CB, ce qui eſt encore évident par les triangles ſemblables CPE, CDA (8. *Géom.*). D'où il ſuit que ſi le corps K étoit pouſſé ſéparément par chacune des trois forces exprimées par CP, GP, EP, il parcourroit en des tems égaux les côtez CD, CA, CB, du parallelogramme AB.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

156. *Si les puiſſances* M, N *ſont entr'elles comme les côtez* CA, CB *du parallelogramme* AB *formé ſur leurs directions, elles feront décrire par leur action conjointe au corps* K *la diagonale* CD *dans le tems que chacune lui feroit parcourir le côté qui eſt ſur ſa direction.*

Demonstration. Si on prétend que cela ne doit point arriver, on peut ſuppoſer deux puiſſances differentes de M & N, qui agiſſant à la fois ſur le corps ſuivant les directions CA, CB, lui faſſent décrire la diagonale CD dans le tems que les puiſſances M & N lui feroient parcourir ſéparément les côtez CA, CB, ce qui eſt toujours poſſible; car il ne s'agit que d'augmenter ou de diminuer les forces ſuppoſées autant qu'il eſt néceſſaire pour l'effet que l'on demande; or ces puiſſances feroient parcourir les côtez CA, CB ſéparément dans un tems égal à celui pendant lequel par leur action conjointe, elles font parcourir la diagonale CD (155), c'eſt-à-dire, qu'elles feroient parcourir les côtez CA, CB, dans le même-tems que les puiſſances M & N; Fig. 20.

donc les puiſſances ſuppoſées ne different point des puiſſances M & N ; donc ces dernieres puiſſances doivent faire parcourir la diagonale CD dans le même-tems que les puiſſances ſuppoſées, c'eſt-à-dire, dans le tems qu'elles feroient décrire ſéparément les côtez CA, CB.

157. On peut donner une preuve ſenſible de cette propoſition, & faire voir que ſi le corps K reçoit à la fois deux impulſions ſuivant les côtez d'un parallelogramme, il en décrira la diagonale en même-tems que les impulſions lui en feroient décrire les côtez, ſi chacune avoit lieu ſéparément.

Fig. 21. Il faut concevoir le corps K poſé ſur la régle CB, & que deux puiſſances pouſſent, l'une le corps ſuivant la régle CB, & l'autre la régle CB, & que les impulſions ſont telles que le mobile parcoure la régle, tandis que la régle étant mue parallelement à elle-même, parcourra le côté CA du parallelogramme AB. Il faut faire voir que pendant le mouvement de la régle, le corps K ſera ſur la diagonale CD ſans jamais la quitter. Suppoſons que la régle eſt arrivée au point E du côté CA, elle coupera la diagonale CD au point P, & l'on aura les deux triangles ſemblables CEP, CAD qui donnent CA . AD :: CE . EP (8. *Géom.*). Or CA & AD ſont dans la raiſon des viteſſes ; donc CE, EP ſont auſſi comme les viteſſes ſuppoſées ; donc tandis que la regle aura parcouru CE, le mobile aura parcouru ſur la régle EP, & par conſéquent il ſera ſur la diagonale CD. On démontrera de même que quelque autre partie de CA que la régle décrive, le mobile ſera continuellement ſur la diagonale. Donc l'impulſion de la régle, & celle qui eſt propre au corps K, lui font décrire la diagonale CD dans le tems qu'elles lui feroient décrire ſéparément les côtez CA, CB.

158. Si les forces M & N ſont inſtantanées ou ſimplement motrices, le mobile décrit la diagonale CD d'un mouvement uniforme ; mais il la parcourt d'un mouvement accéléré, ſi ces forces ſont conſtantes ou variables ; & dans ce dernier cas la diagonale CD ſera encore droite ſi pendant la durée du mouvement les forces demeurent dans un rapport conſtant ; car ſi cela eſt leurs efforts inſtantanés, ſeront dans le rapport de GP à EP, & par conſéquent ils pouſſeront le mobile ſur la ligne droite CD. Mais ſi le rapport des forces eſt variable, que l'une augmente, par exemple, tandis que l'autre diminue ou qu'elle demeure la même, le mobile ſuivra encore une route moyenne mais courbée dans toute ſa longueur, car la force qui augmente attirera le mobile de plus en plus & l'approchera de ſa direction, & l'é-

cartant ainſi continuellement de celle qu'il tend à ſuivre, la ligne qu'il décrira deviendra courbe. Cette courbe peut être conçue formée des diagonales d'une infinité de petits parallelogrammes qui ont leurs côtez infiniment petits ſur les directions des puiſſances.

159. Corollaires. 1°. La force qui réſulte de celles qui agiſſent ſuivant les côtez, eſt exprimée par la diagonale CD, car cette force fait parcourir au corps la diagonale dans le tems que les forces M,N feroient parcourir les côtez (156). Donc elle eſt aux forces M,N comme la diagonale eſt aux côtez (115. 4). Donc ſi l'on applique au corps K une force qui ſoit exprimée par la diagonale CD, elle lui communiquera la même viteſſe que les deux puiſſances M, N agiſſant à la fois ſuivant les côtez CA,CB. Fig. 20.

160. 2°. Si ſur la même diagonale CD on conſtruit pluſieurs autres parallelogrammes tels que SO, que ſur les côtez de chacun comme ſur CO, CS, on place une paire de puiſſances qui ayent le même rapport que ces côtez; chaque paire de ces forces étant appliquée au corps K, lui fera décrire la diagonale CD dans le même-tems que les puiſſances M, N. 1°. Chaque paire lui fera décrire la diagonale CD, puiſque les deux forces ſont dans la raiſon des côtez du parallelogramme qui a pour diagonale CD (156). 2°. Puiſque ces forces feroient parcourir au corps K, les côtez qui leur ſont proportionnels, dans le même-tems que les puiſſances M & N lui feroient parcourir les côtez CA, CB, il s'enſuit (156.) que le tems par la diagonale CD, ſera pour chaque paire de forces égal au tems des forces M & N.

161. 3°. D'où l'on voit que toutes ces paires de forces, quoique très-inégales aux puiſſances M, N produiront cependant une même force moyenne, ſçavoir celle qui eſt exprimée par la diagonale CD. Donc ſi le corps K eſt pouſſé ſuivant CD par une ſeule force qui ſoit exprimée par cette ligne, on pourra toujours lui ſubſtituer une paire de forces qui agiſſant à la fois ſur le corps K, lui donneront la même viteſſe que cette force unique. Pour cet effet il faudra décrire à volonté un parallelogramme qui ait pour diagonale la ligne CD, & placer ſur les côtez deux puiſſances qui ſoient dans la raiſon de ces mêmes côtez.

162. 4°. Si l'angle ACB des directions augmente ou diminue, les côtez demeurant les mêmes, la diagonale CD diminuera ou augmentera, c'eſt pourquoi les puiſſances M, N demeurant les mêmes, produiront des forces moyennes toutes inégales entr'elles; ces forces augmenteront, ſi l'angle ACB diminue; car pour

lors la diagonale qui exprime la force moyenne, augmente. Si cet angle vient à ſe fermer tout-à-fait, la diagonale CD ſera égale aux deux côtez CA, CB; donc la force moyenne ſera égale à la ſomme des forces M, N qui la produiſent. Dans tous les autres cas où l'angle ACB a une ouverture déterminée, la force moyenne eſt moindre que la ſomme des forces M, N. Car la diagonale CD eſt moindre que la ſomme des côtez CA, CB. Si l'angle augmente, la diagonale diminuera; c'eſt pourquoi la force moyenne diminuera de même. Si cet angle devient tellement ouvert que les directions CA, CB ſoient ſur une même ligne droite, il n'y aura plus de diagonale, & le corps K étant tiré en ſens contraires, ſera mu avec la différence des forces dans le ſens de la plus grande.

163. 5°. Si la diagonale CD demeure la même, & que l'angle ACB augmente ou diminue, les côtez augmenteront ou diminueront; donc les forces qui pouſſent le corps K ſuivant ces côtez augmenteront ou diminueront dans la même raiſon; autrement le corps ne pourroit décrire la diagonale CD: ſi l'angle ſe ferme entierement la ſomme des forces ſera ſeulement égale à la force moyenne; mais ſi l'angle ACB augmente, la ſomme des forces ſera plus grande que la force moyenne, & d'autant plus grande que l'angle ACB augmentant, les côtez AC, CB deviendront plus grands. Si l'angle ACB devient infiniment grand, c'eſt-à-dire, qu'il ne differe de deux angles droits que d'un angle infiniment petit, les côtez CA, CB, ne rencontreront les côtez DA, DB, qu'à une diſtance infinie, auquel cas il faudra que les puiſſances M, N ſoient infiniment plus grandes que la force moyenne qui doit faire décrire au corps K la diagonale CD.

Fig. 22. 164. 6°. Si le corps K eſt tiré ou pouſſé à la fois par plus de deux puiſſances, par exemple, par trois ſuivant les directions CA, CB, CE, avec des forces M, N, R, qui ſoient dans la raiſon de ces lignes, on aura la route & la viteſſe du corps. 1°. Si ſur les directions CA, CB, on décrit le parallelogramme AB dont la diagonale eſt CD. 2°. Si ſur cette diagonale & la troiſiéme direction CE comme côtez, on décrit le parallelogramme DE dont la diagonale eſt CG; cette derniere diagonale montrera la route du corps, & elle exprimera ſa viteſſe.

Car ſi le corps K n'étoit pouſſé que par les puiſſances M, N, ſuivant les directions CA, CB, il décriroit la diagonale CD avec une force moyenne exprimée par la diagonale CD (156. 159); donc cette force moyenne fait autant que les deux puiſ-

ſances

ſances M, N ; ainſi le corps K eſt pouſſé par les trois enſemble comme s'il ne l'étoit que par la force moyenne ſuivant CD, & par la force R ; mais s'il n'étoit pouſſé que par les forces dirigées ſuivant CE & CD, il décriroit la diagonale CG avec une viteſſe exprimée par cette ligne ; donc il la décrira de même, s'il eſt pouſſé à la fois par les trois forces M, N, R.

Si le corps K étoit pouſſé à la fois par plus de trois puiſſances, on trouveroit en continuant de même à former des nouveaux parallelogrammes, la route du corps & la force qui réſulteroit de l'action conjointe de toutes, car la diagonale du dernier parallelogramme exprimeroit cette force, & montreroit le chemin du corps.

DE LA DECOMPOSITION DES FORCES & des mouvemens.

165. L'expérience journaliere nous apprend que non-ſeulement les forces s'uniſſent & concourent enſemble à la production du mouvement ; mais elle nous montre encore qu'une force ſe décompoſe & qu'elle agit à la fois ſuivant des directions differentes. Si l'on jette une bale contre un plancher ſuivant une direction oblique à l'inſtant du choc elle preſſe le plancher, & la même force la détermine encore à ſe mouvoir. De même ſi l'on appuie avec un bâton ſur un plancher uni & que l'on ait ſoin de l'incliner il gliſſe & preſſe en même-tems le plancher ; ce n'eſt pas en tant qu'il gliſſe qu'il preſſe ; ainſi la force qui pouſſe le bâton eſt décompoſée en deux efforts.

166. On peut avoir remarqué que par la compoſition une partie des forces compoſantes eſt détruite, puiſque le mouvement qui en réſulte eſt moindre que la ſomme des mouvemens particuliers que les forces produiroient ſi elles agiſſoient ſéparément, mais la décompoſition répare cette perte, & fait renaître les forces qui s'étoient comme confondues en une.

167. La compoſition & la décompoſition des forces ne ſont pas ſi oppoſées qu'elles ne puiſſent ſe trouver enſemble, & s'accorder juſqu'à un certain point, ſi l'on y prend garde : dans tout mouvement compoſé, on peut découvrir des traces de la décompoſition des forces compoſantes : lorſque le corps K pouſſé par deux forces dirigées ſuivant les côtez d'un parallelogramme en décrit la diagonale, il eſt aiſé d'appercevoir que ces deux forces s'accordent à le mouvoir ſur cette même diagonale, ainſi leur compoſition eſt évidente ; mais leur décompoſition ne ſe déclare pas tant. Il faut conſidérer que le corps ſe trouve en même-tems

ſur trois directions qui ſont les deux côtez du parallelogramme & la diagonale, qu'il eſt ſollicité à la fois de les ſuivre toutes trois, mais qu'il ne ſuit que la diagonale ; or dans l'inſtant que le mobile eſt déterminé à ſe mouvoir ſur la diagonale, les forces qui lui ſont appliquées, font d'un autre côté effort pour l'en éloigner, puiſque chacune d'elles tend à l'attirer ſur ſa direction : ainſi chaque force éxerce en même-tems deux actions, l'une par laquelle le corps eſt déterminé à ſuivre la diagonale, l'autre par laquelle le mobile eſt ſollicité de s'en éloigner. C'eſt ce que l'on va voir plus en détail dans les propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION DIXIE'ME.

168. *Si le corps* K *tiré ou pouſſé à la fois par les puiſſances* M, N, *ſuivant les côtez* CA, CB, *du parallelogramme* AB, *en décrit la diagonale* CD, *les forces qu'elles éxercent ſur le corps* K, *ſont décompoſées en deux efforts dont l'un eſt ſuivant la diagonale, & l'autre dirigé ſuivant la perpendiculaire à la même diagonale.*

Fig. 23. DEMONSTRATION. Pour mieux faire appercevoir cette décompoſition, on ſuppoſera que le côté CB eſt perpendiculaire à la diagonale. Puiſque le corps K décrit la diagonale CD, les forces M, N ſont exprimées par les côtez CA, CB (154). Cela poſé la force N perpendiculaire à la route du corps ne contribue en rien à le faire avancer ſuivant CD, car elle ne pouſſe le mobile ni en avant ni en arriere, mais elle eſt toute employée à le retenir ſur cette ligne & à empêcher qu'il ne s'en éloigne ; donc tout ce que le mobile reçoit de force ſuivant CD lui vient de la puiſſance M ; or il eſt évident que la force M meut non-ſeulement le corps ſuivant CD, mais qu'elle réſiſte encore à la force N, car cette force en retenant le mobile ſur CD tend à l'en éloigner, & elle l'en éloigneroit infailliblement, ſi la puiſſance M ne lui réſiſtoit. Donc outre que la puiſſance M imprime au corps un mouvement ſuivant la diagonale, elle produit encore un effort égal à la force N, & dirigé en ſens contraire de cette force ; donc la force M eſt décompoſée en deux efforts dont l'un eſt ſuivant la diagonale, & l'autre perpendiculaire à la même diagonale.

169. Si les directions des puiſſances M, N étoient toutes deux obliques à la diagonale, il ſe feroit auſſi une décompoſition toute ſemblable, car comme ces forces ne s'accordent pas parfaitement, mais que leurs actions ont quelque oppoſition entr'elles, par une partie elles ſe réſiſtent, & par l'autre elles meuvent le corps ; or

les efforts par leſquels les forces M, N ſe réſiſtent doivent être perpendiculaires à la diagonale; car s'ils étoient obliques, ils concourroient de même que les forces M & N qui les produiſent à mouvoir le corps ſur la diagonale au lieu d'être uniquement employez à l'y retenir & à faire que les forces M, N ſe réſiſtent également. Donc ſi un corps décrit la diagonale d'un parallelogramme, par l'action conjointe de deux forces, elles ſe décompoſent au moment de l'impulſion en deux efforts, dont l'un eſt dirigé ſuivant la diagonale, & l'autre ſuivant la perpendiculaire à la même diagonale.

170. L'on voit que cette décompoſition des forces eſt fondée ſur l'obliquité de leurs directions à la route du mobile, qu'ainſi dans le cas où l'une des puiſſances a ſa direction perpendiculaire à la diagonale, elle n'eſt pas décompoſée, mais elle ſe conſume toute entiere à réſiſter à l'autre puiſſance qui de ſon côté doit lui oppoſer un effort qui lui ſoit égal.

171. Puiſque chaque force eſt décompoſée en deux efforts dont l'un eſt dirigé ſuivant la diagonale, & l'autre ſuivant la perpendiculaire à la même diagonale, il s'enſuit que les directions de ces efforts font un angle droit.

Ces efforts, par exemple, ceux de la puiſſance M doivent être tels qu'ils puiſſent conjointement mouvoir le corps K de même que la puiſſance M dont ils tiennent la place: or la puiſſance M feroit parcourir au mobile la ligne CA dans le tems que la puiſſance N lui feroit parcourir CB. Donc les efforts produits par la puiſſance M au moment qu'elle eſt décompoſée, doivent être tels qu'ils puiſſent faire parcourir au mobile la ligne CA dans le même-tems. Fig. 24.

Ces efforts pourront conjointement faire décrire le côté CA dans le même-tems que la force M, s'ils ſont exprimez par les côtez d'un parallelogramme rectangle qui a pour diagonale CA.

172. Lors donc qu'un corps eſt mû ſur la diagonale d'un parallelogramme dont les côtez expriment les forces motrices M, N qui ſont dirigées ſuivant ces mêmes côtez, on détermine leurs efforts dérivés en formant deux parallelogrammes rectangles EL, GF qui aient pour diagonales les côtez CA, CB qui ſont les directions des puiſſances M, N.

On peut démontrer géométriquement 1°. que les efforts par leſquels les puiſſances M, N ſe réſiſtent ſont égaux. 2°. Que la ſomme des efforts dirigez ſuivant la diagonale eſt exprimée par la diagonale même. Les deux triangles rectangles DEA, BGC

ont les côtez AD, CB égaux (2. *Géom.*), les angles E & G ſont droits, & les angles ADC, BCD auſſi ſont égaux (29. *Geom.*): donc les deux triangles ſont ſemblables & égaux en tout (15.22. *Géom.*); donc CL & CF égaux aux côtez EA, GB ſont de même égaux entr'eux; or ces côtez expriment les efforts par leſquels les puiſſances ſe réſiſtent (169. 172.), donc ces efforts ſont égaux.

2°. L'effort que la puiſſance N fait ſuivant la diagonale CD, eſt exprimé par CG ou DE ſon égale, & l'effort que la puiſſance M fait ſuivant la même CD, eſt exprimé par CE (171); donc les deux efforts enſemble ſont exprimez par CE plus ED ou par la diagonale CD. Donc la ſomme de ces efforts eſt égale à la force que les puiſſances impriment au mobile ſuivant la diagonale.

PROPOSITION ONZIE'ME.

Fig. 25. 173. *Si le corps* K *poſé ſur le plan* ZX, *eſt pouſſé ſuivant la direction* CD *oblique au plan, il ſera mû, s'il ne rencontre d'autre réſiſtance que celle du plan. On ſuppoſe que le corps* K *eſt ſans peſanteur, c' ſt-à-dire, qu'il n'eſt ſollicité à ſe mouvoir que par la force qui lui eſt appliquée ſuivant* CD.

Si la direction CD étoit parallele au plan, le corps ne trouveroit aucune réſiſtance de ſa part; c'eſt pourquoi il ſeroit mû par toute la force qui lui eſt appliquée. Si au contraire la direction CD étoit perpendiculaire au plan, toute la force du corps ſeroit employée à le preſſer, ne pouvant ſe faire que le corps ſoit mû vers quelque endroit que ce ſoit, à moins que le plan ne cede à la force de la preſſion. Or il eſt viſible qu'entre ces deux cas extrêmes, il y en a une infinité d'autres, où le plan ſera plus ou moins preſſé, que la preſſion ſera d'autant plus grande que la direction CD de la force ſera proche de la perpendiculaire au plan, & qu'elle ſera d'autant moindre qu'elle approchera plus de la parallele au même plan. Donc dans tous les cas où la direction CD eſt oblique, toute la force du corps n'eſt pas employée à le preſſer; donc cette force n'étant pas totalement ſoutenue ou empêchée, le corps ſera mû.

174. COROLLAIRES. 1°. Il ſuit de-là que la force du corps K eſt décompoſée en deux efforts, l'un qui preſſe le plan & l'autre qui meut le corps.

175. 2°. Puiſque la force du corps eſt décompoſée parce que la direction CD eſt oblique au plan, il s'enſuit que l'effort par lequel le corps preſſe le plan, eſt perpendiculaire au même plan,

autrement il ne meſureroit pas la preſſion cauſée ſur le plan.

176. 3°. Il eſt de même évident que l'effort qui meut le corps, eſt parallele au plan. Car s'il étoit oblique, il ne ſeroit pas tout employé à mouvoir le corps; donc les efforts dérivez de la force qui pouſſe le corps K ſuivant la direction oblique CD ont leurs directions perpendiculaires l'une à l'autre; car l'un de ces efforts eſt dirigé ſuivant la perpendiculaire au plan, & l'autre ſuivant la parallele au même plan.

177. 4°. Puiſque ces efforts tiennent lieu de la force dirigée ſuivant CD, il faut qu'étant appliquez ſuivant leurs directions au corps K, ils puiſſent reproduire la force ſuivant CD qui les a fait naître; or pour que les efforts qui naiſſent de la force ſuivant CD puiſſent la reproduire, il faut (171.) qu'ils ſoient entr'eux dans la raiſon des côtez d'un parallelogramme rectangle formé ſur leurs directions, & qui auroit pour diagonale la ligne CD qui exprime la force oblique du corps K.

178. 5°. Puiſque les efforts du corps K ſont exprimez par les côtez CA, CB du rectangle AB; ſi l'on prend pour rayon ou ſinus total la diagonale CD qui exprime la force oblique, les côtez CB, CA ſeront les ſinus des angles BDC, ADC (21. *Géom.*). L'angle BDC eſt formé par la direction de la force oblique & le plan, donc l'effort qui preſſe le plan eſt à la force oblique, comme le ſinus de l'angle formé par la direction de la force oblique & le plan, eſt au ſinus total. Et l'effort parallele eſt à la même force oblique comme le ſinus du complément de l'angle BDC eſt au ſinus total, c'eſt-à-dire, comme CA eſt à CD.

179. COROLLAIRE GÉNÉRAL. L'on peut conclurre de tout ce qui vient d'être dit du mouvement d'un corps dont la route eſt oblique à la direction de la force qui le pouſſe, que cette force généralement parlant eſt décompoſée en deux efforts dont l'un eſt perpendiculaire à la route du corps, & l'autre parallele à la même route; l'effort perpendiculaire eſt empêché ou détruit, le ſeul effort parallele eſt libre pour mouvoir le corps.

DE LA MANIERE DONT L'EQUILIBRE SE FORME, déduite de la compoſition & décompoſition des forces.

180. L'équilibre eſt l'état de pluſieurs forces qui agiſſent les unes contre les autres, de maniere que tout demeure en repos. Dans l'équilibe les forces tendent à des effets oppoſez: & parce qu'aucune d'elles ne prévaut, elles produiſent le repos avec la tendence au mouvement. Pour l'équilibre il ne ſuffit pas que des

forces ſoient oppoſées en quelque choſe, il faut que l'oppoſition ſoit entiere & qu'il y ait égalité d'actions en ſens contraires. Lorſque deux forces ſont appliquées à un corps ſuivant les côtez d'un parallelogramme, elles ſont oppoſées, puiſqu'elles tendent à faire aller le corps ſuivant des directions differentes; elles ne produiſent pas néanmoins le repos ou l'équilibre, parce que l'oppoſition qu'elles ſe font eſt imparfaite; cependant leur réſiſtance mutuelle eſt une eſpece d'équilibre, les efforts contraires par leſquels elles ſe réſiſtent étant égaux, & cet équilibre commencé les diſpoſe à l'équilibre parfait avec une troiſiéme force, en ce que par là elles ſont contraintes de ſe compoſer en une ſeule force. A laquelle cette troiſiéme réſiſte. C'eſt-là le grand avantage de la compoſition des forces, de faire enſorte qu'on en gouverne pluſieurs & qu'on s'en rende maître avec la même facilité que d'une ſeule. Lorſque les directions concourent en un point, on peut toujours trouver une force compoſée de toutes; on le peut encore, quoique toutes les directions ne paſſent pas par un même point, pourvu que deux à deux priſes comme on voudra, elles concourent. Comme tous les équilibres où il y a plus de trois forces ont pour fondement l'équilibre qui réſulte de trois, on va s'appliquer à en établir les conditions.

181. On a ſuppoſé dans les propoſitions précédentes que le corps auquel des puiſſances s'appliquent pour le mouvoir, eſt ſphérique, & que leurs directions concourent au centre, la grandeur de ce corps n'étant pas déterminée, on peut ſuppoſer qu'elle eſt réduite à un point qu'on peut regarder comme le centre des forces, car chacune d'elles tend à le mouvoir ſuivant ſa direction; lorſque ce point eſt fixe & qu'il ne peut avancer ſuivant aucune des directions, les puiſſances ſont retenues en équilibre au moyen de ce point qui eſt comme leur appui commun.

182. Si deux puiſſances M, N ſont immédiatement appliquées au point C ſuivant les directions CA, CB qui font l'angle ACB, elles peuvent être miſes en équilibre. Car elles tendent à mouvoir le point C ſuivant une direction moyenne entre CA, CB (152). Donc ſi au moment que ce point eſt ſollicité de ſe mouvoir ſuivant CD, on oppoſe une force P égale à la force moyenne qui lui eſt imprimée par l'action conjointe des puiſſances, le point C ne pouvant avancer demeurera en repos, & les puiſſances M, N trouvant un point fixe qui leur réſiſte ſuivant leurs directions CA, CB ſeront auſſi en repos, & par conſéquent en équilibre. Fig. 26.

183. Si les forces M, N ſont inſtantanées ou ſimplement mo-

trices, l'équilibre ne durera qu'un inſtant ; car les forces M, N ſeront détruites par la réſiſtance que la puiſſance P leur oppoſe. Si les forces M, N ſont conſtantes, comme la peſanteur, la force d'un animal &c. l'équilibre ſera durable.

184. Si au lieu d'oppoſer à la force moyenne du point C une puiſſance P qui réagiſſe & le repouſſe, on poſe un obſtacle capable de l'arrêter, l'équilibre ſe fera de même.

185. La direction de la puiſſance réſiſtante P, doit être dans le même plan que les directions CA, CB des puiſſances M, N, car ces puiſſances tendent à faire décrire au point C la diagonale d'un parallelogramme formé ſur leur directions (156) ; donc la direction de la force moyenne du point C eſt ſur le même plan que les directions CA, CB ; mais la direction de la puiſſance P doit être diamétralement oppoſée à la direction moyenne du point C, c'eſt-à-dire, que ces directions doivent être ſur la même ligne en ſens oppoſez. Donc la direction de la puiſſance P eſt dans le même plan que les directions CA, CB.

186. La direction de la puiſſance réſiſtante P doit couper l'angle ACB ; car cette direction eſt ſur la diagonale d'un parallelogramme formé ſur les directions CA, CB ; donc elle doit couper l'angle ACB de même que la diagonale.

187. La puiſſance réſiſtante P doit être exprimée par la diagonale du parallelogramme dont les côtez ſont proportionnels aux puiſſances M, N, car la force moyenne du point C eſt exprimée par cette diagonale (159) ; donc la force P qui lui eſt égale doit être exprimée par la même diagonale. Les conditions que l'on vient d'expoſer ſont néceſſaires & ſuffiſent pour l'équilibre de deux puiſſances M, N, lorſque leurs directions concourent en un point C.

188. Si deux puiſſances M, N ſont retenues en équilibre par une troiſiéme P, elles ont néceſſairement leurs directions en un même plan. Fig. 27.

Si les directions des puiſſances M, N ne ſont pas dans un même plan, elles ne peuvent concourir en un point, car ſi elles concouroient en un point, elles formeroient un angle plan, elles ſeroient donc dans le plan de cet angle, ce qui eſt contre la ſuppoſition ; puis donc que les directions des puiſſances M, N qu'on ſuppoſe n'être pas dans un même plan, ne peuvent concourir en un point, il faut que le but commun contre lequel ces puiſſances s'éxercent & la puiſſance P avec elles ſoit un corps ou une verge ſolide telle que M, N : cela poſé, que la verge que l'on ſuppoſe

ſans peſanteur, ſoit dans une ſituation horizontale ou parallele à l'horizon, & que la direction NB de la puiſſance N ſoit parallele au même horizon, enfin que la direction MA de la puiſſance M lui ſoit perpendiculaire : les directions ſeront ſituées ſur des plans differens. Or je dis qu'en quelque point C que l'on applique la puiſſance P, la verge MN ne peut être en équilibre, ni les puiſſances qui lui ſont appliquées ; car ſoit que le point C demeure fixe ou non, rien n'empêche que les extrêmitez de la verge n'obéiſſent aux impreſſions des puiſſances M, N, en tournant autour du point C ſi ce point eſt immobile, ou que la ligne entiere ne ſoit mûe ſi le point C n'eſt pas fixement attaché. La puiſſance P ne pouvant donc arrêter à la fois les efforts des puiſſances M, N, elles ne peuvent être en équilibre. Donc ſi elles y ſont retenues par la puiſſance P, il faut que leur directions ſoient en un même plan.

189. Lorſque les directions des puiſſances M, N ſont en un même plan, elles peuvent être retenues en équilibre par une troiſiéme puiſſance P. Car ou les directions de ces puiſſancs concourent en un point ou elles ſont paralleles, ſi les directions ſont convergentes vers un point, on a fait voir (182.) que les puiſſances étant immédiatement appliquées au point de concours peuvent être miſes en équilibre par une troiſiéme puiſſance P. Si les directions ſont paralleles, on peut ſuppoſer qu'elles concourent à une diſtance infinie, car l'inclinaiſon des lignes qui concourent à une diſtance infinie, eſt ſi petite qu'elle differe infiniment peu du paralleliſme ; ainſi on peut prendre les deux cas pour un, & ramener le cas du paralleliſme au cas des directions concourantes.

En effet ſi l'on peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible, que les directions des corps peſans qui tendent au centre de la terre, ſont paralleles lorſque que ces corps ne ſont pas à une grande diſtance l'une de l'autre, à plus forte raiſon peut-on ſuppoſer que des lignes qui ne concourent qu'à une diſtance infinie ſont paralleles, & que des lignes paralleles concourent infiniment loin. Donc deux puiſſances qui ont leurs directions couchées ſur un même plan peuvent être miſes en équilibre par une troiſiéme puiſſance P.

190. Les conditions néceſſaires pour l'équilibre de trois puiſſances ſont donc 1°. que leurs directions concourent en un même point quand ce ne ſeroit qu'à une diſtance infinie. 2°. Que ces directions ſoient en un même plan. 3°. Que les puiſſances ſoient entr'elles comme les trois côtez d'un parallelogramme

(nommant

(nommant de ce nom la diagonale) formé ſur les directions. 4°. Que l'une d'elles tire ou pouſſe en ſens contraires des deux autres. Ces quatre conditions ſuffiſent & ſont néceſſaires pour l'équilibre de trois puiſſances que l'on ſuppoſe encore appliquées immédiatement au point de concours tant qu'il s'agit de démontrer la poſſibilité ou l'exiſtence de cet équilibre. Mais lorſque les trois puiſſances ſont actuellement en équilibre, il n'eſt pas néceſſaire de les appliquer au point de concours, il ſuffit qu'au moyen des cordons ou autrement, elles tranſmettent leur action juſqu'à ce point qui eſt leur point d'appui commun.

191. Soit la verge inflexible CFZ ſans peſanteur dont les branches CF, FZ font l'angle CFZ à volonté, & deux cordons ſituez ſur la ligne droite CZ qui joint les extrêmitez de la verge; on ſuppoſe que ſi l'on applique aux cordons deux puiſſances M, *m* égales entr'elles, & qui tirent en ſens contraires, elles ſeront en équilibre, c'eſt-à-dire, que la verge & les puiſſances ſeront en repos. Car à cauſe de l'inflexibilité de la verge, les deux puiſſances agiſſent l'une ſur l'autre de même que ſi les deux cordons n'en faiſoient qu'un, & qui fût continu depuis le point d'application d'une puiſſance juſqu'au point d'application de l'autre, & qu'il fût étendu en ligne droite: or dans cette hypotheſe les puiſſances M, *m* ſuppoſées égales ſeroient en équilibre, donc elles y ſeront auſſi ſur la verge CFZ. Fig. 28. 29.

Cette ſuppoſition eſt conforme à une expérience aiſée à faire, elle conſiſte à mettre la verge CFZ ſur un plan horizontal afin d'empêcher l'effet de la peſanteur: l'on trouvera que ſi l'on tire également les cordons attachez aux extrêmitez de la verge ſuppoſez étendus ſur la même ligne droite, le tout demeurera en repos.

192. Trois puiſſances M, N, P, dirigées ſuivant CM, CN, CP étant en équilibre ſur le point C, ſi on prolonge les directions de part ou d'autre du point C en A en B & en F, qu'on les joigne par la verge inflexible ZFX qui les rencontre aux points A, B, F. Je dis que ſi les puiſſances M, N, P ſont appliquées aux points A, B, F de la verge ſuivant les mêmes directions, elles ſeront encore en équilibre. Fig. 30. 31.

Suppoſons que la direction FCP de la puiſſance P eſt une verge inflexible fermement attachée à la verge ZFX au point F; que C*m* & C*n* ſont deux cordons couchez ſur les directions des puiſſances M, N. Si on ôte la puiſſance P & qu'on applique aux cordons C*m*, C*n* deux puiſſances qui tirent ſuivant ces mêmes cordons, & qui ſoient égales aux puiſſances M, N; que de plus les

puiſſances M, N ſoient appliquées aux cordons AM, BN qui partent de la verge inflexible ZFX, les quatre puiſſances ſeront en équilibre par la ſuppoſition précédente, car N ſera équilibre avec *n*, & M avec *m*, puiſque ces puiſſances priſes deux à deux ſont égales, & que d'ailleurs leurs directions ſont diamétralement oppoſées; ainſi l'équilibre qui ſe faiſoit auparavant ſur le point C ſe fera ſur la verge ZXFC. Cela poſé, ſi les puiſſances M, N étoient immédiatement appliquées au point C, elles produiroient ſur ce point un effort dirigé ſuivant CF, & auquel la puiſſance P réſiſteroit par une action égale & contraire (185. 186. 187); donc les puiſſances *m*, *n* étant égales aux puiſſances M, N, & ſemblablement dirigées, produiſent ſur le point C un effort égal à l'effort de la puiſſance P, & qui eſt dirigé de même; donc ſi on ôte les puiſſances *m*, *n* & qu'on rétabliſſe la puiſſance P, le point C ſera tiré de même que s'il l'étoit par les puiſſances *m*, *n*; donc les trois puiſſances M, N, P, ſeront en équilibre ſur la verge à trois branches ZXFC; mais à quelque point de la verge CF que la puiſſance P ſoit appliquée, l'équilibre ſubſiſtera comme auparavant; donc ſi elle eſt appliquée au point F, & les puiſſances M & N aux points A, B elles, y ſeront en équilibre ſur la verge ZFX. La verge ZFX eſt appellée *levier*, & il n'eſt pas néceſſaire qu'il ſoit droit; l'équilibre ſubſiſteroit également quand même il ſeroit courbé ou tortu, pourvu qu'il pût joindre les trois directions.

193. Lorſque trois puiſſances ſont en équilibre ſur un point C on peut ſuppoſer qu'elles ſont en équilibre ſur un levier qui joint leurs directions, pourvû qu'elles continuent de tirer ſuivant ces mêmes directions.

194. Si trois puiſſances M, N, P, ſont en équilibre ſur le levier ZX, leurs directions MA, NB, FPL, concourront en un même point.

Fig. 32. 1°. Les directions des trois puiſſances ſont en un même plan (188). 2°. Il faut montrer qu'elles concourent en un même point. Il faut concevoir que ces trois directions ſont autant de cordons flexibles; à quelque point L du cordon FPL que la puiſſance réſiſtante P ſoit appliquée, l'équilibre ſubſiſtera. Que les cordons MA, NB ſoient prolongez, en ſorte qu'ils rencontrent le cordon FPL aux points D, C, les puiſſances M, N continuant de tirer ſuivant les mêmes directions, l'équilibre ſubſiſtera encore, quoique les cordons AMD, BNC ſoient attachez au cordon FPL; car ce cordon étant tiré ſuivant les mêmes directions & avec

la même force par les puiſſances M, N s'il y a équilibre ſans les cordons AMD, BNC, il ne ſera point interrompu, quoiqu'on les mette : or il eſt aiſé de faire voir que ſi les trois cordons AMD, BNC, FPL, ne concourent pas en un même point, il n'y a point d'équilibre ; car le point D eſt tiré en même-tems par la puiſſance M & par la puiſſance P placée en L. C'eſt-à-dire que ce point eſt tiré ſuivant deux directions qui font un angle ; il eſt évident que rien ne s'oppoſe au mouvement de ce point : ce n'eſt pas la puiſſance N qui s'y oppoſe, puiſque c'eſt le point C qu'elle tire ; donc le point D ſera mu (152) : on fera voir de la même maniere que le point C étant tiré à la fois par la puiſſance N & la puiſſance P placée en L ſera mu ; il n'y auroit donc point équilibre, ce qui eſt contre l'hypotheſe. Donc s'il y a équilibre il eſt néceſſaire que les trois directions concourent en un même point : ce qui eſt auſſi conforme à l'expérience ſuivant laquelle trois puiſſances en équilibre ſur un levier, ſe diſpoſent toujours de maniere que leurs directions concourent, & ſelon laquelle il eſt impoſſible de les mettre en équilibre à moins que leurs directions ne concourent en un point.

On peut dire encore que la puiſſance P doit réſiſter en même-tems aux efforts des puiſſances M, N ; il eſt donc néceſſaire que ces efforts ſe compoſent en un pour que la puiſſance P qui agit ſuivant la ſeule direction FPL puiſſe réſiſter à la fois & en même-tems à l'un & à l'autre ; or il eſt manifeſte que les directions des puiſſances M, N n'ayant qu'un point qui leur ſoit commun, c'eſt à ce point que leurs efforts doivent ſe compoſer en un ; la direction de l'effort qui réſulte de l'action conjointe des puiſſances M, N, paſſe donc par le point de concours de leurs directions. Donc la direction de la puiſſance P qui réſiſte à cet effort doit paſſer par le point de concours des directions des puiſſances M, N. Donc les trois directions concourent en un point.

195. Si trois puiſſances M, N, P, ſont en équilibre ſur un levier ZX, elles ſeront encore en équilibre, ſi elles s'appliquent au point ou leurs directions concourent. Fig. 33.

1°. Il eſt évident que les directions des trois puiſſances concourent en un point C par la propoſition précédente. 2°. Au moyen des cordons AMG, BNC, les efforts des puiſſances M, N, s'étendront juſqu'au point C, la puiſſance P étant placée au-delà de C vers L. 3°. A quelques points des cordons AMC, BNC que les puiſſances M, N ſoient appliquées, ils ſeront également tendus. Donc le point C ſera tiré avec la même force, ſoit que les

puiſſances M, N ſoient appliquées au levier ZX, ſoit qu'elles tirent immédiatement ce point. Donc puiſque le point C eſt en équilibre lorſque les puiſſances tirent le levier ZX, ce point continuera d'y être s'il eſt tiré immédiatement ſuivant les mêmes directions.

Voilà pour l'équilibre de deux puiſſances M, N auxquelles une troiſiéme P réſiſte. Il y a auſſi des équilibres où il faut oppoſer deux puiſſances ou deux réſiſtances à une ſeule puiſſance ; il y en a d'autres où les réſiſtances qu'il faut oppoſer ſont déterminées ; il y en a auſſi où elles ſont indéterminées. En voici des exemples.

Fig. 34. 196. Si le corps ſphérique K tiré ou pouſſé par la puiſſance P, dont l'action eſt exprimée par CD, preſſe les plans GH, GI, aux points M, N : 1°. dans le cas d'équilibre les preſſions exercées contre ces plans, ſont dirigées ſuivant les perpendiculaires CA, CB, qui paſſent par les points d'attouchement M, N. 2°. Ces preſſions ſont à la puiſſance P comme les côtez du parallelogramme AB formé ſur les trois directions, & qui a pour diagonale CD, ſont à la même diagonale.

1°. La force qui pouſſe le corps K étant oblique aux plans GH, GI, elle ne les preſſe que ſuivant la perpendiculaire aux mêmes plans (174) ; & par conſéquent ſuivant les lignes CA, CB qui paſſent par les points d'attouchement M. N.

2°. Le preſſions que le corps K exerce contre les plans GH, GI, ſont égales aux réſiſtances que ces mêmes plans font ; car les réſiſtances ſont directement oppoſées aux preſſions. Or les réſiſtances des plans ſont à la force P comme les côtez CA, CB ſont à la diagonale CD : car ſi au lieu des réſiſtances des plans on ſubſtitue des puiſſances M, N qui réagiſſent contre les preſſions, c'eſt-à-dire, ſuivant AC, BC, elles ſeront exprimées par ces côtez, puiſque la puiſſance P qui fait équilibre avec elles, eſt exprimée par la diagonale CD (187). Donc les réſiſtances des plans, & par conſéquent les preſſions qu'ils ſupportent ſont à la force P comme les côtez CA, CB ſont à la diagonale CD.

Si le corps ne rencontroit que l'un des plans ou GH ou GI, la force P ſeroit décompoſée en deux efforts l'un perpendiculaire, & l'autre parallele ; c'eſt donc la rencontre que le corps K fait des deux plans qui détermine la force P à ſe décompoſer en deux efforts perpendiculaires aux mêmes plans : d'où l'on voit qu'une même force peut ſe décompoſer differemment, & produire des efforts très-inégaux ſelon les obſtacles qu'on lui oppoſe.

197. Si le corps K eſt pouſſé par la puiſſance P contre les deux appuis R, S que l'on ſuppoſe être deux points fixes ou les arêtes de deux corps fermes & inébranlables ; les efforts faits ſur les appuis par la puiſſance P dirigée ſuivant CD, ſont indéterminez, de même que leurs directions. Fig. 35.

Le corps K étant retenu en équilibre par la réſiſtance des appuis, à quelque point C de la direction CD qu'on ſuppoſe la puiſſance P appliquée, l'équilibre ſubſiſtera, & elle agira ſur le corps K avec la même force, en ſuppoſant que CD eſt une ligne inflexible. Cela poſé, ſi ſur la direction de la puiſſance on prend des parties CD, CD qui expriment la force P, que l'on décrive tout autant de parallelogrammes BA, BA, &c. dont les côtez paſſent par les appuis R, S, & qui aient pour diagonale les lignes égales CD, CD, &c. Les efforts dans leſquels la puiſſance P ſe décompoſe, ou les réſiſtances que les appuis font à ces efforts peuvent être exprimez par les côtez de ces differens parallelogrammes : car ſi ſur les côtez d'un même parallelogramme l'on place deux puiſſances M, N qui réagiſſent dans le ſens des réſiſtances, dans le cas de l'équilibre elles ſeront à la puiſſance P comme les côtez CA, CB à la diagonale (187), & il y aura autant de paires de puiſſances qui pourront réſiſter à la puiſſance P, qu'il y a de parallelogrammes ; donc puiſque les puiſſances qui feroient équilibre avec la puiſſance P ſont indéterminées, les réſiſtances des appuis & les efforts de la puiſſance P contre ces appuis répreſentez par ces puiſſances, ſont auſſi indéterminez.

198. Cette indétermination eſt fondée ſur ce que les appuis R, S ne préſentent pas au corps K une ſurface mais une ſimple ligne ou un point, & qu'un point ou une ligne peuvent réſiſter en une infinité de ſens differens.

199. D'où l'on voit que toutes les fois qu'une puiſſance eſt décompoſée en des efforts dont les directions ne ſont pas determinées, les efforts ne le ſont pas non plus.

200. Lorſque trois puiſſances ſont en équilibre, l'on peut nommer puiſſance réſiſtante celle qui réſiſte au concours des deux autres ou dont la direction eſt ſur la diagonale du parallelogramme formé ſur les directions des deux autres, & dont les côtez ſont proportionnels à ces mêmes puiſſances.

201. Si trois puiſſances ſont en équilibre, elles peuvent être conſiderées tour à tour comme puiſſance réſiſtante.

Suppoſons d'abord que la puiſſance P eſt la réſiſtante, & que les puiſſances M, N dirigées ſuivant les côtez CA, CB du parallelo- Fig. 36.

gramme AB tendent à faire décrire au point C la diagonale CD ; la puiſſance réſiſtante P ſera exprimée par la diagonale CD, & dirigée de C vers F, & les puiſſances M, N ſeront répreſentées par les côtez CA, CB (187). Si par le point B on mene BE parallele à CD qui rencontre AC prolongée en E, & par le point E, EF parallele à CB ; l'on formera le nouveau parallelogramme BF dont le côté CF eſt égal à CD, car les triangles DCB, BCE ſont ſemblables & égaux, les angles alternes DCB, CBE ſont égaux (29. *Géom.*), de même les angles alternes DBC, BCE ſont auſſi égaux, le côté BC eſt commun aux deux triangles, donc ils ſont ſemblables & égaux (22. *Géom.*) ; donc CD = BE = FC (2. *Géom.*) ; donc FC = CD. Pareillement CE = DB = AC (2. *Géom.*) ; donc CE = AC. Or les puiſſances N, P tirent le point C ſuivant CB & CF avec des efforts exprimez par ces lignes ; donc elles produiſent un effort ſuivant la diagonale CE exprimé par cette ligne ; mais cet effort eſt égal à la réſiſtance que la puiſſance M fait ſuivant CA prolongément de CE ; donc la puiſſance M peut être conſiderée comme puiſſance réſiſtante, &c.

DES MOUVEMENS COMPOSEZ en ligne courbe, & des forces centrales.

202. Un corps peut décrire la ligne courbe & la ligne droite. Une force ſeule ſuffit pour le mouvoir en ligne droite ; mais il en faut plus d'une pour le mouvoir en ligne courbe ; ainſi ce mouvement eſt compoſé. L'expérience & le raiſonnement concourent à prouver qu'il faut plus d'une force pour contraindre un corps de parcourir la ligne courbe.

1°. Si on attache un corps de figure ſphérique à un bout d'un cordon, & qu'on attache l'autre bout à un point fixe ſur un plan horizontal ou de niveau, par exemple, ſur un plancher qu'on faſſe décrire au corps une circonférence de cercle autour du point fixe, on s'apperçoit qu'il bande le cordon & fait effort pour le rompre, & cela d'autant plus qu'il va plus vîte ; ſi le cordon vient à ſe rompre le corps diſcontinue de tourner & commence dès ce moment à aller ſuivant la ligne droite. D'où l'on voit que pour faire décrire à un corps la circonférence d'un cercle, il ne ſuffit pas de lui avoir donné une premiere impulſion, & de l'abandonner enſuite à lui-même, comme lorſqu'il décrit la ligne droite ; il faut outre cela quelque choſe de different de cette impulſion, une force ou quelque choſe qui en faſſe l'office, comme un obſtacle, une réſiſtance, &c. qui contraigne le corps de demeu-

rer ſur cette circonférence; car ſi la force ou la réſiſtance qui captive ainſi le corps, & l'aſſujettit à ſe tenir ſur la courbe, cede tant ſoit peu, il s'en éloigne auſſi-tôt.

20. Les Géometres conçoivent les lignes courbes comme des poligones d'une infinité de côtez, c'eſt-à-dire, compoſées d'une infinité de petites lignes droites. Cela poſé, lorſqu'un corps décrit une courbe ou qu'il en parcourt les differens côtez, il ſe trouve ſucceſſivement ſur differentes lignes droites : or lorſqu'un corps a commencé décrire une ligne droite, il continue de ſe mouvoir ſur cette ligne à moins qu'une cauſe differente de ſon mouvement actuel ne l'en détourne ; donc lorſqu'un corps décrit une ligne courbe, c'eſt-à-dire qu'il s'éloigne à chaque inſtant de la ligne droite qu'il a commencé à décrire, il faut une cauſe differente de ſon mouvement actuel, laquelle oblige le corps de s'en éloigner, par conſéquent ce mouvement eſt compoſé, & il eſt l'effet de plus d'une force.

203. Il ſuit de-là qu'un corps qui eſt mu, décrit la ligne droite ou qu'il tend à la décrire, car s'il décrit une ligne courbe il tend à s'en éloigner puiſqu'il faut une force pour l'y retenir.

La ligne droite ſur laquelle le mobile tend à continuer ſa route eſt la tangente de la courbe au point auquel le mobile ſe trouve ; car le mobile tend à continuer ſon mouvement ſuivant le côté de la courbe ſur lequel il ſe trouve ; or la tangente eſt le prolongement de ce côté-là même ; donc le mobile tend à s'échapper par la tangente.

204. Un mobile qui décrit une ligne courbe tend à chaque point de la courbe à s'en écarter ; il faut donc que la cauſe qui l'y retient agiſſe ſans diſcontinuer, & qu'elle ſe trouve par tout où eſt le mobile.

205. Si la cauſe qui retient un corps ſur une courbe lorſqu'il la décrit, dirige ſon action vers un même point, elle eſt appellée *centripete* à cauſe que le mobile tend vers ce point comme les corps peſans vers le centre de la terre. La réſiſtance ou l'effort contraire que le mobile fait à cette force, eſt appellée force *centrifuge*. Les deux forces enſemble ſont appellées forces *centrales*, c'eſt-à-dire, forces qui ſollicitent ſans ceſſe un corps de s'approcher ou de s'éloigner d'un centre.

206. Ces deux forces ſont égales, & elles agiſſent en des ſens directement oppoſés. Lorſque le corps dont on a parlé au commencement de cet article, tourne ſur un plan horizontal autour d'un point fixe, la force qui retient le bout du cordon à ce point, ſi

c'eſt, par exemple, une main qui l'y retienne, elle doit faire un effort égal à la tenſion du cordon, c'eſt-à-dire, à la force centrifuge du mobile. Ce ſont deux forces qui en tirant le cordon en ſens contraires, ſe contrebalancent, en ſorte que l'une ne prévaut jamais ſur l'autre. Si l'une de ces forces augmente, l'autre augmente auſſi-tôt; ſi l'une diminue, il faut que l'autre ſe relâche de même. Les deux forces dont on parle ici ne different donc que dans la maniere de les concevoir, en ce que l'une fait effort pour éloigner le mobile du centre, & qu'au contraire l'autre le repouſſe vers le même centre, mais leur meſure ou quantité eſt la même; & en déterminant l'une, l'autre eſt auſſi déterminée. Lors donc que l'on parle de la force centrale d'un mobile, on peut entendre indifferemment la force centrifuge ou la force centripete.

207. L'utilité des forces centrales paroît ſur-tout dans l'aſtronome phyſique. Les aſtres ſe meuvent dans des cercles ou dans des figures qui en approchent fort comme l'ellipſe. Pour donner une idée des mouvemens compoſez qui ſe font en ligne courbe, & traiter en même-tems des forces centrales par rapport à un objet réel, on choiſit le cercle & l'ellipſe. On conçoit les lignes courbes ſous l'idée de polygones d'une infinité de côtez, ou dont les côtez ſont infiniment petits, le cercle comme un polygone régulier, & les autres courbes comme des polygones irréguliers; afin donc de rendre le ſujet qu'on va traiter plus ſenſible, & en développer les principes le plus clairement qu'on pourra, on va examiner d'abord ce qui arrive à un corps qui décrit un polygone ſoit régulier ſoit irrégulier d'un nombre fini de côtez.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS QUI DE'CRIT un polygone régulier d'un nombre fini de côtez, & de la force centrale dans le cercle.

208. Pour faire décrire à un corps un polygone, il faut 1°. qu'il reçoive une certaine viteſſe ſuivant un des côtez. 2°. Lorſqu'il ſera arrivé à l'un des angles du polygone, qu'il y ait une cauſe qui le détourne & lui faſſe changer de direction en le ramenant ſur un nouveau côté. Cela étant ainſi à chaque nouvel angle du polygone, le mobile ſera placé entre deux déterminations, l'une qui le porte ſuivant le prolongement du côté qu'il vient de décrire, l'autre qui l'en détourne; il décrira donc la diagonale d'un parallelogramme, qui dans l'hypotheſe préſente ſera un côté du polygone.

Suppoſons

Suppoſons que le corps K commence à être mu ſur le côté AD de quelque polygone régulier avec une viteſſe qui ſoit exprimée par ce côté, lorſqu'il ſera arrivé à l'angle D, il continueroit de ſe mouvoir ſur le prolongement du côté AD ; mais ſi au point D il y a une force qui le détourne ſur le côté DB, il décrira par l'action conjointe de cette force & de celle que la viteſſe initiale lui donne (154. 152.), la diagonale d'un parallelogramme qui ſera ſituée par l'hypotheſe ſur le côté DB. Lorſque le mobile ſera arrivé à l'angle B, il ſera encore détourné comme il l'a été à l'angle D, & décrira la diagonale d'un nouveau parallelogramme qui ſera ſur le côté BI ; ces differentes repriſes feront décrire au mobile le polygone régulier. Fig. 37. 38.

PROPOSITION DOUZIE'ME.

209. *Si la force qui retient un mobile ſur un polygone régulier, dirige ſon action au centre, tous les côtez ſeront décrits en des tems égaux.* Fig. 37. 38.

Demonstration. Suppoſons que le corps K décrive de la maniere que l'on vient d'expoſer, un polygone régulier, il faut démontrer que ſi la force qui le ramene lorſqu'à chaque angle il fait effort pour continuer ſon chemin ſur le prolongement du côté qu'il vient de décrire, il faut démontrer, dis-je, que ſi cette force dirige ſon action vers le centre C du polygone, le mobile K en décrira tous les côtez en des tems égaux. Suppoſons que le mobile étant au point A reçoive une viteſſe qui ſoit exprimée par le côté AD du polygone, en ſorte qu'avec cette viteſſe il le parcoure dans un tems, donné, par exemple, dans une ſeconde. Lorſqu'il ſera arrivé au point D il aura toute la force qu'il a reçue en A, & s'il étoit abandonné à lui-même, il continueroit de ſe mouvoir ſuivant DF prolongement de AD avec la même viteſſe ; mais la force ſuivant DC l'en empêche, & le contraint de ſe détourner ſur le côté DB ; de ſorte que par l'action conjointe de la force ſuivant DC, & de la force ſuivant DF, le mobile décrit le côté DB qui eſt la diagonale d'un parallelogramme dont les côtez pris ſur les directions DC, DF expriment le rapport des forces qui font décrire cette diagonale (155. 159.). Du point B il faut mener BF, BG paralleles aux directions DC, DF ; par-là on formera le parallelogramme GF dont la diagonale eſt DB ; donc les forces qui la font décrire au mobile K, & la force moyenne qui en réſulte ſuivant DB, ſont exprimées par les côtez DG, DF, DB du parallelogramme GF

(154. 155.); donc le mobile décrit la diagonale DB dans le tems que les forces ſuivant DC, DF lui feroient parcourir les côtez DG, DF qui leur ſont proportionnels (156.); donc le tems par la diagonale DB eſt égal ou le même que le tems par DF: or je dis que le tems par DF eſt égal au tems par AD. La preuve eſt fondée ſur les triangles ſemblables BDF, BDC. L'angle BDA, plus l'angle BDF ſont égaux pris enſemble à deux angles droits (30. *Géom.*), l'angle BDA, plus l'angle C valent pris enſemble deux angles droits (31. *Géom.*): ſi on retranche de part & d'autre l'angle BDA, il reſte l'angle BDF égal à l'angle C; l'angle DBF eſt égal à l'angle BDC (29. *Géom.*); donc les triangles BDF, BDC ayant deux angles égaux, ſont ſemblables (15. *Géom.*); les côtez DC, BC qui comprennent l'angle C ſont égaux (32. *Géom.*); donc les côtez BD, DF qui comprennent l'angle BDF égal à l'angle C, ſont auſſi égaux, donc DF = DA: or lorſque le mobile eſt parvenu du point A au point D, il a toute la force qu'il a reçue au point A; donc le corps K tend à parcourir DF = DA dans le tems qu'il a parcouru AD; donc le tems par DB qui eſt égal au tems par DF, eſt égal au tems par AD. On démontrera de la même maniere que les autres côtez du polygone ſont parcourus en même-tems que AD. Donc, &c.

210. Il eſt évident 1°. que la viteſſe du mobile eſt uniforme, puiſqu'en des tems égaux il parcourt les côtez d'un même polygone qui ſont tous égaux. 2°. La force qui ramene le mobile eſt néceſſairement exprimée par DG; car ſi cette force étoit plus grande ou plus petite, le mobile ceſſeroit de décrire le polygone qu'on ſuppoſe qu'il décrit; car pour lors cette force ſeroit exprimée par une ligne plus grande ou plus petite que DG; donc le côté DB du polygone n'étant pas la diagonale du parallelogramme formé ſur les directions des forces, ne ſeroit pas décrit par le mobile.

211. Le polygone décrit par le mobile étant toujours ſuppoſé régulier, & la force qui le ramene dirigée vers le centre; cette force ſera d'autant moindre, (la viteſſe du corps demeurant la même) que le polygone aura plus de côtez; ainſi ſi le mobile décrit deux polygones qui aient des côtez égaux avec la même viteſſe, par exemple, un exagone & un octogone, la force qui ramene le mobile ſur l'exagone ſera bien plus grande que celle qui le retient ſur l'octogone; car dans l'une & l'autre figure ces deux forces ſont exprimées par DG ou BF: or DG ou BF eſt certainement plus grande dans l'exagone que dans l'octogone (23. *Géom.*); donc, &c. En effet l'on voit que plus le polygone

aura de côtez, plus l'angle BDF ſera petit. Ainſi le détour que le mobile fera, ſera d'autant moindre, & par conſéquent la force qui le lui fait faire.

212. Si l'angle BDF eſt infiniment petit, la force qui retient le mobile ſur le polygone eſt infiniment petite. Pour le prouver il ſuffiroit de dire que l'angle BDF étant infiniment petit, le côté DG ou BF qui exprime cette force eſt infiniment petit par rapport à DB qui exprime la viteſſe ou la force qui meut le corps ſur le polygone. Mais il faut démontrer la propoſition géométriquement.

L'on peut faire deux ſuppoſitions : 1°. Que le côté DB du polygone demeure le même, & pour lors le rayon DC du même polygone eſt infiniment grand par rapport à DB ; car puiſque l'angle BDF ou BDC eſt infiniment petit, le périmetre du polygone contient le côté DB une infinité de fois ; ce périmetre eſt donc infiniment grand par rapport au côté DB. Or ce périmetre ne peut être infiniment grand par rapport à DB, ſi le centre C n'eſt à une diſtance infinie du même périmetre, puiſque c'eſt la grandeur du rayon qui détermine la grandeur du périmetre : ſi le rayon eſt d'une grandeur finie, le périmetre eſt auſſi d'une longueur finie. Donc le rayon DC eſt infiniment grand par rapport au côté DB. 2°. L'on peut ſuppoſer que le rayon DC demeure le même, & pour lors il faut que l'angle BDF devenant infiniment petit, le côté BD ſoit auſſi infiniment petit par rapport au rayon DC, puiſque l'angle BDF ou BDC ne peut être infiniment petit, que la baſe BD de cet angle ne ſoit contenue une infinité de fois dans le périmetre, & que le périmetre, & par conſéquent le rayon DC, ne ſoit infiniment grand par rapport à DB : or dans ces deux cas la force qui retient le mobile ſur le polygone eſt infiniment petite par rapport à la force qui le meut ſur le même polygone. Car les triangles BDC, BDF ou ſon égal BDG ont été trouvez ſemblables ; donc DC. DB :: DB. DG : or DB eſt infiniment petite par rapport à DC ; donc DG eſt infiniment petite par rapport à DB, mais DG exprime la force qui retient le corps ſur le polygone, & DB exprime la force qui le lui fait décrire (159). Donc l'une eſt infiniment petite par rapport à l'autre.

213. Lorſque la viteſſe du mobile eſt connue, ou que l'on a ſon expreſſion, on peut avoir auſſi l'expreſſion de la force qui retient le mobile ſur le polygone. Car la proportion précédente fait voir que DG qui exprime cette force, eſt égal au quarré de

DB diviſé par le rayon DC, c'eſt-à-dire, que cette force eſt exprimée par le quarré de la viteſſe du mobile diviſé par le rayon du polygone (10. *Arit.*). On ſuppoſe que la viteſſe eſt exprimée par le côté du polygone.

Si l'on imagine que DC eſt une ligne inflexible qui joint le centre C avec le mobile, & qu'elle tourne par ſon extrêmité D autour du point C, l'autre bout demeurant fixement attaché au centre C, elle décrira l'aire du polygone : or il eſt évident qu'en tems égaux elle décrira des portions égales, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſe le tems en autant de parties égales qu'il y a de côtez au polygone, tandis que le mobile décrira un côté, la ligne décrira le triangle qui a pour baſe ce côté : or tous les triangles ſont égaux, & d'ailleurs le mobile décrit les côtez du polygone en tems égaux ; donc la ligne DC décrira tous les triangles qui compoſent l'aire du polygone en tems égaux.

PROPOSITION TREZIE'ME.

Fig. 39. 40. 214. *Si deux corps égaux* K, Z *décrivent deux polygones réguliers ſemblables, les forces qui les y retiennent font à chaque angle ou à chaque changement de côtez des efforts qui ſont entr'eux comme les viteſſes des mobiles.*

Demonstration. Il faut prolonger les côtez fa, FA juſqu'en b & B, en ſorte que les lignes ab & AB expriment les viteſſes des mobiles, des points b & B mener bd & BD paralleles aux directions ac, AC des forces p & P qui ramenent les corps lorſqu'ils ſont aux angles a & A, en ſorte que ces lignes rencontrent les côtez ag, AG prolongez en d & D, & achever les parallelogrammes bp, BP. Il eſt évident que les mobiles étant aux points a, A y reçoivent du concours d'action des forces dirigées ſuivant ac, AC, & des forces ſuivant ab, AB, des viteſſes qui ſont exprimées par les diagonales ad, AD, ou bien par les côtez ab, AB ; car les triangles abd, ABD ſont iſoceles, d'ailleurs il ſont ſemblables, comme il a été démontré dans la propoſition précédente. Donc bd, BD :: ab. AB : or les lignes bd, BD ou leurs égales ap, AP expriment les efforts que les forces p & P font ſur les mobiles aux points a & A (154.) ; les lignes ab & AB expriment par l'hypotheſe les viteſſes ; donc les efforts que les forces p & P font aux angles a & A ſur les mobiles pour les ramener ſur les côtez ag & AG ſont entr'eux comme les viteſſes des mobiles.

215. L'on nomme tems périodiques ceux que les mobiles emploient à faire un tour.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

216. *Les tems périodiques des mobiles* K, Z *ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe qui eſt entre les diſtances* ac, AC *aux centres* c *&* C *& de la raiſon réciproque des viteſſes, c'eſt-à-dire, que* (4. *Arit.*) *pour avoir la raiſon des tems périodiques, il faut multiplier la diſtance* ac *du mobile* K *par la viteſſe du mobile* Z, *& la diſtance* AC *du mobile* Z *par la viteſſe du mobile* K, *& les tems périodiques des mobiles* K, Z *ſeront dans la même raiſon que ces produits.* On ſuppoſe que les polygones ſont réguliers & ſemblables.

Demonstration. Si les viteſſes des mobiles *K*, *Z* étoient égales, les tems périodiques ſeroient entr'eux comme les eſpaces parcourus (12), c'eſt-à-dire, comme les perimetres des polygones, ou comme les diſtances *ac*, *AC* (24. *Geom.*) ; mais ſi la viteſſe du corps *K* eſt trois fois plus grande que la viteſſe du corps *Z*, le tems du corps *K* ſera trois fois moindre par rapport au tems du corps *Z* ; donc la raiſon de *ac* à *AC* ſera trois fois moins grande que n'eſt la raiſon du tems périodique du corps *K* au tems périodique du corps *Z* ; il s'agit donc de trouver une raiſon trois fois moindre que celle de *ac* à *AC* ; afin que cette nouvelle raiſon ſoit égale à celle des tems périodiques ; or (20. *Arit.*) ſi on multiplie l'antécedent *ac* par un multiplicateur trois fois moindre que n'eſt le multiplicateur du conſéquent *AC*, la raiſon des produits ſera trois fois moindre que la raiſon de *ac* à *AC* : mais par l'hypotheſe la viteſſe du corps *Z* eſt trois fois moindre que la viteſſe du corps *K*. Donc ſi on multiplie la diſtance *ac* par la viteſſe du corps *Z*, & la diſtance *AC* par la viteſſe du corps *K*, la raiſon des produits ſera trois fois moindre que celle de *ac* à *AC*, & par conſéquent égale à celle des tems périodiques. Donc les tems périodiques ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des diſtances *ac*, *AC*, & de la raiſon réciproque des viteſſes.

Les propoſitions précédentes conviennent aux polygones réguliers, quelque ſoit le nombre de leurs côtez ; elles ſont donc vraies par rapport au cercle qui eſt un polygone régulier d'un nombre infini de côtez. Mais les propoſitions ſuivantes ſuppoſent que les polygones ont une infinité de côtez & qu'ils ne different pas du cercle.

217. Lorſque le nombre des côtez d'un polygone eſt infini, ſes côtez ſont auſſi infiniment petits ; c'eſt pourquoi ſi un mobile eſt

mû ſur un tel polygone, on peut ſuppoſer qu'à chaque inſtant il change de côté, & que la force qui le retient ſur le polygone agit ſans relâche, en cela differente de la force qui ramene un mobile qui décrit un polygone d'un nombre fini de côtez, car cette force n'agit ſur le mobile que lorſqu'il arrive à un nouvel angle du polygone: or comme les côtez ſont d'une longueur finie & déterminée, il faut un tems fini pour la décrire; une telle force n'agit donc que par repriſes, & ſon action eſt interrompue par autant de repos que le polygone a de côtez.

218. La force qui ramene un mobile qui décrit un polygone d'un nombre fini de côtez, n'eſt pas la force centrale qui retient un corps qui décrit un polygone d'un nombre infini de côtez; ces deux forces different entr'elles comme la partie & le tout; la premiere eſt l'élément de la ſeconde, & la compoſe. La force centrale n'eſt pas ſimplement celle qui ramene un mobile vers un centre, de plus elle agit ſans interruption, & par conſequent dans le même-tems elle peut agir plus ou moins de fois. On n'auroit donc point le vrai rapport de deux forces centrales, ſi on déterminoit ces forces par les ſimples efforts qu'elles font à chaque changement de côtez. Il faut de plus faire entrer dans ce rapport le nombre d'efforts qu'elles ont produits en même-tems.

PROPOSITION QUINZIE'ME.

219. *Si deux mobiles* K, Z *décrivent deux polygones réguliers d'un nombre infini de côtez, par conſéquent ſemblables entr'eux, les forces centrales ſont entr'elles comme les produits des viteſſes des mobiles, & des nombres des côtez qu'ils parcourent en même-tems ſur les polygones qu'ils décrivent; ou en raiſon compoſée des viteſſes & des nombres des côtez décrits en même-tems.*

DEMONSTRATION. Si les mobiles K, Z parcouroient en même-tems le même nombre de côtez chacun ſur le polygone qu'il décrit, les forces centrales ſeroient entr'elles comme les viteſſes (214); mais ſi le mobile K parcourt en même-tems un nombre de côtez double ou triple, il faudra que la force centrale qui le ramene renouvelle ſon action ou ſon effort trois fois davantage, il faudra donc que cette force ſoit triple de ce qu'elle eût été ſi les mobiles euſſent parcouru le même nombre de côtez, puiſqu'en même-tems elle produit un effort triple; donc la raiſon des viteſſes ſera trois fois moindre que n'eſt la raiſon des forces centrales: or pour avoir une raiſon trois fois plus grande que la raiſon des viteſſes, & par conſéquent égale à celle des

forces centrales, il faut multiplier la viteſſe du mobile K par un multiplicateur trois fois plus grand que n'eſt le multiplicateur de la viteſſe du mobile Z (20. *Arit.*) ; mais par l'hypotheſe le nombre de côtez que le mobile K parcourt, eſt triple du nombre de côtez que le mobile Z parcourt en même-tems ; donc ſi on multiplie les viteſſes des mobiles par les nombres des côtez qu'ils parcourent en même-tems, la raiſon des produits ſera trois fois plus grande que la raiſon des viteſſes, & par conſéquent égale à celle des forces centrales. Donc les forces centrales ſont entr'elles comme les produits des viteſſes & des nombres des côtez que les mobiles parcourent en même-tems. Comme il n'y a que le cercle qui ſoit un polygone régulier d'une infinité de côtez, il eſt viſible, comme on en a averti un peu auparavant, que cette propoſition n'eſt vraie que par rapport au cercle.

220. M. Neuton avertit dans le ſcholie de la propoſition 4e. de ſes principes, que ſi un corps eſt mû ſur le périmetre d'un polygone inſcrit dans le cercle, la force avec laquelle il preſſe à chaque angle le nouveau côté du polygone, eſt exprimée par ſa viteſſe, & que la ſomme des forces ou des preſſions eſt exprimée par le produit de ſa viteſſe & du nombre des preſſions. L'idée ſous laquelle M. Neuton préſente la force centrale eſt ſimple, & elle a de plus cet avantage, qu'elle conduit l'eſprit juſqu'à la ſource & qu'elle le fait entrer dans le fond même de la choſe. On a cru qu'il n'étoit pas hors de propos de la développer, comme on vient de faire dans ces élémens, où l'on doit s'attacher autant qu'il eſt poſſible à la ſimplicité. Cette idée eſt de plus fort féconde, c'eſt pour montrer l'uſage qu'elle peut avoir, qu'après avoir démontré la propoſition ſuivante, on en déduira par maniere de Corollaires, les principales propoſitions que l'on démontre ſur la force centrale dans le cercle, en conſidérant cette figure comme un polygone régulier d'une infinité de côtez.

PROPOSITION SEZIE'ME.

221. *Les nombres de côtez que les mobiles* K, Z *parcourent en même-tems ſur deux polygones réguliers d'un nombre infini de côtez, ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des viteſſes & de la raiſon réciproque des rayons ou diſtances aux centres* ac, AC. Fig. 39. 40.

Demonstration. Si les côtez d'un polygone étoient égaux aux côtez de l'autre, les mobiles en parcourroient à proportion des viteſſes ; une viteſſe double en feroit parcourir un nombre double en tems égal, une viteſſe triple un nombre triple dans le

même-tems (4) ; mais si l'un des polygones a ses côtez trois fois moindres, le mobile qui le décrit conservant la même viteſſe en parcourra un nombre trois fois plus grand ; ainſi ſi les côtez du polygone décrit par le mobile K ſont trois fois moindres que les côtez du polygone décrit par le mobile Z, le mobile K conſervant la même viteſſe parcourra en même-tems un nombre de côtez triple ; la raiſon du nombre de côtez décrits par le mobile K au nombre de côtez décrits en même-tems par le mobile Z, ſera donc triple de la raiſon des viteſſes (18. *Arit.*). Pour avoir donc le vrai rapport des nombres de côtez décrits en même-tems, il faut trouver un rapport triple du rapport des viteſſes ; or l'on aura ce rapport ſi on multiplie la viteſſe du mobile K par un multiplicateur qui ſoit triple du multiplicateur de la viteſſe du mobile Z (20. *Arit.*) ; mais par l'hypotheſe les côtez que décrit le mobile Z ſont trois fois plus grands que les côtez que décrit le mobile K ; donc le rayon ou diſtance AC eſt trois fois plus grande que le rayon ou diſtance ac (24. *Géom.*) ; donc ſi on multiplie la viteſſe du mobile K par la diſtance AC & la viteſſe du mobile Z par la diſtance ac, la raiſon des produits ſera trois fois plus grande que la raiſon des viteſſes, & par conſéquent égale à la raiſon des nombres de côtez décrits en même-tems. Donc, &c.

Fig. 39. 40. 222. *Les forces centrales des mobiles* K, Z *qui décrivent deux cercles conſiderez comme des polygones réguliers d'une infinité de côtez, ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes diviſez par les rayons.*

DEMONSTRATION. Si l'on nomme (f) la force centrale du corps K, (v) ſa viteſſe, (n) le nombre de côtez qu'il décrit, (F) la force centrale du corps Z, (V) ſa viteſſe, (N) le nombre des côtez qu'il décrit en même-tems, l'on aura $f . F :: nv . NV$ (219). L'on aura d'un autre côté $n . N :: v \times AC . V \times ac$ (221). Donc $f . F :: v^2 \times AC . V^2 \times ac$, en mettant dans la premiere porportion les deux termes du ſecond rapport de la ſeconde au lieu de n & N (14. *Arit.*) ; or ſi on diviſe les deux derniers termes de cette troiſiéme proportion, d'abord par AC & enſuite par ac, on aura $f . F :: \frac{v^2}{ac} . \frac{V^2}{AC}$; c'eſt-à-dire, que les forces centrales ſont dans la raiſon des quarrez des viteſſes diviſez par les rayons. Au lieu des rayons on pourroit mettre les diametres qui ſont dans la même raiſon.

En nombres. Suppoſons que la viteſſe du corps K ſoit triple de celle du corps Z, & que la petite circonférence ou périmetre

ſoit

ſoit la moitié de la grande, les côtez *ag* de la petite ſeront la moitié des côtez *AG* de la grande. Cela étant ſi les côtez des deux circonférences étoient égaux, le corps *K* en décriroit trois avec une viteſſe triple, tandis que le corps *Z* en décriroit 1. Mais les côtez de la petite circonférence ne ſont que la moitié de ceux de la grande; donc le corps K en décrira le double de ce qu'il en auroit décrit, c'eſt-à-dire, qu'il en parcourra ſix dans le tems que le mobile *Z* n'en parcourra qu'un. Si l'on multiplie les nombres 6 & 1 des côtez décrits par les viteſſes 3 & 1, les forces centrales ſeront comme ces produits, c'eſt-à-dire, comme 18 & 1, ou comme $\frac{9}{1}$ & $\frac{1}{2}$ en diviſant les deux nombres par 2, & le quotient 9 par 1, ce qui ne change point ſa valeur. Or les numérateurs de ces fractions ſont les quarrez des viteſſes, & les dénominateurs ſont les rayons *ac*, *AC* qui ſont entr'eux comme 1 & 2, donc les forces centrales des mobiles *K*, *Z*, ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes diviſez par les rayons ou les diametres.

223. Si les rayons *ac*, *AC* ou les diametres ſont égaux, les forces centrales ſont comme les quarrez des viteſſes. On peut auſſi faire voir cette propoſition en nombres.

224. Voici la démonſtration ordinaire de la force centrale conſiderée dans le cercle lorſque la direction de cette force tend au centre. Fig. 41. 42.

Suppoſons que les viteſſes des mobiles ſoient exprimées par *ab* & *AB* qui ſont les tangentes menées des points *a* & *A* où les mobiles ſe trouvent en même-tems, ſi des points *b* & *B* l'on mene les lignes *bd*, *BD* paralleles aux rayons *ac*, *AC* qui paſſent par les points de contingence *a* & *A*, en ſorte que les arcs *ad*, *AD* ſoient décrits en même-tems par les mobiles, que par les points *d*, *D*, l'on mene *dp*, *DP* paralleles aux tangentes *ab*, *AB*, on formera les parallelogrammes *bp*, *BP*; & parce qu'on ſuppoſe que les arcs *ad*, *AD* ſont très-petits ou indéfiniment petits, on pourra les regarder comme les diagonales des parallelogrammes *bp*, *BP*, ou encore comme étant égaux aux côtez *ab*, *AB*, ou *dp*, *DP*. Cela poſé puiſque le corps *K*, *Z* décrivent les diagonales *ad*, *AD* par l'action conjointe des forces centrales, & des forces quils ont ſuivant les tangentes *ab*, *AB*, & que d'ailleurs les tems par les arcs *ad*, *AD* ſont égaux, il s'enſuit que les efforts que les forces centrales produiſent en même-tems, ſont exprimez par les côtez *ap*, *AP* des parallelogrammes *pb*, *BP*. Or les deux triangles *ado*, *ADO* étant rectangles (33. *Géom.*), & les lignes *dp*,

DP étant perpendiculaires aux rayons ac, AC, l'on aura ao. $ad :: ad . ap = \frac{\overline{ad}^2}{ao}$ & $AO . AD :: AD . AP = \frac{\overline{AD}^2}{AO}$, c'eſt-à-dire, que les lignes ap & AP qui expriment les forces centrales ſont entr'elles comme les quarrez des arcs décrits en même-tems diviſez par les diametres ao, AO ; mais les arcs ad, AD ſuppoſez égaux aux lignes ab, AB, expriment les viteſſes ; donc les quarrez des arcs ad, AD expriment les qurrez des viteſſes. Donc les forces centrales ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes diviſez par les diametres ao, AO, ou les rayons ac, AC.

225. *Si les viteſſes ſont égales, les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les rayons ou diametres des circonférences.* Car puiſque par l'hypotheſe les viteſſes ſont égales, les quarrez des viteſſes ſont égaux ; donc ſi on diviſe ces deux quarrez égaux par deux diviſeurs tels que ſont les diametres ao, AO, les quotiens ſeront entr'eux réciproquement comme les diviſeurs ao, AO (23. *Arit.*) ; mais les forces centrales ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes diviſez par les diametres ao, AO (222). Donc les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les diametres ao, AO ou comme les rayons ac, AC.

226. *Si les mobiles décrivent leurs circonférences en des tems égaux les forces centrales ſont entr'elles comme les diametres.*

Les forces centrales ſont comme les viteſſes multipliées par les nombres de côtez que les mobiles décrivent en même-tems (219) ; or les côtez décrits de part & d'autre en même-tems, ſont en nombre égal, puiſque les mobiles achevent leur tour en même-tems, & que d'ailleurs les circonférences ont l'une & l'autre le même nombre de côtez ; donc ſi on diviſe par la penſée les produits dont on vient de parler, qu'on les diviſe, dis-je, par le nombre des côtez, les forces centrales qui ſont entr'elles comme ces produits, ſont auſſi entr'elles comme les viteſſes des mobiles (8. *Arit.*) ; mais lorſque les tems des mouvemens ſont égaux, les viteſſes ſont comme les eſpaces parcourus (4) ; donc les viteſſes ſont entr'elles comme les circonférences ou comme les diametres ; donc les forces centrales qui ſont comme les viteſſes ſont entr'elles comme diametres.

227. *Si les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diametres ou des rayons.*

Par l'hypotheſe l'on a $v . V :: \sqrt{AC} . \sqrt{ac}$; donc $v^2 . V^2 :: AC . ac$ (24. *Arit.*) : de plus les forces centrales ſont entr'elles comme les viteſſes multipliées par les nombres des côtez décrits en même-tems, c'eſt-à-dire $f . F :: nv . NV$ (219) ; l'on a encore $n . N :: v \times AC . V \times ac$ (221) ; c'eſt-à-dire, les nombres des côtez décrits en même-tems ſont en raiſon compoſée des viteſſes, & de la réciproque des rayons. Donc $f . F :: v^2 \times AC . V^2 ac$ (14. *Arit.*), en mettant dans la premiere proportion au lieu du rapport de n à N, le ſecond rapport de la ſeconde proportion ; mais on vient de voir que $v^2 . V^2 :: AC . ac$; donc ſi dans la derniere proportion qu'on vient de former, au lieu du rapport de v^2 à V^2, on met le rapport de AC à ac qui lui eſt égal, on aura $f . F :: \overline{AC}^2 . \overline{ac}^2$ (14. *Arit.*) ; c'eſt-à-dire, que les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diametres.

En nombres. Suppoſons que la viteſſe du mobile K ſoit double de la viteſſe du mobile Z. Par l'hypotheſe, la racine quarrée du rayon AC, ou du diametre AO ſera double de la racine quarrée du rayon ac, ou du diametre ao ; c'eſt-à-dire, comme 2 eſt à 1 ; donc les diametres AO, ao ſeront entr'eux comme 4 & 1, puiſque leurs racines quarrées ſont entr'elles comme 2 & 1 ; donc la circonférence décrite par le corps Z eſt quadruple de la circonférence décrite par le corps K (13. *Géom.*). Puiſque le diametre AC eſt quadruple du diametre ac, les côtez de la grande circonférence ſeront auſſi quadruples de ceux de la petite (24. *Géom.*). Donc ſi la viteſſe du corps K étoit égale à celle du corps Z, il parcourroit quatre côtez pendant le tems que le mobile Z en parcourroit 1 ; donc avec une viteſſe double il en parcourra 8, & le corps Z 1 ; or ſi on multiplie les nombres des côtez 8 & 1, par les viteſſes 2 & 1, les forces centrales des corps K, Z ſeront en même raiſon que les produits 16 & 1 (219) : mais les nombres 16 & 1 ſont les quarrez des diametres pris réciproquement. Donc les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diametres ou des rayons. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie, ſçavoir, que ſi les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diametres, les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons.

228. *Si les viteſſes des mobiles* K, Z *ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, les*

quarrez des tems périodiques ſont comme les cubes des rayons ou des diametres des circonferences décrites.

On nommera (t) le tems périodique du corps K, (T) le tems périodique du corps Z.

Puiſque par l'hipotheſe $v . V :: \sqrt{AC} . \sqrt{ac}$; donc $v^2 . V^2 :: AC . ac$ (24. *Arit.*), on a fait voir ci-devant que $t . T :: acxV . ACxv$ (216); donc $t^2 . T^2 :: acxV^2 . ACxv^2$ (24. *Arit.*). Si dans cette proportion au lieu du rapport de v^2 à V^2, on met celui de ac à AC qui lui eſt égal, comme on vient de voir, on aura $t^2 . T^2 :: ac^3 . AC^3$; c'eſt-à-dire, que les quarrez des tems périodiques ſont entr'eux comme les cubes des rayons ou des diametres.

En nombres. Suppoſons que le diametre AO, ou le rayon AC de la grande circonférence eſt quadruple de celui de la petite, le corps K qui décrit la petite circonférence, aura une viteſſe double, puiſque par l'hypotheſe les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres 1 & 4, c'eſt-à-dire, comme 2 & 1, de plus les côtez de la grande circonférence ſeront quatre fois plus grands que ceux de la petite. Donc le corps K avec une viteſſe double parcourra 8 côtez tandis que le mobile Z en parcourra 1; donc le corps K aura achevé ſon tour 8 fois plutôt que le mobile Z, en ſorte que lorſque le corps K aura fait ſa révolution, le corps Z n'aura parcouru que la 8e partie de ſa circonférence. Donc les tems périodiques ſont entr'eux comme 1 & 8, & leurs quarrez comme 1 & 64: or les diſtances ac, AC étant entr'elles comme 1 & 4, leurs cubes ſont auſſi 1 & 64; donc les quarrez des tems périodiques ſont comme les cubes des rayons ou des diametres.

229. D'où l'on voit que les tems périodiques ſont comme les racines quarrées des cubes des diſtances ou des rayons.

L'obſervation a fait découvrir que les quarrez des tems périodiques des planetes qui tournent autour d'un centre commun qui eſt le Soleil, ſont comme les cubes des diſtances à ce centre. D'où il ſuit que ſi les planetes décrivent des cercles autour de ce centre commun, d'un mouvement uniforme, leurs viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diſtances au centre commun de leurs mouvemens.

On pourroit démontrer par la même méthode pluſieurs autres propoſitions touchant les forces centrales des mobiles qui décrivent des circonférences. Mais ce qui vient d'en être dit ſuffit pour

montrer de qu'elle maniere on peut l'appliquer dans l'occaſion.

Après avoir conſideré les corps en tant qu'ils ſont mus ſur des polygones réguliers & dans le cercle qui en eſt une eſpece, on va voir quelles ſont les circonſtances de leurs mouvemens lorſqu'ils décrivent des polygones irréguliers

DU MOUVEMENT D'UN CORPS QUI DE'CRIT un polygone irrégulier, & de la force centrale dans l'ellipſe.

230. On vient de voir que ſi un mobile décrit un polygone régulier, & que la force qui l'y retient ſoit dirigée au centre du polygone, cette force eſt par tout égale à elle-même, & que le mobile eſt mû d'une viteſſe uniforme; mais ſi la force centrale rechaſſe le mobile vers tout autre point que le centre, ſes efforts ſeront inégaux, & la viteſſe du mobile tantôt plus grande, tantôt moindre, quand même le polygone décrit, ſeroit régulier; ſi le polygone eſt irrégulier, il n'y a point de doute que la force qui contraint le mobile à le décrire ne varie à chaque moment, & que la viteſſe ne ſoit tantôt accélerée, tantôt retardée; le polygone régulier eſt donc la ſeule de toutes les figures qu'un mobile puiſſe décrire d'un mouvement uniforme, & où la force centrale ſoit par tout égale. Tout mouvement inégal en ligne courbe eſt néanmoins accompagné d'une ſorte d'égalité qui en eſt comme inſéparable, lorſque la force qui retient le mobile ſur la courbe dirige conſtamment ou ſans ceſſe, ſon action vers un même point. Voici en quoi conſiſte cette égalité. On a vû ci-devant que le rayon qui joint le mobile avec le centre du polygone, & qu'on peut appeller *rayon vecteur*, décrit des portions égales de l'aire du polygone en tems égaux, ou des aires qui ſont proportionnelles aux tems; en ſorte que ſi l'on diviſe le tems en autant de parties que le polygone a de côtez, & le polygone pareillement en tout autant de triangles qui aient leurs ſommets au centre, & leurs baſes ſur les côtez du polygone, les triangles décrits en tems égaux ſont égaux, & leur ſomme augmente en même raiſon que les tems. Or cette propriété a lieu lors même que la force centrale fait décrire un polygone irrégulier. Ainſi qu'on va voir.

PROPOSITION DIX-SEPTIE'ME.

231. *Si un corps décrit le périmetre d'un polygone irrégulier par la viteſſe une fois imprimée, & par l'action d'une force qui ſoit dirigée vers un même centre, le rayon vecteur décrira des aires proportionnelles aux tems.*

Fig. 43. DEMONSTRATION. Suppoſons que la viteſſe initiale du corps K ſuivant AB eſt exprimée par cette ligne. Lorſqu'il ſera arrivé au point B il continueroit de ſe mouvoir vers G, & parcourroit BG égale à AB dans le tems qu'il eſt allé de A en B ; mais la force centrale qui le trouve en B le détourne de ſa direction ; & parce qu'on ſuppoſe que cette force le ramene vers le centre C, il s'enſuit que le corps K après ce premier effort ſera mû ſuivant une autre direction que l'on ſuppoſe être BD. Donc ſi du point G on mene GD parallele à BC qui eſt la direction de la force qui ramene le mobile, que l'on acheve le parallelogramme GH, BD diagonale du parallelogramme ſera la viteſſe du mobile, en ſorte qu'il la parcourra dans le même-tems que AB ou dans le même-tems qu'il parcourroit BG = AB (156.), le mobile étant au point D, continueroit ſa route vers E, & parcourroit DE égale à BD dans le même tems ; mais la force centrale qui le rencontre en D le détourne & le ramene ſur DF. Si du point E on mene EF parallele à la direction DC de cette force, qu'on acheve le parallelogramme EN, la diagonale DF exprimera la viteſſe du mobile (156.), qui étant arrivé au point F parcourroit FI égale à DF dans le même-tems ; mais la force centrale qui le trouve en F, le ramene ſur EL ; ſi du point I on mene IL parallele à la direction FC de la force centrale, qu'on acheve le parallelogramme IM, FL exprimera la viteſſe du mobile, &c.

Il eſt évident que le mobile a décrit en des tems égaux les diagonales BD, DF, FL, &c. Et que les triangles BCD, DCF, FCL, qui ont pour baſes ces mêmes diagonales, ſont les triangles ou les aires que le rayon vecteur a décrits en tems égaux. Il faut donc montrer que ces triangles ſont égaux. Il faut mener CE & CI. Le triangle BCD eſt égal au triangle DCE ; car ces deux triangles ont leurs baſes BD, DE ſur la même ligne, & égales par l'hypotheſe : de plus ils ont même hauteur, puiſqu'ils ont le même ſommet C, donc ils ſont égaux (36. *Géom.*) ; mais le triangle DCF eſt égal au triangle DCE (36. *Géom.*) ; car ils ont même baſe DC, & ils ſont compris entre mêmes paralleles CD, EF ; donc les triangles BCD, DCF ſont égaux. Les triangles DCF, FCI ont leurs ſommets aux points C, & leurs baſes par l'hypotheſe égales, ſont ſituées ſur la même ligne DI ; donc ils ſont égaux (36. *Géom.*). Or le triangle FCI eſt égal au triangle FCL (36. *Géom*), car ces deux triangles ont même baſe CF, & ſont compris entre mêmes paralleles ; donc le triangle FCL

eſt égal au triangle DCF. Donc le rayon vecteur décrit en tems égaux des aires égales. Par conſéquent les aires décrites ſont proportionnelles aux tems.

232. Si on ſuppoſe que les côtez BD, DF, FL du polygone qui ſont les baſes des triangles décrits ſont infiniment petits, ils compoſeront une courbe, & les aires décrites ſeront encore comme les tems, car la démonſtration eſt indépendante de la grandeur des triangles. Donc ſi un corps eſt mû ſur une courbe, & que la force centrale ſoit dirigée conſtamment vers un même point, par la viteſſe une fois imprimée, & par l'action non interrompue de cette force, il décrira des aires proportionnelles aux tems.

On ſuppoſe que la courbe eſt convexe en dehors, c'eſt-à-dire, du côté oppoſé au point vers lequel la force centrale repouſſe le mobile.

233. On a fait voir que ſi un corps décrit un polygone régulier, & que la force qui le retient dirige ſon action conſtamment au centre, il eſt mû avec une viteſſe uniforme; & que le cercle étant un polygone régulier étoit compris dans la même loi; or on peut encore déduire la même vérité de ce qui vient d'être dit. Car le rayon vecteur décrit en tems égaux des aires égales, ou ce qui revient au même, des ſecteurs égaux. Or ces ſecteurs ſont terminez par des arcs égaux; donc le mobile décrit ſur la circonférence du cercle des arcs égaux en tems égaux; donc il eſt mû d'une viteſſe uniforme.

234. *Si la force centrale qui retient un corps ſur la circonférence d'un cercle, dirige ſon action vers un même point, mais different du centre, elle n'eſt pas la même par tout, & la viteſſe du mobile varie continuellement.*

1°. La viteſſe du mobile change ſans ceſſe, ſoit en augmentant, ſoit en diminuant. Car comme le rayon vecteur décrit en tems égaux des ſecteurs ou des aires égales, que d'ailleurs ces ſecteurs ont leur ſommet commun en un point different du centre, il s'enſuit que les arcs qui les terminent ſont inégaux, le mobile décrit donc des arcs inégaux en tems égaux; donc ſa viteſſe eſt inégale.

2°. La force centrale eſt auſſi inégale. Cette force doit varier ſelon que le mobile tourne plus ou moins vîte; car toutes choſes étant d'ailleurs égales, plus la viteſſe eſt grande, plus il faut de force pour détourner le corps: il en faut encore davantage plus l'arc décrit contient de petits côtez, car à chaque nouveau

côté la force produit un nouvel effort. Donc ſi la force centrale dirige ſon action vers un point different du centre du cercle, elle eſt inégale à elle-même.

235. Comme il n'y a que le cercle qu'on puiſſe diviſer en ſecteurs égaux qui ſoient terminez en même-tems par des arcs égaux, en menant des lignes du centre à la circonférence, ou dont les ſecteurs ſoient dans la même raiſon que les arcs qui les terminent, il s'enſuit que la ligne circulaire eſt la ſeule de toutes les courbes qu'un mobile puiſſe parcourir d'un mouvement uniforme, lorſqu'après avoir reçu une certaine viteſſe il eſt abandonné à lui-même & à l'action de la force centrale, encore ce n'eſt qu'au cas que cette force dirige ſon action au centre du cercle. Car pour que la viteſſe du mobile ſoit uniforme, il faut que le rayon vecteur en traçant des aires égales en des tems égaux, décrive auſſi par ſon extrêmité mobile des arcs égaux : or il eſt viſible que le cercle eſt la ſeule figure où ces deux conditions ſe trouvent à la fois, encore faut-il que la direction de la force centrale paſſe par le centre. Donc, &c.

236. *Le mobile doit accélerer ſa viteſſe, & ſa force centrale doit augmenter à meſure qu'il s'approche du centre vers lequel il eſt repouſſé :* Car comme les aires ou ſecteurs que le rayon vecteur décrit en tems égaux ſont égaux, & que d'ailleurs plus le mobile s'approche du centre, plus ces ſecteurs ont des hauteurs de plus en plus petites, il faut qu'ils regagnent par une plus grande baſe ce qui leur manque en hauteur, afin que l'égalité ſubſiſte, il faut donc que les arcs qui terminent ces ſecteurs ſoient plus grands : or ces mêmes arcs expriment les differentes viteſſes du mobile ; donc cette viteſſe doit augmenter à meſure que la portion de la courbe qui eſt actuellement décrite eſt plus proche du centre. Une plus grande viteſſe demande une plus grande force centrale ; donc la force centrale augmente à meſure que l'aire décrite eſt plus proche. Par une raiſon contraire plus le mobile s'éloigne du centre vers lequel il eſt pouſſé, plus la viteſſe doit être retardée ; donc la force centrale doit diminuer, en ſorte que le mobile étant le plus éloigné de ce centre, ſa viteſſe doit être plus petite que par tout ailleurs, & la force centrale être moindre qu'en tout autre point.

237. Pour déterminer le rapport de la force centrale dans l'ellipſe, il eſt néceſſaire de connoître certaines proprietez de cette courbe ; or parmi celles dont on a beſoin ici, les unes ſont démontrées dans tous livres qui traitent de la nature de l'ellipſe, &

& qu'on ſuppoſera connues; il y a d'autres proprietez qui ne s'y trouvent pas communément déduites, & on en infere ici les démonſtrations, afin que le lecteur ne ſoit pas arrêté, ſuppoſé qu'il ne ſçache pas où elles ſe trouvent.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

238. *Si un corps décrit une ellipſe* ADBE, *& que la force centrale le ramene vers le foyer* F, *les efforts qu'elle fait aux points* g, G, *pour le retenir ſur la courbe, ſont entr'eux réciproquement comme les quarrez des diſtances* gf, GF, *c'eſt-à-dire, que la force centrale en* g *eſt à la force centrale en* G *comme* $\overline{GF}^2$ *eſt à* $\overline{gf}^2$. Fig. 44.

Demonstration. Suppoſons que le mobile décrit en des tems égaux, les petits arcs GR, gr par les points R, r, il faut mener RK, rk paralleles aux tangentes GN, gn, qui rencontrent GF & gf aux points K, k, & mener encore RS, rf perpendiculaires aux diſtances FG, fg. Cela fait, il eſt aiſé de voir que les arcs GR, gr étant décrits en même-tems ou en des tems égaux, les portions GK, gk ſont les eſpaces que la force centrale fait parcourir au mobile ſuivant ſa direction GF, gf, puiſque pendant ces mêmes tems elle le rapproche du foyer F des quantitez GK, gk; donc les efforts de la force centrale en G, g, ſont entr'eux comme GK & gk. Il faut donc faire voir que les petites portions GK & gk ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diſtances FG, fg. Les tems par les arcs GR, gr étant égaux, les aires FGR, fgr que les rayons vecteurs FG, fg décrivent ſont auſſi égales (231). D'ailleurs on peut regarder ces arcs comme deux lignes droites qui ſervent de baſes aux triangles FGR, fgr, parce que les tems que les mobiles emploient à les parcourir, ſont ſuppoſez fort courts. Cela étant, on aura une aire double de ces triangles en multipliant les baſes FG, fg par les hauteurs RS, rf (34. *Geom.*). Donc $GF \times RS = gf \times rf$; donc $RS . rf :: gf . GF$ (11. *Arit.*); donc $\overline{RS}^2 . \overline{rf}^2 :: \overline{gf}^2 . \overline{GF}^2$ (24. *Arit.*); mais par le (6e article de l'ellipſe) $GK \times P = \overline{RS}^2$ & $gk \times P = \overline{rf}^2$; donc $\overline{RS}^2 . \overline{rf}^2 :: GK \times P . gk \times P$, & après avoir diviſé les deux termes du ſecond rapport par le parametre P du grand axe ED, $\overline{RS}^2 . \overline{rf}^2 :: GK . gk$ (8. *Arit.*). Or on vient de voir que

$\overline{RS}^2 . rf :: gf . GF$; donc $GK . gk :: \overline{gf}^2 . \overline{GF}^2$ (14. *Arit.*) ; c'eſt-à-dire, que les efforts de la force centrale en G & g, ſont entr'eux réciproquement, comme les quarrez des diſtances au foyer F où le mobile eſt continuellement repouſſé.

Fig. 44. 239. *Les viteſſes avec leſquelles le mobile eſt mû aux différens points* g, G *de l'ellipſe, ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées du foyer* F *ſur les tangentes* gn, GN. Car les aires FGR, fgr que le rayon vecteur décrit en même-tems, ou en tems égaux, ſont égales ; d'ailleurs les arcs GR, gr étant ſuppoſez indéfiniment petits, ſe confondent avec les tangentes GN, gn, en ſorte que les perpendiculaires aux tangentes meſurent les hauteurs des aires ou triangles FGR, fgr, qui ont pour baſes les arcs GR, gr ; ces aires étant égales, il s'enſuit que les baſes, c'eſt-à-dire, les arcs GR, gr ſont entr'eux réciproquement comme les hauteurs ou perpendiculaires menées du foyer F ſur les tangentes (35. *Géom.*) ; mais les viteſſes du mobile aux points G, g ſont entr'elles comme les arcs GR, gr décrits en même-tems (4) ; donc elles ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires aux tangentes GN, gn menées du foyer F.

240. Lorſque le mobile eſt aux points E, D de l'ellipſe qui terminent le grand axe, les perpendiculaires aux tangentes ſont les diſtances FE, FD ; donc les viteſſes que le mobile a à ces points, ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances au foyer.

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

Fig. 45. 241. *Si deux corps décrivent deux ellipſes qui aient un même foyer* F *vers lequel ils ſoient repouſſez par les forces centrales qui les leur font décrire, que ces mêmes forces ſoient entr'elles réciproquement comme les quarrez des diſtances au foyer* F, *je dis que les aires que les rayons vecteurs décrivent en même-tems, ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres des grands axes des ellipſes décrites.*

Domonstration. On ſuppoſe que les arcs GR, gr ſoient décrits en même-tems, & par conſéquent les aires FGR, fgr ſeront auſſi décrites en même-tems par les rayons vecteurs, & les forces centrales entr'elles réciproquement comme les quarrez $\overline{FG}^2$, $\overline{fg}^2$, elles ſont encore entr'elles comme les petites portions GK, gk qu'elles font parcourir en même-tems aux

mobiles en les approchant ſuivant leurs directions GF, gf, du foyer F. Donc $GK . gk :: fg . FG$; ſi on nomme P le parametre du grand axe de la grande ellipſe, p le parametre du grand axe de la moindre, on aura $\overline{RS}^2 = GK \times P$, & $\overline{rf}^2 = gk \times p$ (6e article de l'ellipſe). Donc $\overline{RS}^2 . \overline{rf}^2 :: GK \times P . gk \times p$; On vient de voir que $GK . gk :: \overline{gf}^2 . \overline{GF}^2$. Donc ſi dans la proportion précedente au lieu du rapport de GK à gk, on met le rapport de $\overline{gf}^2$ à $\overline{GF}^2$ qui lui eſt égal, on aura $\overline{RS}^2 . \overline{rf}^2 :: \overline{gf}^2 \times P . \overline{GF}^2 \times p$ (14. *Arit.*). Donc $\overline{RS}^2 \times \overline{FG}^2 \times P = \overline{rf}^2 \times \overline{fg}^2 \times p$ (13. *Arit.*). Donc $\overline{RS}^2 \times \overline{FG}^2 . \overline{rf}^2 \times \overline{fg}^2 :: P . p$ (11. *Arit.*). Donc $\overline{RS}^2 \times \overline{FG}^2 . \overline{rf}^2 \times \overline{fg}^2 :: \sqrt{P} . \sqrt{p}$ (24. *Arit.*); mais les aires décrites ſont les moitiez des rectangles exprimez par les produits $RS \times FG . rf \times fg$ (34. *Géom.*); donc les aires FGR, fgr décrites en même-tems par les rayons vecteurs des mobiles, ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres des grands axes des ellipſes ſur leſquelles les corps ſont mus.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

242. *Si deux corps ſont mus ſur deux ellipſes qui aient un même foyer* F, *que les forces centrales qui les ramenent vers ce foyer commun ſoient entr'elles réciproquement comme les quarrez de diſtances* g f, GF : *je dis que les quarrez des tems périodiques ſont entr'eux comme les cubes des grands axes* e d, ED. Fig. 45.

On nommera T le tems périodique du mobile qui eſt mû ſur la grande ellipſe, (t) le tems périodique du mobile qui eſt mû ſur la moindre. Cela étant, ſi l'on multiplie les aires que les rayons vecteurs des mobiles décrivent en même-tems par les tems périodiques, on aura les aires décrites pendant les tems périodiques, c'eſt-à-dire, les aires des ellipſes. Les aires décrites en même-tems ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres P, p (241); donc $T \times \sqrt{P}$ & $t \times \sqrt{p}$ ſont dans la même raiſon que les aires des ellipſes. C'eſt une propoſition très connue que ces mêmes aires ſont entr'elles comme les rectangles faits ſous leurs axes, c'eſt-à-dire comme $ED \times AB$ & $ed \times ab$ (7. de l'ellipſe); donc $T \times \sqrt{P} . t \times \sqrt{p} :: ED \times AB . ed \times ab$. Si on eleve ces quatre termes au quarré, on aura $T^2 \times P . t^2 \times p$

$:: \overline{ED}^2 \times \overline{AB}^2 . \overline{ed}^2 \times \overline{ab}^2$ (24. *Arit.*) ; mais l'on a auſſi par la propriété de l'ellipſe $\overline{AB}^2 = ED \times P$ & $\overline{ab}^2 = ed \times p$ (8. de l'ellipſe). Si dans la proportion au lieu de $\overline{AB}^2$ & $\overline{ab}^2$ on met leurs valeurs, on aura $T^2 \times P . t^2 \times p :: \overline{ED}^3 \times P . \overline{ed}^3 \times p$, diviſant le premier & le troiſiéme terme par P, le ſecond & le quatriéme par p, on aura $T^2 . t^2 :: \overline{ED}^3 . \overline{ed}^3$.

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.

243. *Les viteſſes avec leſquelles les mobiles ſont mus, ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres* p & P *diviſées par les perpendiculaires menées du foyer* F *ſur les tangentes aux points où les mobiles ſe trouvent.*

DEMONSTRATION. Les aires que les rayons vecteurs décrivent en même-tems, ſont entr'elles comme les produits $GR \times FL$ & $gr \times fl$; or ces produits ſont entr'eux comme les racines quarrées des parametres P & p, en ſorte que $GR \times FL . gr \times fl :: \sqrt{P} . \sqrt{p}$ (241). Si on diviſe le premier & le troiſiéme terme par FL, qu'on diviſe le ſecond & le quatriéme par fl, on aura encore la proportion $GR . gr :: \frac{\sqrt{P}}{FL} . \frac{\sqrt{p}}{fl}$, c'eſt-à-dire, que les viteſſes exprimées par les arcs GR, gr, ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres diviſées par les perpendiculaires FL, fl.

Fin du premier Livre.

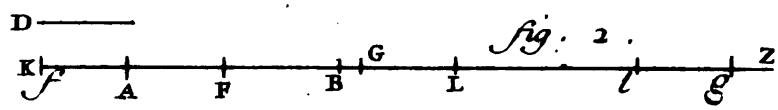


fig. 2.

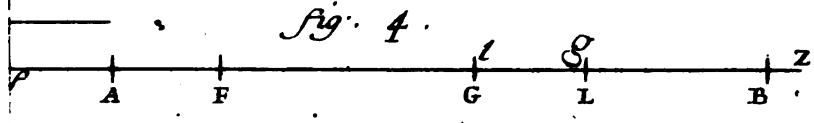


fig. 4.

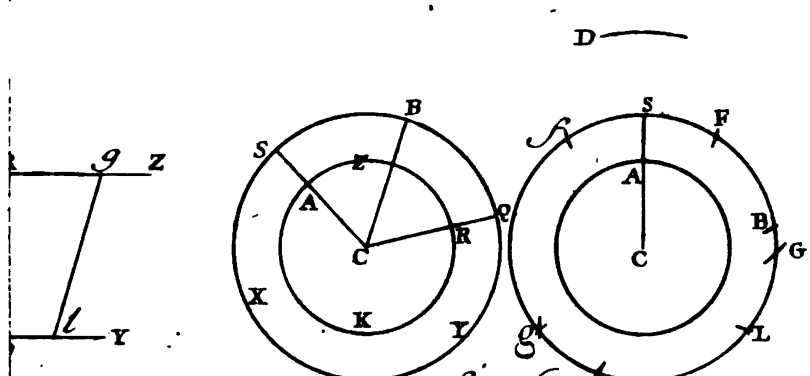


fig. 6.

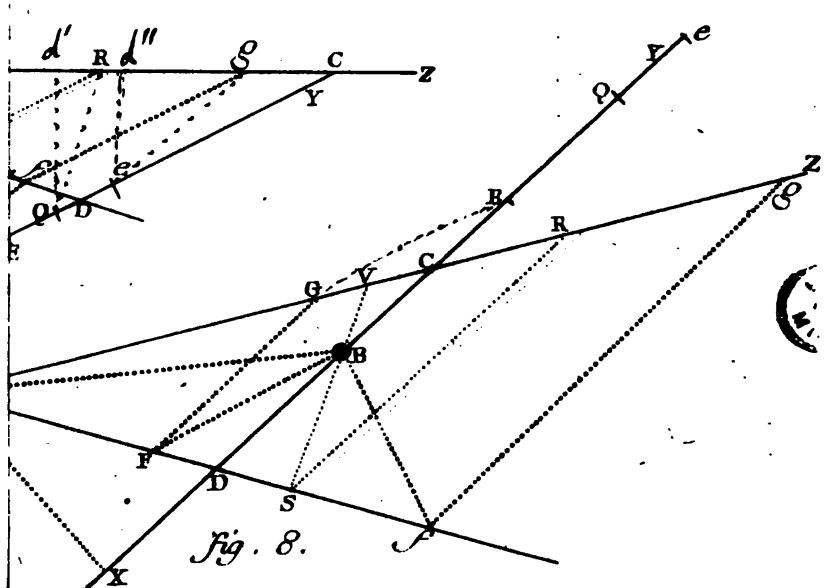


fig. 8.

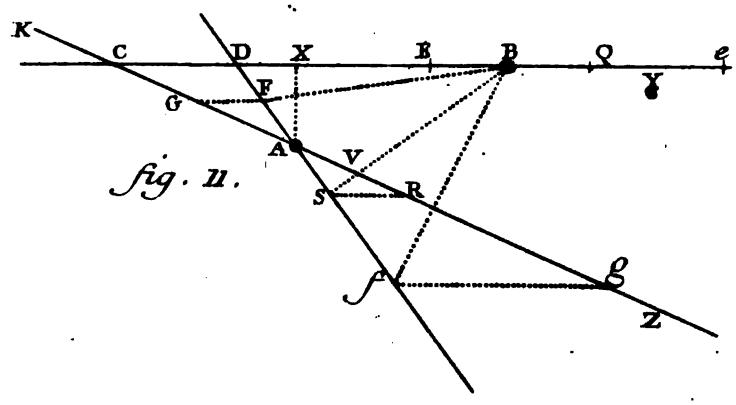
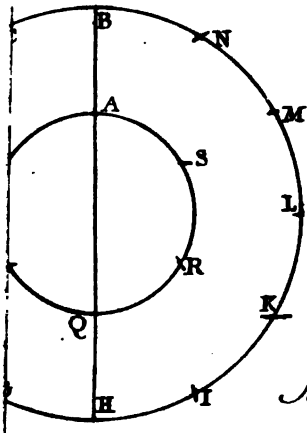


fig. 11.



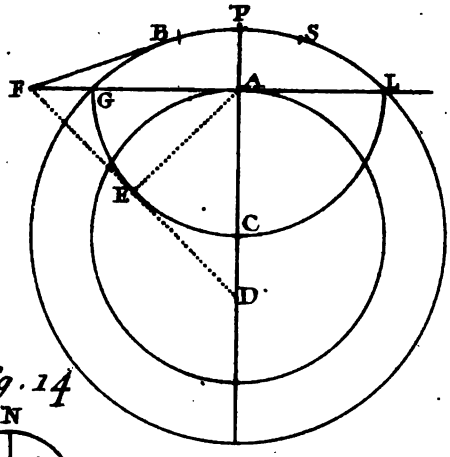
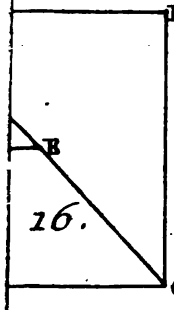


fig. 14



16.

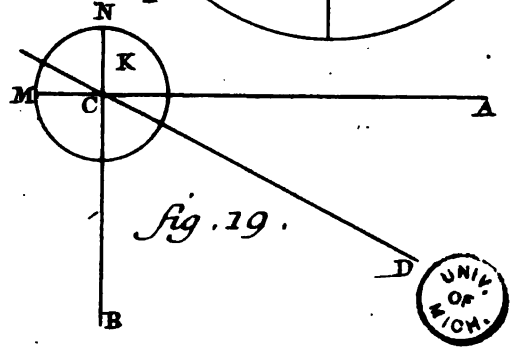
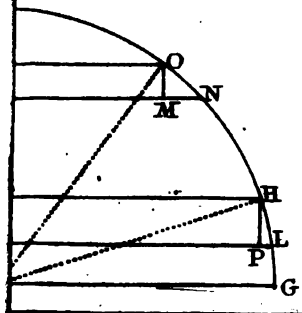


fig. 19.



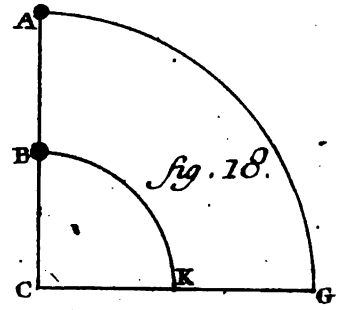


fig. 18.

UNIV. OF MICH.

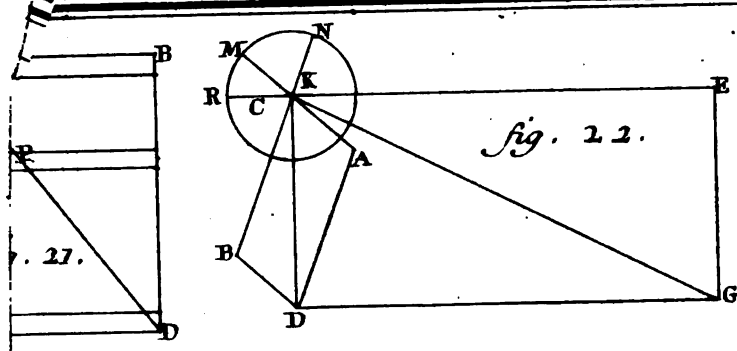
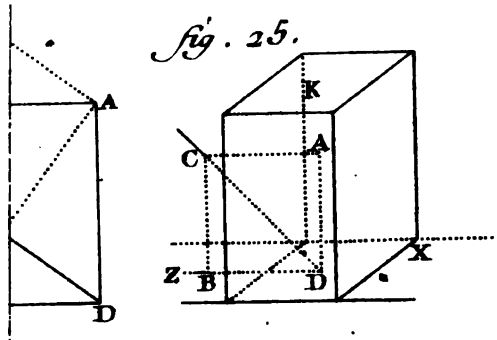


fig. 22.

fig. 25.



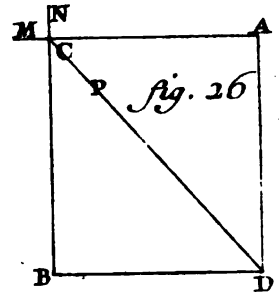


fig. 26

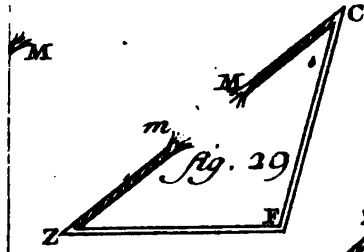


fig. 29

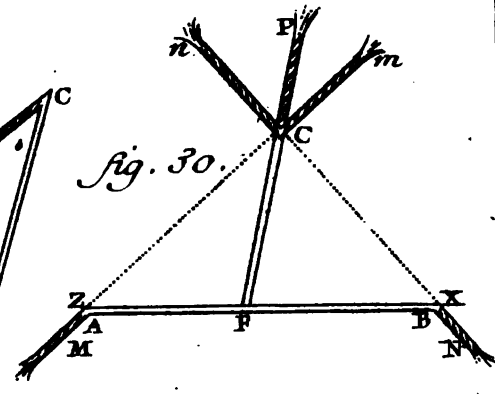
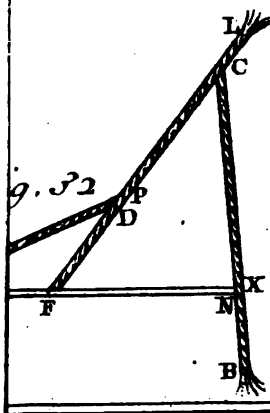


fig. 30.



g. 32

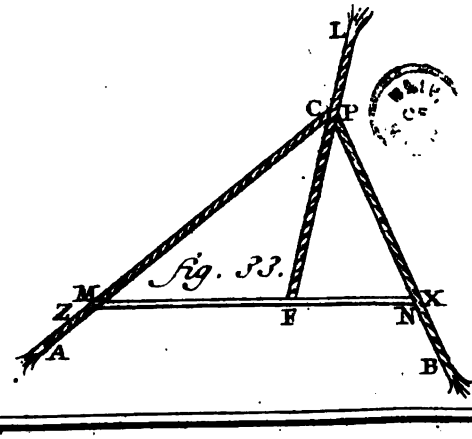


fig. 33.

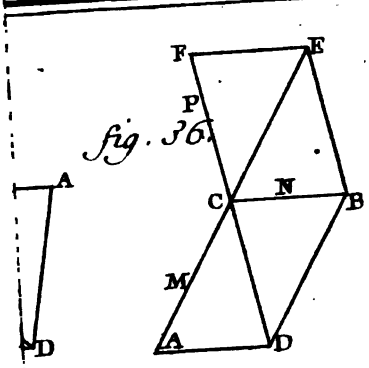


fig. 36.

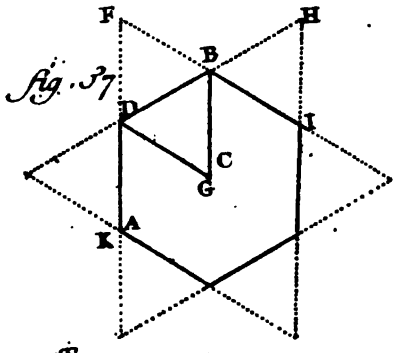


fig. 37.

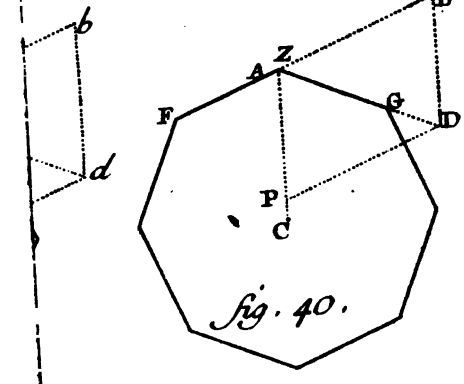


fig. 40.

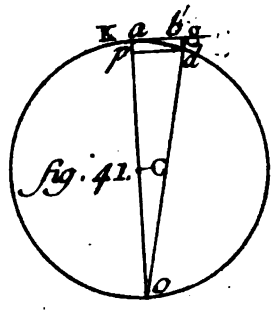
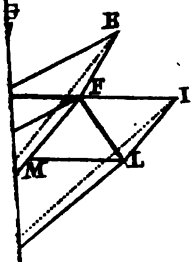


fig. 41.



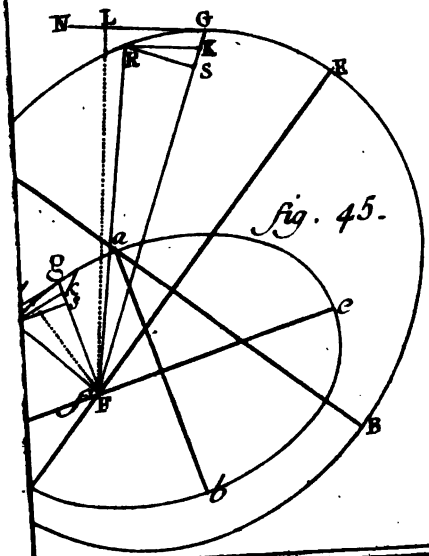


fig. 45.

UNIV. OF MICH.

PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Physique.

LIVRE SECOND.
DU MOUVEMENT DES CORPS PESANS.

DANS le livre précedent on a consideré le mouvement, & les causes qui le communiquent aux corps, d'une maniere abstraite, car on n'a point eu égard à la nature, ou aux qualitez des corps, ni à la réalité ou existence des causes qui les meuvent; les principes qu'on y a établis, sont tels que par leur généralité ils sont applicables à tous les mouvemens particuliers. On a supposé pour cela que les corps étoient dépouillez de toutes les qualitez qui peuvent modifier, changer ou altérer en quelque sorte l'impression de la force motrice. Il est néanmoins certain que les corps ont de telles qualitez, & qu'elles ont beaucoup de part aux effets. De ce nombre sont la pesanteur, la dureté, la molesse, la fluidité, l'élasticité, &c. Il s'agit d'éxaminer ce qu'elles peuvent dans le mouvement. Comme nous n'avons point en nous l'idée de la vraie structure de l'univers: si nous voulons donner à nos connoissances un objet réel, il faut auparavant consulter la nature; notre raison a besoin d'être conduite dans la recherche des choses naturelles; or les expériences & les faits bien observez

ſont comme le point fixe d'où il faut partir pour marcher avec ſureté. Avant de raiſonner ſur la nature, il faut ſçavoir ce qui s'y paſſe, pour ne pas raiſonner en l'air & ſur un objet chimérique. La ſcience naturelle n'eſt ni toute expérimentale ni toute ſiſtématique : les expériences préſentent à l'eſprit un certain nombre de faits, où pour l'ordinaire la circonſtance principale, celle qui eſt l'objet de notre recherche, eſt mêlée avec d'autres qui la cachent ou même qui l'alterent & empêchent qu'on ne la reconnoiſſe ; ce n'eſt que par le raiſonnement qu'on vient à bout de la diſcerner en écartant les choſes étrangeres qui la défigurent. D'un autre côté, ſi faute d'avoir aſſez approfondi les faits, on ſe hâte de faire des conjectures & de former des hypotheſes, on ne peut pas ſe promettre d'avoir trouvé le dénoument & la vraie explication que l'on ſe propoſe de donner. L'expérience & le raiſonnement ſont donc deux guides qui doivent marcher l'un à côté de l'autre, & que l'on doit ſuivre dans l'étude des choſes naturelles. Lorſque l'expérience vient après le raiſonnement, elle le raſſure ; ſi c'eſt l'expérience qui devance le raiſonnement, pour lors le raiſonnement en peſe toutes les circonſtances, & empêche qu'on ne l'interprete à faux. Par-là l'expérience & le raiſonnement concourent enſemble au progrez des connoiſſances naturelles.

Dans l'examen qu'il s'agit de faire de ce que les qualitez des corps peuvent dans le mouvement, on commence par la peſanteur qui eſt la plus générale de toutes ; & qui influe en un plus grand nombre de mouvemens. On ſçait que les corps peſans tendent à deſcendre, & qu'ils tombent en effet lorſqu'ils ne ſont pas ſoutenus ; ainſi ſi on jette un corps peſant en l'air ſuivant quelque direction que ce ſoit, il ne tarde pas de deſcendre & de s'approcher de la terre juſqu'à ce qu'il la touche ; ſi on le met ſur une ſurface plane qui ne ſoit pas de niveau, il gliſſe ou il roule : ainſi par tout où eſt un corps peſant, il y a un principe de mouvement qui le ſollicite à deſcendre. Dans ce Livre on ſe propoſe de traiter des effets & du mouvement de peſanteur en quatre Chapitres ; dans le premier on expliquera les proprietez les plus générales des corps peſans ; dans le ſecond on traitera du mouvement des corps peſans jettez ſuivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horizon ; dans le troiſiéme, des corps jettez ſuivant toute autre direction différente de la verticale ; dans le quatriéme de la deſcente des corps peſans le long des plans inclinez.

CHAPITRE PREMIER.

DES PROPRIETEZ LES PLUS GE'NE'RALES des corps peſans.

1. LE mot de peſanteur ou de gravité peut avoir trois ſens differens. 1°. Il peut ſignifier l'effort ou la tendence que les corps terreſtres ont à deſcendre & à s'approcher du centre de la terre. 2°. Il peut ſignifier la cauſe qui produit cet effort ou cette tendence ; c'eſt dans ce ſens que l'on dit que la peſanteur agit à des diſtances dont les bornes nous ſont inconnues, parce que ſi on porte un corps peſant à differentes diſtances de la terre, on éprouve qu'il eſt encore peſant. 3°. Le mot de peſanteur peut ſignifier la meſure ou la quantité de l'effort que chaque corps peſant fait pour s'approcher du centre où il tend. La peſanteur dans ce dernier ſens eſt appellée plus ordinairement poids ; ainſi un pied cube de plomb peſe plus qu'un demi-pied cube de même matiere, car il faut une force plus grande pour ſoutenir un pied cube de plomb qu'il n'en faut pour ſoutenir ſeulement un demi-pied cube de la même matiere.

2. Les Phyſiciens ſont fort partagez ſur la cauſe & la nature de la peſanteur. Néanmoins nonobſtant ce partage & cette difference de ſentimens, on convient aſſez généralement des effets de la peſanteur. Ce qui montre que pour connoître les effets d'une cauſe, leur enchainement & leur dépendance mutuelle, il n'eſt pas néceſſaire de connoître ſa nature ni en quoi elle conſiſte ; il ſuffit que l'on puiſſe obſerver la loi ſuivant laquelle elle agit. Lorſque la loi eſt connue, les effets en découlent, & on les déduit avec la même facilité que ſi la cauſe même étoit connue.

3. Galilée eſt le premier qui ait raiſonné juſte ſur la peſanteur à l'aide des expériences qu'il fit. Il mit des corps très-polis ſur des plans differemment inclinez qu'il laiſſa gliſſer ou rouler ; & après avoir répété l'expérience plus de cent fois pour chaque inclinaiſon, il trouva toujours qu'un corps parcouroit ſur un même plan des eſpaces qui étoient entr'eux comme les quarrez des tems ; en ſorte que ſi dans la premiere partie du tems le mobile avoit parcouru un pied après qu'il s'étoit écoulé trois parties du tems, il en avoit parcouru 9 ; or 1 & 9 ſont les quarrez des tems 1 & 3. Des expériences que Galilée fit toutes parfaitement d'accord entr'elles, il conclut que la peſanteur eſt une force conſtante. En ef-

ſet ſans être auſſi grand Géometre que Galilée, par le ſeul expoſé de l'hypotheſe qu'il fait, on peut ſentir & appercevoir d'une maniere générale la juſteſſe de ſon raiſonnement. Si la peſanteur communique à un corps qui tombe, des degrez égaux de viteſſe en tems égaux, qu'après un tems double elle lui ait donné deux degrez de viteſſe, on peut concevoir qu'après ce tems double le mobile aura parcouru un eſpace quadruple. Car ſi la viteſſe qu'il a acquiſe ſucceſſivement dans la premiere partie du tems, lui a fait parcourir dans ce même-tems un pied; étant toute acquiſe, lui fera parcourir pendant la ſeconde partie un eſpace double, c'eſt-à-dire, 2 pieds; d'ailleurs le degré de viteſſe qu'il reçoit dans la ſeconde partie du tems étant égal au degré reçu dans le premier tems, lui fait parcourir un pied; le mobile parcourt donc dans le ſecond tems trois pieds en tout, ſi à ces trois pieds on ajoute celui qui a été parcouru dans le premier tems, tout l'eſpace parcouru ſera de quatre pieds; ainſi les eſpaces parcourus après la premiere, & après les deux premieres parties du tems, ſont comme 1 & 4, c'eſt à-dire, comme les quarrez des tems. Ce qu'il y a de douteux dans ce raiſonnement peut être éclairci par ce qui a été dit dans le livre précedent (122. 142.), & le ſera encore davantage dans le cours de ce Livre.

4. L'hypotheſe de Galilée qui conſiſte à dire que la peſanteur eſt une force conſtante, a été trouvée ſi conforme aux phenomenes de la peſanteur, que tous les Auteurs qui après lui ont traité la même matiere, l'ont adoptée & ſuivie dans leurs écrits; elle doit ſervir de modele dans des occaſions ſemblables, lorſqu'il s'agit de travailler ſur un ſujet tout nouveau. Galilée ne prend pas pour hypotheſe le fait que l'expérience lui fait découvrir, il eſt trop compoſé, & une hypotheſe doit être ſimple & aiſée à ſaiſir; mais il décompoſe le réſultat de ſon expérience, & ſon analyſe lui fait trouver que la peſanteur eſt une force conſtante qui en des tems égaux donne aux corps peſans qui tombent, des degrez égaux de viteſſe. Cette notion qu'il donne de la peſanteur eſt facile, & elle comprend tout, car on en peut déduire tous les phenomenes obſervez.

5. Galilée s'étoit contenté de faire des expériences ſur les corps terreſtres, elles l'avoient toutes porté à croire que la peſanteur eſt une force uniforme qui agit également par tout, il n'avoit pas porté ſes vues plus loin. Mais M. Neuton ſoupçonna dans la ſuite qu'il pourroit bien ſe faire que la peſanteur diminuât en allant du centre vers la circonférence, & que la force qui retient la Lune

ſur

ſur ſon orbite ne fût pas differente de la peſanteur des corps terreſtres ou qu'elle fût de même eſpece ; il voulut vérifier ſa conjecture par le calcul. La recherche qu'il avoit faite de la force centrale, lui avoit fait trouver qu'un corps qui décrit une ellipſe eſt retenu ſur cette courbe par une force qui eſt variable ; & que ſi cette force ramene conſtamment le mobile vers l'un des foyers, elle fait des efforts qui ſont entr'eux réciproquement comme les quarrez des diſtances : en ſorte qu'à une diſtance triple, il ſuffit que ſon effort ſoit la neuviéme partie de l'effort qu'elle fait à une diſtance ſimple : or on peut regarder la force qui ramene ainſi le mobile continuellement vers le foyer, comme ſa peſanteur : d'où il ſuivroit que la peſanteur d'un tel corps augmenteroit ou diminueroit dans la raiſon réciproque des quarrez des diſtances. Cela poſé, ſi la force qui contraint la lune de tourner autour de la terre, eſt de même eſpece que la peſanteur des corps terreſtres, l'action qu'elle exerce à la diſtance où eſt la lune, eſt à l'action qu'elle exerce ſur les corps terreſtres comme le quarré de la diſtance qu'il y a de la ſurface de la terre au centre, eſt au quarré de la diſtance qu'il y a de l'orbite de la lune au même centre : or M. Neuton trouve que cela eſt exactement vrai. La diſtance moyenne de la lune au centre de la terre eſt de 60 demi-diametres terreſtres, la diſtance de la ſurface de la terre au meme centre eſt de 1 demi-diametre, les quarrez de 1 & de 60 ſont 1 & 3600 : M. Neuton trouve donc que l'action de la force qui agit à la diſtance où eſt la lune & celle qui pouſſe les corps terreſtres au centre, ſont entr'elles comme 1 & 3600 : d'où il conclut que la force qui oblige la lune de tourner autour de la terre, eſt de même eſpece que la peſanteur des corps terreſtres. Voici le fondement de ce calcul.

Suppoſons que l'arc LN repréſente celui que la lune décrit dans une minute en tournant ſur ſon orbite, l'arc LN, à cauſe de ſa petiteſſe & de la grande diſtance au centre de la terre, peut être conſideré comme une ligne droite : cela poſé, la lune décrit l'arc LN par l'action conjointe de deux forces, dont l'une eſt dirigée ſuivant la tangente LO, & l'autre vers le centre T de la terre ; c'eſt pourquoi ſi du point N on mene les lignes NO, NM paralleles à LO & LT, la force centrale ou celle qui retient la lune ſur ſon orbite ſera exprimée par le côté LM du parallelogramme MO. Il faut donc évaluer la force exprimée par LM. Le tems périodique de la lune eſt connu, auſſi-bien que la grandeur de la circonférence qu'elle décrit ; donc la viteſſe ou l'eſ- Fig. 1.

pace LN qu'elle décrit dans une minute eſt auſſi connu ; donc la tangente LO & le ſinus verſe LM ſont pareillement connus. On peut donc trouver l'eſpace que la force centrale feroit décrire dans une minute à la lune ; or le calcul donne l'arc LM de 15 pieds. On verra dans la ſuite que la peſanteur fait parcourir aux corps peſans qui ſont ſur la terre dans une minute, un eſpace qui eſt exprimé par le produit de 3600 & de 15, c'eſt-à-dire, par 60×60×15 pieds ; donc la force centrale qui retient la lune ſur ſon orbite, eſt à la force de la peſanteur auprès de la terre, comme 15 eſt à 60×60×15, ou comme 1 eſt à 60×60, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les quarrez des diſtances au centre. Donc ſuivant le raiſonnement précedent ces deux forces ſont de même eſpece, ou bien même elles ne different point quant à leur nature, puiſque c'eſt la même loi qui regle leur action, & qu'elles different ſeulement par le degré.

6. La peſanteur eſt donc variable, & elle diminue à meſure qu'on s'éloigne de la terre ; mais l'on voit bien que cette diminution ne peut être ſenſible à moins qu'on ne porte un corps à pluſieurs centaines de lieües loin de la terre ; ce qui n'arrivera pas certainement, puiſque les plus fortes machines à peine peuvent-elles élever un corps à quelques centaines de toiſes. On peut donc ſuppoſer que la peſanteur eſt la même à quelque hauteur que les corps peſans montent : ainſi l'hypotheſe de Galilée demeure dans ſon entier par rapport aux corps terreſtres. Dans la ſuite on ſuppoſera avec lui que la peſanteur eſt conſtante & qu'elle agit également ſur un corps peſant qui eſt en mouvement ou en repos. Lorſqu'on dit que la peſanteur eſt conſtante, on ne prétend pas dire qu'elle eſt égale par toute la terre ; car on ſçait, par exemple, que la peſanteur ſous l'équateur agit moins fortement ſur les corps que la peſanteur ſous le cercle polaire, ainſi qu'on aura occaſion de remarquer dans la ſuite ; mais on entend que ſi un corps monte ou deſcend en un même lieu de la terre, la peſanteur fait ſur ce corps le même effort à chaque inſtant de la montée & de la deſcente.

On réduit les propriétez générales des corps peſans à trois conſiderations : 1°. On parlera de leur direction. 2°. Du centre de gravité. 3°. Des rapports des peſanteurs.

DE LA DIRECTION DES CORPS PESANS.

7. On ſçait que les corps terreſtres tendent à deſcendre, & par conſéquent à s'approcher du centre de la terre. Mais on peut

douter s'ils tendent directement vers ce centre, ou seulement à côté, loin ou proche de ce centre : or plusieurs raisons prouvent qu'ils tendent au centre ou fort proche de ce point.

Si on tient un poids suspendu par un fil, il le bande & prend une situation verticale ou perpendiculaire à l'horizon, car le fil n'incline pas plus vers un côté que vers un autre : or si l'on suppose que la terre est un globe, comme on croit ordinairement, il faut dire que les corps pesans tendent au centre ; car toute ligne qui est perpendiculaire à la surface d'un globe, prolongée passeroit par le centre. Donc les corps pesans dont la direction est indiquée par le fil perpendiculaire à la surface de la terre, tendent au centre.

L'astronomie fournit encore une preuve du même sujet. Sup- Fig. 2.
posons que ADB représente un grand cercle de la terre, par exemple, un méridien ; qu'un voyageur parcoure sur ce cercle les arcs DE, EB chacun, par exemple, de 100 lieües ; l'observation fait voir que le voyageur change d'étoiles verticales, & que si le zenit M du lieu D est éloigné, par exemple, de 4 degrez du zenit du lieu E, le zenit du lieu E est pareillement éloigné du zenit du lieu B de 4 degrez, ou s'il y a quelque difference entre les deux arcs célestes MO, ON, elle est si petite, qu'on peut la regarder comme de nulle conséquence par rapport à ce qu'on se propose de prouver ici. Si l'on fait des observations semblables en des pays fort éloignez les uns des autres, comme au cercle polaire, en France, vers l'équateur, on trouve toujours que les parties d'un méridien sont à très-peu de chose près, proportionnelles aux arcs célestes auxquels elles répondent ; en sorte que si une partie du méridien est double, elle répond à un arc céleste double. Cela posé, il faut 1°. que les lignes DM, EO, BN que l'on suppose être en un même plan, c'est-à-dire, dans le plan d'un méridien, concourent ; car si les lignes DM, EO étoient paralleles, comme les arcs DE, EB, & même la terre étant regardée par un observateur placé à la distance où sont les étoiles, n'auroit aucune grandeur apparente, & ne seroit point vûe ; ainsi l'arc MO compris entre ces mêmes paralleles, n'ayant aucune grandeur apparente non plus que l'espace DE qui lui seroit égal, ne seroit pas apperçu de dessus le terre ; mais puisque l'arc MO est d'une étendue considérable, il faut que les lignes DM, EO soient inclinées l'une à l'autre & qu'elles aillent en s'écartant de la terre vers le ciel ; elles concourent donc en un point du plan du méridien terrestre. 2°. Si les arcs MO, ON qui répon-

dent aux parties égales DE, EB du méridien, étoient parfaitement égaux, il eſt évident que les lignes DM, EO, BN concourroient en un point qui ne ſeroit pas different du centre de la terre ; car deux circonférences qui ſont en un même plan, ne peuvent être diviſées en parties proportionnelles par des lignes qui concourent, ſi elles ne ſont concentriques, & ſi les lignes qui les diviſent ne ſont tirées du centre commun : mais puiſque l'obſervation fait connoître que les arcs MO, ON ſont ſenſiblement égaux, il s'enſuit que les lignes DM, EO, BN concourent en un point qui eſt le même que le centre de la terre, ou bien en des points fort proches de ce centre ; donc les corps peſans dont les directions ſont indiquées par les lignes DM, EO, BN, tendent au centre ou vers des points fort proches du centre.

On peut conſulter les obſervations anciennes & nouvelles de Meſſieurs de l'Académie Royale des Sciences répandues en differens Mémoires, & la Relation du voyage du Nord que les Meſſieurs de la même Académie ont entrepris en dernier lieu, & dans lequel ils ont pénétré juſqu'au-delà du cercle polaire pour meſurer un degré du méridien : l'on verra que toutes ces obſervations prouvent que les directions des corps peſans ne s'éloignent pas beaucoup du centre de la terre, puiſque pour découvrir qu'ils ne tendent pas tous préciſément au centre, il a fallu faire des obſervations en des pays très-éloignez les uns des autres, & employer pour cela les opérations les plus exactes & les plus ſubtiles de l'Aſtronomie. Le point dont il s'agit ici eſt néceſſairement lié avec la figure de la terre. Si la terre eſt ſphérique, les corps peſans tendent au centre, comme il vient d'être dit. Si la terre a la figure d'un ſphéroide allongé de l'un à l'autre pole comme M. Caſſini l'expoſe dans ſon livre de la figure de la terre, ou ſi ſa figure eſt celle d'un ſphéroide applati comme l'ont conclu de leurs obſervations les Meſſieurs qui ont fait le voyage du Nord, on ne peut pas dire que les corps peſans tendent préciſément au centre, parce que les directions des corps peſans étant perpendiculaires à la ſurface de la terre, il eſt néceſſaire qu'elles rencontrent ſon axe en differens points. Il réſulte néanmoins des obſervations, que la figure de la terre ne s'éloigne pas beaucoup de la ſphérique ; ainſi lorſqu'il s'agit ſeulement de la tendence des corps peſans, on peut ſuppoſer ſans erreur ſenſible que leur peſanteur les porte directement vers le centre de la terre.

8. Si ſur la circonférence d'un grand cercle de la terre l'on

imagine tout au tour des corps peſans, comme des hommes, des colomnes, des édifices, &c. Ils auront tous leurs directions dans le plan de ce grand cercle, car elles concourent toutes au centre de la terre qui eſt le même que celui d'un grand cercle; donc elles concourent toutes au centre du grand cercle dont il s'agit, & ſont par conſéquent toutes dans le plan de ce cercle. D'où il ſuit que les hommes qui ſont ſur cette circonférence aux extrêmitez d'un même diametre ſont oppoſez par les pieds. De-là vient qu'on appelle *antipodes* les peuples qui habitent ſur la terre des pays diamétralement oppoſez. Mais ſi l'on conçoit que des hommes ou d'autres corps peſans entourent la circonférence d'un petit cercle, toutes les directions étant concourantes au centre de la terre, elles ſe trouveront ſur la ſurface d'un cone qui aura pour baſe ce petit cercle. Fig. 3.

9. C'eſt la peſanteur qui fait que les liqueurs ſe mettent de niveau, c'eſt-à-dire, que leurs parties ſe diſpoſent de maniere que celles qui ſont à la ſurface ſont également élevées ou également diſtantes du centre, en ſorte que cette ſurface imite parfaitement la courbure de la terre, comme il ſera plus amplement expliqué dans la ſuite.

10. Si la terre tourne ſur ſon axe comme les Phyloſophes paroiſſent en convenir, les corps terreſtres reçoivent du mouvement circulaire une force qui tend à les éloigner du centre; il faut donc une force qui réprime cet effort, ſans quoi les hommes & les autres corps ſeroient inſenſiblement ſéparez de la ſurface de la terre: or c'eſt la peſanteur qui réſiſte à l'effort de la force centrifuge & qui en empêche l'effet. Car la peſanteur eſt de beaucoup ſupérieure à la force centrifuge des corps terreſtres. Ce qu'on peut vérifier par un calcul ſemblable à celui dont M. Neuton s'eſt ſervi pour comparer la peſanteur des corps terreſtres à celle de la lune.

11. Sous l'équateur la force centrifuge eſt plus grande qu'en tout autre endroit de la terre. Suppoſons que la circonférence de l'équateur eſt double de la circonférence d'un parallele, les viteſſes étant entr'elles comme les eſpaces parcourus en tems égaux, c'eſt-à-dire, comme les circonférences décrites en même-tems (*Liv.* I. 4.), la viteſſe ſur l'équateur ſera double de la viteſſe ſur le parallele, le diametre de l'équateur eſt auſſi double du diametre du parallele (13. *Géom.*). Cela poſé, puiſque la viteſſe ſur l'équateur eſt à la viteſſe ſur le parallele ſuppoſé comme 2 à 1, les quarrez des viteſſes ſeront entr'eux comme 4 & 1; mais les forces centrifuges ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes

diviſez par les diametres qui ſont 2 & 1 (*Liv.* I. 222.); donc les forces centrifuges ſeront entr'elles comme $\frac{4}{2}$ & $\frac{1}{1}$ ou comme 2 à 1, c'eſt-à-dire, que ces forces ſont entr'elles comme les circonférences (*Liv.* I. 226.); donc la force centrifuge ſur l'équateur eſt plus grande qu'en tout autre endroit de la terre. Il eſt donc néceſſaire que l'effet de la peſanteur ſoit plus diminué ou empêché ſous l'équateur, qu'en tout autre endroit de la terre : 1°. parce que la force centrifuge eſt plus grande ſous l'équateur : 2°. parce que cette force agit directement contre la peſanteur.

Fig. 3. En tout autre endroit de la terre la force centrifuge des corps terreſtres agit ſuivant une direction qui fait un angle avec celle de la peſanteur : la direction de la force centrifuge eſt perpendiculaire à l'axe de la terre & le coupe en un point d'autant plus éloigné du centre, que le corps terreſtre eſt éloigné de l'équateur, & la direction de la peſanteur paſſe par le centre ; donc les directions de ces deux forces ſont un angle. Que le cercle EDQI répréſente la terre ou plutôt un méridien, le diametre DI l'axe de la terre qui eſt un diametre commun à tous les méridiens, EQ l'équateur, BA un cercle parallele ; il eſt évident que la terre tournant autour de l'axe DI, tous les points de la ſurface font effort pour s'éloigner des centres des circonférences qu'ils décrivent ; ainſi le point Q tend à s'éloigner directement du centre C de l'équateur qui eſt le même que le centre de la terre, & le point A tend à s'éloigner du centre O de la circonférence qu'il décrit ; d'où l'on voit que les directions des forces centrifuges de ces points, ſont ſituées ſur CQ & OA, & que la force centrifuge ſur l'équateur eſt directement oppoſée à la force de la peſanteur qui pouſſe le point Q vers le centre C ; mais la force centrifuge du point A étant dirigée ſuivant OAF & la peſanteur ſuivant AC, il eſt viſible que ces deux directions font un angle.

12 D'où il ſuit que les corps terreſtres éloignez de l'équateur ſont pouſſez en même-tems par deux forces, l'une deſquelles, ſçavoir la peſanteur, les pouſſe ſuivant une direction perpendiculaire à la ſurface de la terre & les y applique ; & l'autre, qui eſt la force centrifuge, tend à les en éloigner ſuivant une direction oblique à la même ſurface. La peſanteur ne réſiſte donc qu'en partie à la force centrifuge, il faut donc qu'il y ait une autre force ou du moins un obſtacle qui ſurmonte ou rende inutile l'effort de la force centrifuge qui n'eſt point empêché : car la preſſion de la peſanteur étant perpendiculaire à la ſurface de la terre, ne peut réſiſter que ſuivant cette direction, & par conſéquent

ne peut être décompoſée. C'eſt donc la force centrifuge qui eſt décompoſée en deux efforts dont l'un eſt perpendiculaire à la ſurface de la terre, & eſt directement oppoſé à la peſanteur, & l'autre eſt parallele à la même ſurface, la peſanteur detruit l'effort perpendiculaire, l'effort parallele feroit gliſſer les corps peſans ſur la ſurface de la terre; mais les inégalitez de cette ſurface ſont plus que ſuffiſantes pour en arrêter l'effet; car ſi on cherche quel peut être l'effort de la force centrifuge, on trouve que ſur l'équateur terreſtre où elle eſt la plus grande, elle eſt néanmoins 300 fois ou environ plus petite que la peſanteur; car dans une ſeconde de tems cette force à peine pourroit-elle faire parcourir 8 lignes à un corps, au lieu que la peſanteur dans le même-tems fait parcourir 15 pieds ou 2160 lignes. L'effort parallele de la force centrifuge ne peut pas non plus déterminer les fluides à couler vers l'équateur. Car il ſeroit néceſſaire que les fluides ſortiſſent du niveau, c'eſt-à-dire, que leur ſurface ſupérieure ceſſât d'imiter la courbure de la terre; pour lors la direction de la peſanteur n'étant plus perpendiculaire à leur ſurface, cette force ſeroit elle-même décompoſée en deux efforts, & l'effort parallele à la ſurface du fluide étant ſupérieur à l'effort parallele de la force centrifuge, obligeroit les particules des fluides de redeſcendre en leur lieu. On voit donc que l'effort parallele de la force centrifuge n'eſt pas aſſez grand pour déplacer les corps & les mettre en mouvement.

13. On vient de ſuppoſer que la terre tourne ſur ſon axe. Or il ſemble que l'on puiſſe déduire cette ſuppoſition des phenomenes de la peſanteur. Si aucune cauſe ne diminue l'effet de la peſanteur, on ne voit pas pourquoi elle ſeroit moindre ſous l'équateur qu'aux autres régions de la terre, par exemple, qu'en France; mais ſi la terre tourne, l'effet de la peſanteur doit être moindre ſous l'équateur & les corps y doivent deſcendre moins vîte qu'en France, parce que la force centrifuge qui naît du mouvement circulaire, eſt plus grande ſous l'équateur qu'en France, & que d'ailleurs elle y agit directement contre l'effort de la peſanteur. De ſorte que ſi effectivement les corps deſcendent moins vîte ſous l'équateur qu'en France & que dans tous les autres pays de la terre, on a tout lieu de croire que cette diminution de peſanteur eſt un effet de la force centrifuge qui eſt elle-même un effet du mouvement circulaire. Or pluſieurs expériences, & entr'autres celle de M. Richer, prouvent que les corps deſcendent moins vîte ſous l'équateur & auprès de l'équateur que dans

les autres pays, par exemple, qu'en France ; d'où il ſuivroit que la terre tourne. Voici l'expérience de M. Richer, qu'il fit dans l'iſle de Cayenne diſtante de l'équateur de 5 degrez, lorſqu'il voulut faire un pendule qui fît ſes vibrations en une ſeconde, & lui donner la même longueur qu'il doit avoir à Paris pour les faire dans le même-tems d'une ſeconde, il trouva que les vibrations de ce pendule étoient plus tardives qu'à Paris, & qu'elles duroient plus d'une ſeconde, & il fut obligé de racourcir ſon pendule de 1 $+\frac{1}{4}$ de ligne pour lui faire battre les ſecondes.

14. D'où l'on voit que deux pendules de même longueur font leurs vibrations & deſcendent en des tems inégaux, & que c'eſt à l'iſle de Cayenne qu'il eſt plus long-tems à deſcendre ; donc la peſanteur exerce ſur les corps terreſtres un effort moindre en l'iſle de Cayenne qu'à Paris: les obſervations faites en dernier lieu au cercle polaire, par les membres de l'Académie Royale des Sciences, prouvent auſſi que les corps peſans deſcendent plus vîte aux endroits qui ſont plus éloignez de l'équateur ; c'eſt pourquoi ſi la peſanteur eſt une force par tout égale, il faut que ſon action ſoit diminuée par la force centrifuge ; & parce que cette force diminue continuellement juſqu'au pole où elle eſt nulle, il s'enſuit que l'action de la peſanteur doit être d'autant plus grande que les corps terreſtres ſont plus proches du pole.

15. Puiſque les directions des corps peſans concourent, il s'enſuit que les murs des édifices que l'on éleve à plomb, ou deux poids que l'on tient ſuſpendus avec des cordons, n'ont pas leurs directions paralleles, quoiquelles le paroiſſent, & que le plancher d'une ſale qu'on dreſſe au niveau, n'eſt pas une ſurface plane, mais courbe ; cependant ces différences ſont ſi petites, qu'on peut ſuppoſer qu'un plancher qui eſt de niveau, eſt un vrai plan, & que les directions des corps qui ne ſont pas conſidérablement éloignez les uns des autres ont leurs directions paralleles.

DU CENTRE DE GRAVITE'.

16. *On définit le centre de gravité un point par lequel une figure peſante étant librement ſuſpendue, toutes les parties ſe contrebalancent également, & ſont en équilibre, quelque poſition qu'elles aient par rapport au centre de la terre.* Un tel point ſuppoſé qu'il exiſte dans les corps ou les figures peſantes, eſt appellé centre de gravité, parce que ce point étant ſoutenu, tout le poids du corps eſt auſſi ſoutenu, & eſt comme concentré en ce point.

17. *Dans*

17. *Dans tous les corps il y a un point par lequel, ſi on les ſuſpend, leurs parties ſeront en équilibre dans une certaine ſituation* ; car on peut toujours imaginer un plan vertical qui diviſe un corps peſant ſuivant ſa longueur, de maniere que la partie qui eſt à la droite du plan, ne l'emporte pas ſur celle qui eſt à la gauche ; ſi l'on applique deux puiſſances dont les directions ſoient couchées ſur ce plan, & qui tirent en ſens contraire de la peſanteur, elles ſoutiendront le corps comme s'il étoit poſé ſur un levier, & qu'elles fuſſent appliquées au même levier. Leurs directions concourront donc en un point (*Liv.* I. 194.) ; or deux puiſſances dont les directions concourent, produiſent au point de concours ou tendent à produire un effort qui fait autant que les deux puiſſances enſemble (*Liv.* I. 152. 182.) ; donc ſi on met cet effort à leur place, le corps peſant ſera ſoutenu par une ſeule puiſſance ; il y a donc un point dans ce corps, ou même pluſieurs & une infinité, ſçavoir tous ceux qui ſont ſur la direction de cette puiſſance, par leſquels le poids étant ſuſpendu, ſes parties ſeront en équilibre dans une ſituation.

18. Mais dans tous les corps y a-t-il un point autour duquel les parties ſont en équilibre, quelque ſituation qu'on leur donne à l'égard de l'horizon ?

On convient que ſi les directions des corps peſans ou des parties d'un même corps, ſont paralleles, ils ont un centre de gravité au ſens de la définition : car les directions étant paralleles, les parties peſantes qui tirent ſuivant ces directions, agiſſent de la même maniere les unes contre les autres, quelque ſituation qu'elles prenent ; en effet dans le paralleliſme on ne voit aucune difference dans la maniere d'agir ; c'eſt pourquoi dans les corps il y a un centre de gravité, c'eſt-à-dire, un point autour duquel toutes les parties du corps ſeront en équilibre quelque ſituation qu'on leur donne. On éclaircira ceci davantage dans la ſtatique.

19. *Si les directions de la peſanteur ne ſont pas paralleles, on peut faire voir que dans les corps il n'y a point de centre de gravité dans le ſens de la définition* : ainſi dans le cylindre XY il n'y a point de centre de gravité. S'il y avoit un tel centre, il ſeroit certainement au point P qui diviſe l'axe AB du cylindre en deux parties égales : or on peut faire voir que toutes les parties du cylindre XY ne ſeront pas en équilibre autour du point P milieu de l'axe AB quelque ſituation qu'on lui donne. Suppoſons que le cylindre eſt en équilibre étant ſuſpendu par le point P, lorſqu'il a une ſituation horizontale, je dis que s'il s'abbaiſſe Fig. 4.

par une de ſes extrêmitez, & qu'il hauſſe par l'autre, il ceſſera d'être en équilibre.

Puiſque les deux parties qui ſont de part & d'autre du point P, ſont parfaitement égales & ſemblables, concevons qu'elles ſont diviſées en un égal nombre de tranches égales & ſemblables. Si le cylindre XY eſt en équilibre ſur le point P, il faut que les parties également diſtantes du point P, qui ſont égales & ſemblables, deux à deux, ſoient en équilibre. Ainſi les parties extrêmes A & B doivent être en équilibre. Or il eſt aiſé de faire voir que les parties A & B ne ſont pas en équilibre.

Sur les directions ACM, BCN qu'on ſuppoſe concourir au centre C, ſoit formé le parallelogramme LN dont la diagonale CK ſoit ſur la ligne PCK. Les tranches A, B peuvent être conſiderées comme deux puiſſances qui ſeroient appliquées aux extrêmitez du levier XY, & dont l'appui ſeroit en P. Puiſqu'on ſuppoſe que les tranches ſont en équilibre ſur le levier XY, leurs efforts étant appliquez au point de concours C ſuivant les mêmes directions ACM, BCN y ſeroient auſſi en équilibre par le moyen de la réſiſtance du point P, en concevant que la ligne PCK eſt un cordon ou une verge roide qui s'étend depuis le point P juſqu'au point K (*Liv.* I. 194. 195). Or ſi les efforts des tranches A, B appliquez au point C ſuivant les directions ACM, BCN étoient en équilibre par le moyen de la réſiſtance de la verge ou cordon PCK, ils ſeroient entr'eux comme les côtez CL, CN du parallelogramme LN formé ſur leurs directions (*Liv.* I. 187.); donc le côté CL étant moindre que le côté CN, comme on peut le prouver, il faudroit que l'effort de la tranche A fût moindre que l'effort de la tranche B; on ſuppoſe néanmoins que les tranches A & B tirent également fort; donc les efforts des tranches A & B n'étant point dans la raiſon des côtez CL, CN, ne ſont point en équilibre ſur PCK étant appliquez au point C ſuivant les directions ACL, BCN. Donc ils ne ſont point en équilibre ſur le levier XY étant appliquez aux points A & B ſuivant les mêmes directions, car ſi les tranches étoient en équilibre ſur le levier XY, leurs efforts étant appliquez au point C, y ſeroient en équilibre (*Liv.* I. 195). Donc le cylindre n'eſt pas en équilibre ſur le point P dans toutes les ſituations. Le point P n'eſt donc pas le centre de gravité au ſens de la définition.

Pour avoir ſur l'axe le point R par lequel cet axe étant ſoutenu dans l'inclinaiſon qu'on lui ſuppoſe, les tranches A, B ſe-

roient en équilibre ; il faut après avoir pris ſur les directions ACM, BCN les parties égales CM, CN, & avoir décrit le parallelogramme MN, prolonger la diagonale CD juſqu'au point R où elle rencontre l'axe du cylindre, & l'on aura le point par lequel l'axe conſideré comme une ligne inflexible étant ſoutenu, les tranches A, B ſeront en équilibre dans la ſituation qu'on leur ſuppoſe. Car les efforts de ces tranches étant appliquez au point de concours C ſuivant les directions ACM, BCN, ſeroient retenus en équilibre par une puiſſance ou réſiſtance qui ſeroit exprimée par la diagonale CD (*Liv.* I. 182. 187.) ; mais (*Liv.* I. 192.) ſi ces mêmes efforts ſont appliquez aux points A, B où leurs directions rencontrent l'axe, qu'on applique pareillement au point R ſuivant la ligne DCR une puiſſance ou réſiſtance qui ſoit exprimée par la diagonale DC, les tranches A & B ou leurs effors ſeront en équilibre ſur l'axe ſuſpendu par le point R ; donc l'opération fait trouver le point de l'axe ſur lequel les efforts des tranches A & B ſeroient en équilibre.

20. On voit par-là que dans la rigueur géométrique les corps n'ont point de centre de gravité, puiſque ſi les parties prennent differentes ſituations à l'égard de l'horizon, elles ceſſent d'être en équilibre, à moins qu'on ne ſuſpende le corps par autant de points differens qu'on lui donne de poſitions : il n'y a que la ſphere qui à cauſe de ſa parfaite uniformité, a un centre de gravité proprement dit, qui eſt le centre même de la ſphere. On peut néanmoins ſuppoſer que dans les corps il y a un centre de gravité. Car comme on ne conclut le défaut d'équilibre que de ce que la tranche A s'approche du centre C de la terre, & que la tranche B s'en éloigne, ou de ce que les directions de ces tranches concourent au point C, il eſt viſible que l'angle ACB formé par les directions des parties peſantes A, B d'un même corps, eſt ſi petit, & la quantité dont ces mêmes parties s'approchent ou s'éloignent du centre C, ſi peu conſidérable, qu'on peut regarder ces directions comme paralleles, & les parties A, B comme équidiſtantes du centre C.

21. *Plus un corps peſant s'approche du centre de la terre, plus il devient leger, c'eſt-à-dire, que la force néceſſaire pour le ſoutenir eſt d'autant moindre* : Ainſi plus le cylindre XY ſera proche du centre C, plus la force qui le ſoutient par le point P que l'on ſuppoſe être le centre de gravité, ſera petite. Ne faiſons attention qu'aux tranches extrêmes A, B. Ces tranches ont leurs directions concourantes au centre C : cela étant, plus le cylindre

XY ſera proche du centre C, plus l'angle formé par ces directions ſera grand; donc plus la diagonale du parallelogramme formé ſur ces directions ſera petite, les côtez demeurant les mêmes; mais la diagonale exprime la force qu'il faut oppoſer à l'action conjointe des parties peſantes A, B; donc la force qui ſoutient les deux tranches A, B eſt d'autant moindre que le cylindre eſt proche du centre C. Lorſque le centre de gravité P ſera arrivé au centre C, l'angle ACB ſera infiniment grand; ou, ce qui revient au même, les côtez de cet angle ſeront ſur une même ligne droite, & il n'y aura plus de diagonale; ce qui montre que lorſque le centre de gravité P eſt au centre de la terre, la force qui ſoutient les tranches A, B eſt nulle, ou qu'elle n'eſt plus néceſſaire pour les ſoutenir. Ce qui eſt dit des tranches A, B il faut l'entendre des autres parties peſantes qui compoſent le cylindre.

Lorſqu'on dit qu'un corps qui s'approche du centre de la terre devient plus léger parce que la force néceſſaire pour le ſoutenir diminue, on ne prétend pas dire que la force qui lui eſt appliquée & qui le pouſſe vers le centre, diminue à meſure que le corps s'en approche; car on ſuppoſe au contraire que chaque point phyſique du corps tend au centre C par un effort conſtamment le même, en ſorte que cet effort ſollicite chaque partie à s'approcher du centre C, lors même que le corps ou le centre de gravité eſt arrivé en C; mais le ſens de la propoſition eſt que les parties peſantes du corps ou du cylindre XY tendent au point C, & au centre de gravité P (lorſque ce point eſt arrivé en C), ſuivant des directions diametralement oppoſées, ce qui fait que ces mêmes parties ſe contrebalancent & ſont en équilibre entr'elles ſans qu'il ſoit beſoin d'appui ou de force pour les ſoutenir. Ce qui eſt vrai, ſoit que l'on ſuppoſe avec Galilée que la peſanteur eſt conſtante, ſoit qu'on diſe avec M. Neuton que la peſanteur augmente en allant de la circonférence vers la centre; car dans l'une & l'autre hypotheſe les directions des points peſans, font des angles de plus en plus ouverts à meſure que le corps s'approche du centre; de maniere que les directions deviennent enfin diametralement oppoſées; auquel cas il ne faut plus de force pour ſoutenir l'effort de la peſanteur: or il eſt évident que les efforts des parties peſantes d'un corps ne paſſent pas tout d'un coup à une oppoſition entiere, mais que ce n'eſt que par degrés que cette oppoſition augmente & à meſure que le corps s'approche du centre, par conſéquent la force néceſſaire pour le ſoutenir diminue de même.

22. Il y a des méthodes géométriques pour trouver le centre de gravité des corps. Cette matiere a été traitée amplement par divers auteurs qu'on pourra conſulter dans le beſoin. Quoiqu'à proprement parler il n'y ait que les corps ou ſolides qui ſoient peſans ; cependant dans les mécaniques on conſidere ſouvent les lignes & les ſurfaces comme ſi elles étoient peſantes, les centres de gravité du triangle & de la pyramide y ſont d'un uſage fort étendu, c'eſt pourquoi on ne ſera pas fâché de voir ici la maniere de les trouver, ce qui donnera en même-tems une ouverture pour trouver ces centres dans les autres figures.

23. *Pour trouver le centre de gravité du triangle* ABC, *il faut diviſer deux de ſes côtez* AB, AD *en deux parties égales aux points* E, F, *par les extrêmitez* B, D, *du troiſiéme côté* BD *mener* BF, DE *qui ſe couperont au point* C. *Ce point eſt le centre de gravité du triangle* ABD. Fig. 5.

Si l'on conçoit que de tous les points du côté AB il y ait des lignes tirées paralleles à AD qui rempliſſent l'aire du triangle, elles ſeront diviſées en deux parties égales de même que AD, ces lignes étant conçues peſantes, auront chacune leur centre de gravité ſur la ligne BF ; donc le centre de gravité de toutes, c'eſt-à-dire, celui du triangle, eſt ſur la ligne BF. Pareillement ſi de tous les points de la ligne AD, on conçoit qu'il y ait des lignes tirées parallelement au côté AB qui couvrent le triangle, elles ſeront diviſées en deux parties égales par DE, de même que le côté AB ; donc le centre de gravité de toutes ces lignes, c'eſt-à-dire, celui du triangle, ſe trouve auſſi ſur DE : ce centre eſt donc tout à la fois ſur BF & ſur DE. Donc il eſt au point C qui eſt le ſeul qui ſoit commun aux deux lignes BF, DE.

24. Si on mene FN parallele à AB, elle ſera la moitié de AE & de EB ; donc parce que les triangles CBE, CFN ſont ſemblables, comme FN eſt la moitié de BE, ainſi CN eſt la moitié de CE ; donc CF eſt auſſi la moitié de CB. Si on diviſe DE en 6 parties égales, DN en contiendra 3, & NE les trois autres ; or CN eſt la moitié de CE ; de plus CN + CE priſes enſemble valent 3 parties, donc CE double de CN en vaut deux, & DC 4. D'où il ſuit que le centre de gravité C eſt ſur la ligne DE ou ſur la ligne BF aux deux tiers de ces deux lignes depuis les ſommets D & B.

25. Si par le point C on mene la ligne MH parallele à AB, AM ſera le tiers de AB, & DH le tiers de DB, & le point C diviſera MH en deux parties égales. C'eſt pourquoi, ſi après

avoir pris sur les côtez AB, DB les parties AM, DH qui soient chacune le tiers du côté sur lequel on la prend, que l'on mene MH, le centre de gravité du triangle sera au milieu de la ligne MH.

Fig. 6. 26. *Si l'on a plusieurs triangles isosceles égaux & semblables qui aient un même sommet* C, *tels que* ABC, BDC, DEC, EFC, &c. *qu'on prenne sur les côtez les parties* Aa, Bb, Dd, Ee, Ff *qui soient chacune le tiers de l'un des côtez* AC, BC, &c. *que l'on mene les lignes* ab, bd, de, ef, *les centres de gravité des triangles sont au milieu de ces lignes.*

Fig. 7. 27. Un secteur de cercle peut être conçu composé d'une infinité de triangles isosceles qui ont pour côtez les rayons du secteur & pour bases les lignes infiniment petites qui forment l'arc du secteur. C'est pourquoi si après avoir pris sur le rayon une partie *Aa* qui en soit le tiers, on décrit avec *Ca* l'arc *adf* compris entre les rayons du secteur, les centres de gravité des triangles seront sur l'arc *adf*, & chaque côté de cet arc étant infiniment petit, on peut concevoir que ces centres occupent toute la longueur de l'arc; d'où il suit que la pesanteur de tous les triangles est répresentée par l'arc *af*. D'où il suit encore qu'en trouvant le centre de gravité de l'arc *AF*, l'on aura celui du secteur *ACF*. Par une raison semblable toute la pesanteur de la figure 6 *ABDEFC* est réunie sur la ligne *abdef*. Donc le centre de gravité de la figure est le même que celui de cette ligne. On va voir ce qu'il faut faire pour trouver le centre de gravité d'une portion de perimetre d'un polygone régulier, ce qui donnera le moyen d'avoir le centre de gravité de la portion *ABDEFC*. On appelle ici nombre ~~pair~~ le nombre 2 ou les puissances de 2.

* pairement pair

28. *Trouver le centre de gravité d'une portion de perimetre d'un polygone régulier composée d'un nombre de côtez pairement*

Fig. 8. *pair, c'est-à dire de* 2, *de* 4, *de* 8, *de* 16, *&c.* On suppose que la portion ANR contient 8 côtez. Par l'angle N qui divise la portion ANR en deux parties égales, il faut mener le rayon oblique NO qui divisera la corde AR en deux parties égales au point V, & qui sera perpendiculaire à la même corde; il y aura quatre côtez de part & d'autre du rayon NO. Il faut diviser les quatre côtez AD, DG, GL, LN en deux parties égales aux points B, H, I, K, & joindre les points de divisions des deux premiers par la ligne BH, joindre pareillement les points de divisions des deux autres par la ligne IK, & après avoir mené les rayons obliques DO, LO qui couperont les lignes BH, IK en deux parties égales aux points E, M & leur seront perpendicu-

laires, il faut mener EM & le rayon oblique GO qui diviſera EM en deux parties égales au point F ; du point F il faut mener FCS perpendiculaire à NO qui aille rencontrer au point S le rayon oblique OP qui paſſe par le milieu P des quatre autres côtez qui ſont de l'autre part de NO. Je dis que le point C où la ligne FS coupe le rayon oblique NO, eſt le centre de gravité de la portion de périmetre ANR.

Puiſque le polygone eſt régulier, tous les côtez ſont égaux & par conſéquent également peſans ; donc le centre de gravité de chaque côté eſt au milieu de ce côté ; donc les points B, H, I, K ſont les centres de gravité des côtez AD, DG, GL, LN. Les lignes BH, IK ſont diviſées en deux parties égales aux points E, M ; donc les points peſans B, H, I, K étant deux à deux d'égale peſanteur ſont en équilibre ſur les points E, M qui ſont par conſéquent les centres de gravité, ſçavoir le point E des deux côtez AD, DG, & le point M des côtez GL, LN: or les points E, M ſont également chargez ; donc le point F milieu de la ligne EM, eſt le centre de gravité des points peſans E, M, & par conſéquent des quatre côtez AD, DG, GL, LN; il eſt évident que la perpendiculaire FCS coupe ſemblablement ou dans les mêmes circonſtances les rayons obliques GO, PO qui forment avec le rayon NO des angles égaux ; donc le point S eſt le centre de gravité des quatre autres côtez R, P, Z, N, de même que le point F eſt le centre de gravité des côtez AD, DG, GL, LN. Les deux points F, S étant également chargez, il eſt viſible que leur centre de gravité eſt le point C milieu de la ligne FS ; donc le point C eſt le centre de gravité de la portion de perimetre ANR. S'il y avoit plus de 8 côtez, qu'il y en eût 16 ou 32 ou 64, &c. on trouveroit de la même maniere le centre commun de gravité de tous ces côtez.

29. On peut trouver d'une maniere plus aiſée le centre de gravité, par cette proportion, La ſomme des côtez eſt à la corde AR, comme le rayon droit OB, eſt à la diſtance OC du centre de gravité. Soit menée AN qui ſera diviſée en deux parties égales au point X par le rayon oblique GO : ſoit auſſi menée la ligne AG qui ſera quadruple de BE ou de HE, car la moitié de GA eſt double de BE, puiſque AD eſt double de BD. Cela poſé les triangles BDE, BOE ſont ſemblables (37. *Géom.*) ; donc BD . BE :: BO . EO & multipliant les deux premiers termes par 8, on aura 8BD . 8BE :: BO . EO, les deux triangles GAX, EOF ſont auſſi ſemblables, les angles X, F ſont droits; d'ail-

leurs les triangles rectangles GVO, EFO ſemblables ont l'angle aigu EOF commun ; donc l'angle OEF eſt égal à l'angle AGX (15.*Géom.*). Donc AG ou 4BE. AX :: EO. FO ; doublant les deux premiers termes on aura 8BE. 2AX ou AN :: EO. FO. Les deux triangles AVN, FCO ſont ſemblables, les angles V & C ſont droits par l'hypotheſe, l'angle NAR a pour meſure la moitié de l'arc RN, & l'angle FOC a pour meſure l'arc NG (38.*Géom.*) ; or l'arc NG eſt la moitié de l'arc RN ; donc AN. AV :: FO. OC. Voici de ſuite les trois proportions qu'on vient de former.

8DB . 8BE :: BO . EO
8BE . AN :: EO . FO
AN . AV :: FO . OC

Si on multiplie les termes de ces proportions, les antécedens par les antécedens, & les conſéquens par les conſéquens, il paroît à vue d'œil que les deux premiers produits ont pour produiſant commun 8BE×AN, & les deux derniers EO×FO ; donc la proportion eſt réduite à ces quatre termes 8BD. AV :: BO. OC ; & ſi l'on double les deux premiers on aura 16BD. 2AV ou AR :: BO. OC : or 16BD eſt la même choſe que les huit côtez de la portion ANR ; donc la ſomme des côtez eſt à la corde AR comme le rayon droit BO eſt à la diſtance OC du centre du polygone au centre de gravité de la portion ANR. Quelque ſoit le nombre des côtez pairement pair de la portion ANR, on aura toujours la même analogie.

Fig. 6. 30. Si la portion AFCA de l'aire d'un polygone régulier eſt compoſée d'un nombre de côtez pairement pair, on peut en avoir le centre de gravité ; car les centres de gravité de tous les triangles ſont ſituez au milieu des lignes *ab*, *bd*, *de*, *ef* qui forment une figure ſemblable à la figure ABDEF ; or par le problême on peut trouver le centre commun de gravité des poids ſuſpendus au milieu des côtez *ab*, *bd*, *de*, *ef*, lequel ne differe point du centre de gravité de l'aire AFC ; donc le problême fait trouver le centre de gravité de l'aire AFC.

Fig. 7. 31. Puiſque le problême fait trouver le centre de gravité d'une portion de périmetre d'un polygone régulier quelqu'en ſoit le nombre des côtez, pourvu qu'il ſoit pairement pair, il s'enſuit qu'on peut trouver le centre de gravité d'un arc *af* par la proportion, l'arc *adf* eſt à la corde *af* comme le rayon *Cf* eſt à la diſtance *Co* : ce quatriéme terme détermine ſur le rayon *Cd* qui diviſe l'arc en deux parties égales, le centre de gravité C de cet arc : car on peut regarder l'arc *af* comme une portion de périmetre de polygone régulier d'un nombre de côtez pairement pair, & le rayon *Cf* ou *Cd* comme le rayon droit.

32. L'orſque le centre de gravité de l'arc *adf* eſt trouvé, on a le centre de gravité du ſecteur AFCA, car ces deux centres ſont au même point.

On ne pouſſe pas plus loin la conſidération du centre de gravité des lignes & des ſurfaces : voici la maniere de trouver ce centre dans la pyramide.

33. Soit la pyramide triangulaire ABDE dont la baſe ABD eſt répréſentée en l'air, & les trois autres faces ſont les triangles AEB, BED, AED. Si du ſommet B oppoſé à AD l'on mene BF qui diviſe AD en deux parties égales, le centre de gravité de la baſe ABD ſera au point O diſtant de F du tiers de BF (24) ; en ſorte que $OF = \frac{1}{3}$ BF. Que l'on conçoive la ligne OE menée du centre de gravité O de la baſe au ſommet E, je dis que le centre de gravité de la pyramide eſt ſur la ligne OE : car ſi l'on imagine que la pyramide eſt diviſée en tranches infiniment minces paralleles à la baſe ABD elles ſeront ſemblables à cette baſe ABD ; & puiſque la ligne OE eſt ſemblablement ſituée à l'égard de ces tranches, c'eſt-à-dire, qu'elle fait avec elles les mêmes angles qu'avec la baſe ABD, elle les rencontre en des points ſemblablement ſituez, & par conſéquent elle paſſe par les centres de gravité de toutes ces tranches. Donc toute la peſanteur de la pyramide eſt réunie ſur la ligne OE. Donc le centre de gravité de la pyramide eſt ſur la ligne OE. Fig. 9.

Si par le point F milieu de AD on mene la ligne FE au ſommet E de la pyramide, elle paſſera par le centre de gravité du triangle EAD ; & ſi l'on prend FG qui ſoit le tiers de FE, le point G ſera ce centre (24). Si l'on conçoit à préſent l'angle ſolide B comme le ſommet de la pyramide, & le triangle AED comme ſa baſe, le centre de gravité de la pyramide eſt auſſi ſur la ligne BG, ce qui eſt évident par ce qui vient d'être dit pour prouver que ce centre eſt ſur la ligne OE ; or les deux lignes OE & BG ſont ſur le même plan EBF ; donc ces deux lignes ſe coupent en un point C. Donc le centre de gravité de la pyramide qui ſe trouve & ſur la ligne OE, & ſur la ligne BG, eſt en C point d'interſection de ces deux lignes.

34. D'où il ſuit que le centre de gravité d'une pyramide eſt au point d'interſection de deux lignes menées de deux angles ſolides aux centres de gravité des baſes ou faces oppoſées à ces angles.

35. Je dis que CO eſt le quart de EO. Il faut mener GH parallele à BF qui rencontre EO au point H : de même que GF eſt

le tiers de FE (24) : ainſi OH eſt le tiers de OE (7. *Géom.*) ; & parce que les triangles EOF, EHG ſont ſemblables, de même que EH eſt les deux tiers de OE, il faut que GH ſoit les deux tiers de FO qui eſt elle-même le tiers de BF (24) ; donc ſi on diviſe BF en 9 parties, OF en contiendra 3, GH 2, & BO 6 ; donc les lignes GH, BO ſont entr'elles comme 2 & 6, ou comme 1 & 3 ; donc à cauſe des triangles ſemblables GCH, BOC de même que GH eſt le tiers de BO, ainſi CH eſt le tiers de CO ; or ſi l'on diviſe la ligne EO en 12 parties égales, EH en contiendra 8, & HO en contiendra 4 ; car on vient de dire que OH eſt le tiers de OE, & EH les deux tiers ; & puiſque CH eſt le tiers de CO, il faut que CO contienne 3 parties, & CH une ; donc comme 3 eſt le quart de 12, ainſi CO eſt le quart de EO. Il eſt viſible que CO eſt le tiers de CE, car ſi à EH qui contient 8 parties on ajoute CH qui en vaut une, CE contiendra 9 parties, & CO 3 ; donc CO eſt le tiers de CE. On fera voir de la même maniere que GC eſt le quart de BG & le tiers de CB.

36. D'où il ſuit que pour avoir le centre de gravité d'une pyramide, il faut mener une ligne d'un angle ſolide au centre de gravité de la baſe oppoſée à cet angle, diviſer la ligne en quatre parties égales, & le centre de gravité de la pyramide ſera à la premiere diviſion en commençant vers la baſe, ou à la troiſiéme en commençant par l'angle ſolide.

37. On a quelquefois beſoin dans la pratique de trouver le centre de gravité d'un ſolide. Voici une méthode mécanique. Il faut poſer le corps ſur une table & faire en ſorte qu'il en excede les bords juſqu'à ce qu'il ſoit ſur le point de tomber par l'effort de ſon poids : il faut tirer une ligne qui diſtingue la partie qui déborde de celle qui eſt ſur la table. Il faut enſuite tourner le corps dans un autre ſens & le faire pareillement déborder juſqu'à ce que la partie qui avance ſoit prête d'entraîner le corps par le ſeul effort de la peſanteur, tirer une ligne qui ſépare la partie qui eſt hors de la table d'avec celle qui porte ſur la table, en ſorte que cette ſeconde ligne coupe la premiere, le point d'interſection eſt un point de la direction du centre de gravité.

PROPRIETEZ DU CENTRE DE GRAVITE'.

38. Puiſque les parties d'un corps ſont en équilibre ſur le centre de gravité, quelque ſituation qu'on leur donne, il s'enſuit que tant que ce centre ſera ſoutenu, le corps ſera en repos, s'il

n'eſt pouſſé que par l'effort de la peſanteur ; mais ſi ce centre n'eſt pas ſoutenu, il eſt néceſſaire que le corps ſoit mu juſqu'à ce que la ligne de direction de la puiſſance qui doit réſiſter, paſſe par le centre de gravité. (On ſuppoſe que le corps eſt libre comme ſeroit un poids ſuſpendu à une corde.)

39. Si la ligne de direction du centre de gravité d'un corps eſt perpendiculaire à ſa baſe, le corps ſera en repos. Car comme toute la peſanteur du ſolide eſt, pour ainſi dire, réunie au centre de gravité, le corps n'eſt ſollicité à ſe mouvoir que ſuivant la direction de ce centre ; or l'effort, ſuivant cette direction, étant perpendiculaire au plan qu'il preſſe, ſera totalement ſoutenu ; donc le corps ſera en repos ; mais ſi la ligne de direction eſt inclinée ou oblique à la baſe du corps, il eſt néceſſaire qu'il ſoit mu ſi le frotement ou quelqu'autre obſtacle ne l'en empêche : car pour lors la peſanteur eſt dans le cas d'une puiſſance qui pouſſe un corps ſuivant une direction oblique au plan ſur lequel le corps eſt poſé. On a prouvé qu'un tel corps ſeroit mu en gliſſant (*Liv.* I. 173) ; donc ſi le plan ſur lequel un corps peſant eſt poſé n'eſt pas horizontal, mais oblique à l'horizon, il ſera mu, quoique la ligne de direction du centre de gravité rencontre la baſe du corps.

40. Si une ſphere eſt poſée ſur un plan horizontal, elle ne ſera pas mue par la ſeule peſanteur ; car le centre de gravité de la ſphere eſt au centre même de la ſphere : d'ailleurs la direction de ce centre eſt perpendiculaire au plan horizontal ; donc elle paſſe par le point d'attouchement ; cette direction trouve donc un point fixe qui réſiſte pleinement à l'effort, par conſéquent la ſphere ſera en repos ; mais ſi la ſphere eſt poſée ſur un plan tant ſoit peu incliné, elle roulera ; car pour lors la ligne de direction ceſſant d'être perpendiculaire au plan horizontal, la peſanteur ſera comme une puiſſance dont la direction ſeroit oblique au plan : ſi cette direction rencontroit la baſe du corps, le corps gliſſeroit (*Liv.* I. 173) ; mais dans le cas préſent cette direction ſort de la baſe, c'eſt pourquoi la ſphere ſera mue ſuivant la direction même de la puiſſance ; par conſéquent elle le roulera.

Si les directions des corps peſans rendent à un centre ou qu'elles concourent, il n'y a ſur le plan horizontal qu'un point où la ſphere puiſſe être en repos ; ce point eſt celui ou le plan touche la terre ; & ſi l'on poſe la ſphere ſur tout autre point différent du point d'attouchement, elle roulera vers ce point ; car puiſque

les directions de la peſanteur concourent, elles ſont néceſſairement obliques au plan horizontal, excepté celle qui paſſe par le point d'attouchement; donc ſelon ce qui vient d'être dit, ſi la ſphere eſt poſée ſur un point different du point d'attouchement, elle ſera comme ſur un plan incliné; elle roulera donc vers le point d'attouchement qui eſt le point de repos.

41. Un édifice peut ſubſiſter, quoiqu'il ſoit incliné à l'horizon, & qu'il panche plus d'un côté que d'un autre; car ou la direction du centre de gravité du mur qui panche, eſt hors de la baſe du mur, ou elle la rencontre: dans le ſecond cas il n'eſt pas ſurprenant qu'un mur ſubſiſte, puiſqu'il eſt appuyé, ſur-tout ſi les pierres en ſont bien cimentées: dans le premier cas l'édifice peut encore reſter en cet état, pourvu que ce mur ſoit aſſez bien lié avec le corps de l'édifice, pour qu'il ne puiſſe pas s'en ſéparer par ſa propre pente; car alors pour juger de la ſolidité de l'édifice, il ne faut pas tant avoir égard au centre de gravité du mur qui panche qu'au centre de gravité de tout l'édifice.

On rapporte de la tour de Boulogne en *Italie*, que la ligne à plomb abbaiſſée du haut de la tour, s'éloigne du pied du mur de 9 pieds, & que la même ligne à plomb s'éloigne du pied de la tour de Piſe de ſept coudées un tiers, ce qui ne doit pas paroître ſurprenant, car on ſçait que les anciens bâtimens ſont aſſez ſolides pour réſiſter à cette pente; & encore plus facilement, ſi le centre de gravité du mur qui eſt panché, n'a pas ſa direction hors de la baſe.

42. Lorſque les hommes marchent, ils balancent leurs corps de la droite à la gauche & de la gauche à la droite, & ſuivent en cela ſans y penſer les regles de la mécanique, ſans quoi ils ne pourroient pas mettre un pied devant l'autre; car il faut que le pied qui avance ſoit déchargé du poids du corps, qui l'applique contre terre; ainſi ſi c'eſt le pied droit qu'on porte en avant, il faut que tout le poids du corps tombe ſur le pied gauche; or c'eſt-là ce qu'on éxécute ſans réflexion lorſqu'on panche alternativement le corps de la droite vers la gauche, & de la gauche vers la droite.

43. C'eſt encore pour donner un appui au centre de gravité qu'on avance un peu le corps, lorſqu'étant aſſis on veut ſe lever, & que ceux qui portent des fardeaux ſur leur dos ſe courbent. C'eſt auſſi pour ſoutenir le centre de gravité que les bêtes à quatre pieds marchent en croiſant leurs pas, c'eſt-à-dire, que

ni les deux pieds gauches ni les deux pieds droits ne ſont jamais mus à la fois, mais elles remuent à la fois un pied droit & un pied gauche, ſçavoir ceux de devant ou de derriere ſi elles vont le galop, ou un pied de devant & l'autre de derriere ſi elles vont le pas ordinaire.

44. On eſt plus fatigué à monter qu'à deſcendre; car pour monter il faut élever le poids du corps, au lieu que pour deſcendre il ſuffit de ſuivre la pente naturelle. Mais on ſera peut-être étonné de ce qu'on ſe laſſe plus à deſcendre qu'à marcher dans une plaine, il n'y a pas cependant lieu d'en être ſurpris, car il faut que les muſcles agiſſent avec une force plus grande lorſqu'on deſcend; dans la plaine il ſuffit en marchant de porter ſon corps alternativement de droite à gauche, & de gauche à droite; mais lorſqu'on deſcend, outre qu'il faut donner au corps ce mouvement, il faut de plus modérer la trop grande viteſſe que la peſanteur tend à imprimer au corps; c'eſt ce qu'on fait en ſe panchant un peu en arriere: or comme on ne ſe tient dans cette poſture qu'en roidiſſant les muſcles, on éprouve une plus grande laſſitude à deſcendre par un chemin un peu eſcarpé qu'à marcher ſur un terrein qui eſt de niveau.

45. C'eſt encore ſur la connoiſſance que l'on a de la propriété des centres de gravité, qu'on conſtruit pluſieurs machines comme les meules des moulins, toutes les roues horizontales & mêmes les verticales &c. qui ne ſont appuyées, pour ainſi dire, que par leurs centres de gravité, ce qui donne une extrême facilité pour les mouvoir. En un mot tous les corps qu'on veut mouvoir en rond, & qui par la lourdeur de leur maſſe réſiſteroient trop aux efforts ordinaires des hommes, comme les cloches, les portes des maiſons, &c. ſont bâtis ſur le même principe.

DES RAPPORTS DES POIDS de differente matiere.

46. Il ne faut pas confondre le volume d'un corps avec ſa maſſe. Le volume eſt l'eſpace qu'il occupe en long en large & en profondeur, lequel ſe meſure par les regles de la Géométrie, la maſſe eſt la quantité de matiere que ſon volume contient. Si tous les corps n'étoient pas percez d'un nombre innombrable de pores, & que tout l'eſpace qu'ils occupent fût rempli de la matière propre qui les compoſe, il ne ſeroit pas néceſſaire de diſtinguer le volume d'un corps d'avec ſa maſſe; mais on ſçait que tous les corps ſont des vrais cribles, & qu'ils ſont percez d'u-

ne infinité de trous ; que par conſéquent le volume ne meſure pas la quantité de matiere ou le nombre de leurs parties ſolides. Il n'eſt pas difficile de ſe perſuader qu'un pied cubique de plomb contient plus de ſa matiere propre qu'un pied cube de liege n'en contient de la ſienne à cauſe du grand nombre des pores ; car ſi on met ce pied cube de liege ſous la preſſe, on le réduit à un très-petit volume ; ce qui prouve que la matiere du liege occupe un très-petit eſpace dans ce pied cube.

47. L'expérience montre que les corps de differente matiere peſent inégalement en pareil volume ; ainſi un pied cube de plomb peſe bien davantage qu'un pied cube de liege. D'où eſt-ce que procede cette inégalité de poids ? comme les raiſonnemens qu'on feroit ſur ce ſujet pourroient s'éloigner de la vérité, s'ils n'étoient appuyez ſur l'expérience, on en va rapporter quelques unes qui ont été faites & qui ont rapport à la queſtion propoſée.

48. Galilée a obſervé que tous les corps, ceux même qu'on appelle légers, commençoient à deſcendre dans l'air avec la même viteſſe que les corps peſans. Par exemple, ſi on laiſſe tomber deux bales l'une de plomb & l'autre de liege, elles vont enſemble preſque l'eſpace de deux pieds, après quoi la bale de plomb devance de beaucoup celle de liege. M. Mariotte a fait des expériences ſemblables. On laiſſa tomber enſemble de la même hauteur qui étoit de 80 pieds une boule de mail & un boulet de canon d'une même groſſeur, ils deſcendirent juſqu'à 25 pieds également vîte ; le boulet étant à 50 pieds paſſa la boule de mail d'environ deux pieds, & au bas de la chute de plus de quatre pieds.

49. Ces deux expériences font voir que la peſanteur imprime à tous les corps la même viteſſe, & que ſi les plus peſants deſcendent plus vîte vers la fin de la chute, & paſſent ceux qui peſent moins, la difference des viteſſes vient de ce qu'ils trouvent une moindre réſiſtance dans l'air à proportion de ce qu'ils peſent davantage ; car l'air réſiſte aux corps en mouvement, & leur ôte une partie de la viteſſe. Si deux corps ont la même groſſeur, la même figure & la même viteſſe, l'air leur réſiſte également, c'eſt-à-dire, qu'il leur ôte la même quantité de mouvement à l'un & à l'autre ; mais ſi la force qui eſt appliquée à l'un d'eux eſt plus grande, ſi par exemple, la force du corps A eſt quadruple de la force du corps B, la viteſſe que le corps A perdra ſera bien moindre que celle que perd le corps B ; car il pour-

roit ſe faire que la réſiſtance de l'air fût telle qu'elle détruiſit dans le corps A la quatriéme partie de ſa force, auquel cas le corps B perdroit toute celle qu'il a, & par conſéquent toute ſa viteſſe, dans le tems que le corps A conſerveroit encore les trois quarts de ſa ſienne: ainſi plus la force d'un corps eſt grande, moins il perd de ſa viteſſe, la figure, la groſſeur & la viteſſe étant ſuppoſées les mêmes: or plus un corps eſt peſant, plus la force qui lui eſt appliquée eſt grande; il doit donc trouver une moindre réſiſtance dans l'air, c'eſt-à-dire, perdre une moindre viteſſe.

On trouve dans les principes de M. Neuton, Propoſition 6, Liv 3, une expérience qui prouve que ſans la réſiſtance de l'air tous les corps recevroient de la peſanteur la même viteſſe. M. Neuton fit faire deux boëtes de bois, rondes & égales. Il mit dans l'une un morceau d'or & dans l'autre ſucceſſivement un poids égal de bois, d'eau, de froment, de ſable, &c. toutes matieres moins peſantes que l'or, il ſuſpendit ces boëtes à des fils d'égale longueur; ces boëtes ainſi ſuſpendues faiſoient des pendules de onze pieds de long. Après avoir éloigné les pendules également du repos, il trouva qu'ils alloient & revenoient enſemble pendant un tems conſidérable, faiſant leurs vibrations égales en tout, & quant à l'étendue, & quant à la durée. Cela poſé, ſi les deux boëtes euſſent été vuides, elles auroient fait leurs vibrations enſemble étant parfaitement égales en tout; les matieres que l'on met dedans ne troublent point non plus l'égalité des vibrations, quoique fort inégales en volumes, comme il paroît par l'expérience même; d'où il ſuit que ſi ces mêmes matieres étoient mues ſeules en pendule dans un milieu ſans réſiſtance, elles iroient & retourneroient enſemble, puiſqu'en écartant cette réſiſtance, ou du moins faiſant en ſorte qu'elle ſoit égale pour toutes, elles vont & retournent de même, leurs vibrations étant égales en tout.

D'où il faut conclure que la peſanteur imprime à tous les corps la même viteſſe, & que ſans la réſiſtance de l'air ils tomberoient tous également vîte.

PROPOSITION PREMIERE.

50. *Les peſanteurs de deux corps ſont entr'elles comme les maſſes.*

Demonstration. Suivant les expériences précedentes tous les corps, ceux qu'on nomme légers, comme ceux qu'on appelle

peſants, tomberoient également vîte ſans la réſiſtance de l'air, & en tems égaux acquerroient des degrez égaux de viteſſes: donc les quantitez de mouvement ſeroient comme les maſſes (*Liv.* I. 91): or deux forces conſtantes ſont entr'elles comme les quantitez de mouvement qu'elles produiſent en même-tems; d'ailleurs dans le cas préſent les peſanteurs ſont des forces conſtantes, elles ſont donc entr'elles comme les quantitez du mouvement qu'elles impriment aux corps en tems égaux. Donc elles ſont entr'elles comme les maſſes qu'elles meuvent.

51. *Si les corps ſont de même matiere, les poids ſont entr'eux comme les volumes.* Car les poids ou peſanteurs de deux corps ſont dans la raiſon des maſſes; mais dans le cas préſent les maſſes ſont comme les volumes. Donc les peſanteurs ſont comme les volumes: un pied cube de plomb peſe deux fois autant qu'un demi pied cube de la même matiere, parce que ſon volume étant double il contient deux fois plus de matiere.

52. *La peſanteur ſpécifique d'un corps eſt la meſure ou la quantité de ſon poids, comparée à celle d'un autre corps de même volume. Si un corps peſe deux fois, trois fois plus qu'un autre corps de même volume, on dit que ſa peſanteur ſpécifique eſt double ou triple.*

Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps qui ont des volumes égaux, ſont entr'elles comme les maſſes. Car lorſque les volumes ſont égaux, les peſanteurs ſpécifiques ne different pas des peſanteur abſolues ſelon la définition; or les peſanteurs abſolues ſont entr'elles comme les maſſes; donc les peſanteurs ſpécifiques qui dans le cas préſent ſont comme les peſanteurs abſolues, ſont auſſi entr'elles comme les maſſes.

53. *Si deux corps peſent également, les peſanteurs ſpécifiques ſont dans la raiſon réciproque des volumes.* Voici le ſens de la propoſition: Que l'on prenne deux maſſes de même poids, par exemple, deux livres de plomb & deux livres d'étain; les peſanteurs ſpécifiques du plomb & de l'étain, c'eſt-à-dire, en égal volume, ſont dans la raiſon réciproque des volumes des deux maſſes ou poids égaux ſuppoſez chacune de deux livres.

Si le plomb peſe, par exemple, deux fois plus que l'étain en pareil volume, la peſanteur ſpécifique du plomb ſera double de la peſanteur ſpécifique de l'étain; donc ſi on veut que le volume d'étain peſe autant que le volume de plomb, il faudra doubler ſon volume. Donc ſi une maſſe d'étain peſe autant qu'une maſſe de plomb, il faudra que de même que la peſanteur ſpécifique du

plomb

plomb eſt double de la peſanteur ſpécifique de l'étain, réciproquement la maſſe d'étain ait un volume double de la maſſe du plomb. Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps de differente matiere qui peſent également ſont donc entr'elles réciproquement comme les volumes.

54. *Les peſanteurs ſpécifiques des deux corps* A,B *ſont en raiſon compoſée de leurs peſanteurs propres, & de la raiſon réciproque des volumes.*

Si les poids des deux corps étoient égaux, les peſanteurs ſpécifiques ſeroient dans la raiſon réciproque des volumes; mais ſi le poids du corps A eſt plus grand que le poids du corps B, qu'il ſoit triple, la peſanteur ſpécifique du corps A ſera triple de ce qu'elle auroit été, ſi les poids avoient été égaux; donc la raiſon des peſanteurs ſpécifiques ſera triple de la raiſon réciproque des volumes; donc pour avoir une raiſon égale à celle des peſanteurs ſpécifiques, il faut faire en ſorte que la raiſon réciproque des volumes ſoit trois fois plus grande qu'on ne la ſuppoſe: or par l'hypotheſe le poids du corps A eſt triple du poids du corps B; donc en multipliant les termes de la raiſon réciproque des volumes, ſçavoir le volume du corps B par le poids triple du corps A, & le volume du corps A par le poids du corps B, la raiſon des produits ſera triple de la raiſon réciproque des volumes (20. *Arit.*), & par conſéquent égale à la raiſon des peſanteurs ſpécifiques. Donc, &c.

55. *Les peſanteurs propres de deux corps ſont en raiſon compoſée des peſanteurs ſpécifiques, & des volumes.*

Si les volumes étoient égaux, les peſanteurs propres ſeroient comme les peſanteurs ſpécifiques, puiſqu'elle n'en differeroient pas; mais ſi les volumes ſont inégaux, les peſanteurs propres augmenteront dans la raiſon des volumes; un volume double donnera une peſanteur propre double de ce qu'elle auroit été, les volumes étant ſuppoſez égaux; donc pour avoir le rapport des peſanteurs propres, il faudra multiplier les peſanteurs ſpécifiques par les volumes. Donc les peſanteurs propres ſont dans la raiſon compoſée des peſanteurs ſpécifiques, & des volumes.

CHAPITRE SECOND.

DU MOUVEMENT DES CORPS jettez ſuivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horizon.

56. L'Obſervation montre que les corps tendent au centre ſuivant des directions perpendiculaires à la ſurface du globe terreſtre, & par conſéquent perpendiculaires à l'horizon, car l'horizon n'eſt que la continuation de la portion de la ſurface de la terre, à laquelle la direction du corps peſant répond. On nomme encore cette direction verticale, parce que ſi l'obſervateur eſt à l'endroit même où eſt le corps peſant, elle paſſe par le point vertical; c'eſt-à-dire, celui qui eſt directement au-deſſus de ſa tête.

57. Un corps peſant qui eſt abandonné à lui-même, c'eſt-à-dire, qui n'eſt point ſoutenu ou empêché, eſt mis en mouvement; car il eſt pouſſé, & par l'hypotheſe rien ne s'oppoſe à ſon mouvement; de plus il eſt mu d'un mouvement accéleré, puiſqu'il eſt continuellement pouſſé.

58. Si un corps eſt pouſſé verticalement de bas en haut, il montera par un mouvement retardé ſans s'écarter de ſa premiere direction.

1°. Le mouvement d'un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut, eſt continuellement retardé; de même que la peſanteur accélere la viteſſe d'un corps qui deſcend, elle la retarde lorſque le corps monte, car pour lors l'effort de la peſanteur eſt oppoſé à la force du corps; le corps doit donc perdre à chaque inſtant de ſa force ou de ſon mouvement. 2°. Le mobile ne s'éloignera pas de ſa premiere direction, car la peſanteur étant directement oppoſée au mouvement du mobile, elle en retardera la viteſſe ſans le détourner de ſa premiere direction.

59. Un corps qui eſt pouſſé de bas en haut ne peut pas toujours monter, puiſqu'il perd de ſon mouvement à chaque inſtant.

Dans la ſuite on ſuppoſera avec Galilée que la peſanteur eſt une force conſtante, & qu'elle produit dans les corps peſans des degrez égaux de viteſſe en des tems égaux, lorſqu'ils ſont mus ſuivant ſa direction, & qu'ils ne rencontrent aucun obſtacle qui les retarde; mais ſi les corps ſont mus contre la direction de la peſanteur, on ſuppoſera qu'elle leur ôte des degrez de viteſſe

égaux à ceux qu'elle leur auroit donné s'ils avoient *été mus ſuivant ſa direction.* On ſuppoſera auſſi que les corps ſe meuvent dans l'air comme dans un milieu qui ne réſiſte point, c'eſt-à-dire, qu'on fera abſtraction de cette réſiſtance.

60. *Un corps peſant qui deſcend librement eſt mu d'un mouvement uniformément accéleré*, c'eſt-à-dire, que ſi on diviſe le tems du mouvement en parties égales, par exemple, en ſecondes, à chaque ſeconde le corps acquiert un degré de viteſſe; en ſorte que les viteſſes acquiſes après deux tems ſont entr'elles comme les nombres des ſecondes qui ſe ſont écoulées pendant ces deux tems, ſi le nombre de ſecondes qui ſe ſont écoulées pendant le premier tems, eſt double du nombre de ſecondes qui ſe ſont écoulées pendant le ſecond tems, la viteſſe acquiſe pendant le premier tems ſera double de la viteſſe acquiſe pendant le ſecond tems.

Le ſimple expoſé de la propoſition ſuffit pour en faire voir la vérité. Car ſuivant l'hypotheſe la peſanteur eſt une force conſtante qui donne à chaque inſtant ou dans chaque ſeconde des degrez égaux de viteſſe à un corps qui tombe librement; or ce corps conſerve tous les degrez de viteſſe que la peſanteur lui a donnés, puiſqu'il n'y a aucune force, aucun obſtacle qui les lui ôte ou qui les diminue lorſqu'une fois il les a reçus; donc le nombre des degrez de viteſſe qu'un corps acquiert pendant un certain tems, eſt égal au nombre d'inſtans ou des ſecondes qui ſe ſont écoulés; donc les viteſſes qu'un corps acquiert en tombant librement pendant deux tems, ſont dans le rapport de ces tems; Donc le corps eſt mu d'un mouvement uniformément accéleré.

61. *Les degrez de viteſſe qu'acquiert un corps qui tombe librement, augmentent comme les nombres naturels* 1. 2. 3. 4. *&c.* Car le tems augmente comme les mêmes nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c.

PROPOSITION SECONDE.

62. *L'eſpace parcouru par un corps qui tombe librement, eſt repréſenté par l'aire d'un triangle rectangle dont la hauteur repréſente le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems.* Cette propoſition a été démontrée ci-devant (*Liv.* I. 126.). On va néanmoins propoſer de nouveau la même preuve en la préſentant ſous un point de vue un peu different.

Demonstration. Si l'on diviſe par la penſée la hauteur du triangle en parties infiniment petites, elles repréſenteront les parties infiniment petites du tems de l'accéleration ou de la deſcente, & les parties de cette hauteur priſes du ſommet, les par-

ties du tems qui ſe ſont écoulées depuis le premier inſtant de la deſcente ; & ſi par les points de diviſion l'on conçoit des lignes paralleles à la baſe, elles répréſenteront les viteſſes acquiſes dans les tems exprimez par les hauteurs correſpondantes, car de même que les parties de la hauteur priſes de ſuite ſont dans la progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. &c. ainſi les paralleles priſes auſſi de ſuite ſont dans la même progreſſion ; & parce que les parties de la hauteur auſſi priſes de ſuite ne ſe ſurpaſſent que d'une partie infiniment petite, de même les paralleles priſes de ſuite ne ſe ſurpaſſent que d'une partie infiniment petite : d'où l'on voit que les accroiſſemens de viteſſe répréſentez par ces differences infiniment petites des paralleles ſont eux-mêmes infiniment petits. Par conſéquent l'on peut conſidérer la viteſſe d'un inſtant comme uniforme pendant cet inſtant. Cela poſé dans le mouvement uniforme l'eſpace parcouru dans un certain tems eſt exprimé par un rectangle dont la hauteur répréſente le tems, & la baſe la viteſſe (*Liv.* I. 15). Donc dans le cas préſent les eſpaces parcourus dans deux inſtans ſont entr'eux comme les rectangles dont les hauteurs infiniment petites répréſentent les inſtans, & les baſes les viteſſes acquiſes depuis le moment de la deſcente juſqu'à ces inſtans. Les hauteurs des rectangles ſont égales, donc ils ſont dans la raiſon des baſes (40. *Géom.*), c'eſt-à-dire, comme les viteſſes ; donc les eſpaces parcourus dans deux inſtans ſont dans la raiſon des viteſſes acquiſes depuis le moment de la deſcente juſqu'à la fin de ces inſtans. D'où il ſuit que les eſpaces parcourus pris de ſuite ſont dans la même raiſon que les viteſſes priſes auſſi de ſuite ; donc les eſpaces parcourus pris de ſuite ſont dans la même raiſon que les paralleles à la baſe du triangle priſes de ſuite ; donc la ſomme des eſpaces parcourus eſt exprimée par la ſomme des paralleles : or toutes les paralleles enſemble forment le triangle rectangle. Donc l'eſpace parcouru par un corps qui deſcend librement, eſt répréſenté par un triangle rectangle dont la hauteur exprime le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems.

PROPOSITION TROISIE'ME.

63. *L'eſpace qu'un corps parcourt en tombant librement depuis le repos, eſt la moitié de l'eſpace qu'il parcourroit uniformément, pendant un tems égal à celui de l'accélération avec la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems.*

DEMONSTRATION. L'eſpace parcouru pendant le tems de

l'accélération eſt répréſenté par un triangle rectangle dont la hauteur exprime le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe (62). L'eſpace parcouru par le mouvement uniforme, eſt répréſenté par un rectangle dont la hauteur exprime le tems, & la baſe la viteſſe (*Liv.* I. 15.) : or dans l'hypotheſe préſente le tems du mouvement uniforme eſt égal au tems du mouvement accéleré ; donc les hauteurs du triangle & du rectangle ſont égales : d illeurs la viteſſe dans le mouvement uniforme eſt ſuppoſée égale à la viteſſe acquiſe à la fin du tems de l'accéleration ; donc le triangle & le rectangle ont encore leurs baſes égales, donc le triangle ayant même hauteur & même baſe que le rectangle, en eſt la moitié (34. *Géom.*). Par conſéquent l'eſpace parcouru pendant le tems de l'accéleration eſt la moitié de l'eſpace que le corps parcourroit dans le même tems ou dans un tems égal, d'un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems.

On peut encore donner une autre démonſtration de la même propoſition ; mais avant de la propoſer il faut remarquer 1°. que dans une progreſſion arithmétique, deux termes également éloignez du terme moyen, c'eſt-à-dire, du terme qui eſt au milieu de la progreſſion, étant ajoutez, donnent des ſommes égales, & que le terme moyen eſt la moitié de chacune de ces ſommes (22.25. *Arit.*). 2°. Si un corps eſt mu dans l'inſtant A avec un degré de viteſſe, & dans l'inſtant B avec deux degrez, il parcourra le même eſpace que s'il étoit mu pendant l'inſtant A ou l'inſtant B avec trois degrez de viteſſe ; car dans l'un & l'autre cas il parcourra trois d'eſpace. 3°. Si le corps eſt mu pendant les inſtans A & B avec la moitié de trois degrez de viteſſe, il parcourra le même eſpace que s'il étoit mu pendant l'inſtant A ou l'inſtant B avec trois degrez de viteſſe. D'où l'on peut conclure en général que ſi un corps eſt mu pendant les inſtans A & B avec la moitié de la ſomme des viteſſes qu'il a eues pendant chacun des deux inſtans, il parcourra le même eſpace qu'il parcourt étant mu pendant l'inſtant A avec la viteſſe qu'il a dans cet inſtant & dans l'inſtant B avec la viteſſe particuliere de cet inſtant. Cela poſé,

Les viteſſes que reçoit un corps qui tombe librement, croiſſent ſuivant la progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. &c. Donc entre la plus petite qui eſt la viteſſe initiale, & la plus grande qui eſt la viteſſe acquiſe à la fin de la chute, il y a une viteſſe moyenne qui eſt égale à la moitié de la ſomme des viteſſes de deux inſtans de la chute, quels qu'ils ſoient, également éloignez de l'inſtant moyen auquel la viteſſe moyenne coreſpond ; donc la

viteſſe moyenne eſt égale à la moitié de la viteſſe initiale & de la viteſſe acquiſe priſes enſemble ; la viteſſe initiale étant infiniment petite peut être négligée ; donc la viteſſe moyenne eſt égale à la moitié de la viteſſe acquiſe. Cela poſé, dans un tems égal à deux inſtans de la chute également éloignez de l'inſtant moyen, la viteſſe moyenne feroit parcourir un eſpace égal aux eſpaces parcourus par les viteſſes propres & coreſpondantes à ces inſtans ; donc dans un tems égal à la totalité des inſtans de la chute, la viteſſe moyenne, c'eſt-à-dire, la moitié de la viteſſe acquiſe feroit parcourir un eſpace égal à la ſomme des eſpaces parcourus dans la totalité des inſtans de la chute par les viteſſes propres & correſpondantes à chacun de ces inſtans ; lors donc qu'il ne s'agit que de l'eſpace parcouru, c'eſt la même choſe que le corps ſoit mu d'un mouvement accéleré ou d'un mouvement uniforme avec la moitié de la viteſſe acquiſe ; car dans le même-tems il parcourra le même eſpace dans l'une & l'autre ſuppoſition ; mais il eſt évident que l'eſpace parcouru uniformément avec la moitié de la viteſſe acquiſe, n'eſt que la moitié de l'eſpace parcouru dans le même-tems avec la viteſſe acquiſe toute entiere. Donc l'eſpace parcouru par un corps qui tombe librement n'eſt que la moitié de l'eſpace qu'il parcourroit par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe à la fin de la chute, s'il étoit mu pendant un tems égal au tems du mouvement accéleré.

64. Si un corps étoit mû uniformément avec la viteſſe acquiſe à la fin de la chute, il parcourroit dans un tems égal au tems de la deſcente, un eſpace double de l'eſpace qu'il a parcouru par un mouvement accéleré (63) ; donc *dans un tems qui ſeroit égal à la moitié du tems de la deſcente il parcourroit le même eſpace qu'il a parcouru par le mouvement accéleré.*

PROPOSITION QUATRIE'ME.

65. *Si l'on diviſe le tems de la deſcente en parties égales, les eſpaces parcourus en des tems égaux, ſont entr'eux comme les nombres impairs* 1. 3. 5. *&c. de la ſuite des nombres naturels.*

DEMONSTRATION. Si l'on nomme 1 l'eſpace parcouru dans le premier tems, que ce ſoit, par exemple, 1 toiſe, l'eſpace parcouru dans le ſecond tems ſera 3 toiſes. Car la viteſſe acquiſe à la fin du premier tems ſera parcourir pendant le ſecond un eſpace double, c'eſt-à-dire 2 toiſes ; d'ailleurs la peſanteur qui eſt toujours appliquée au mobile & dont l'action eſt uniforme pour tous les tems, ſera parcourir un eſpace égal à l'eſpace parcouru dans le premier,

c'eſt-à-dire une toiſe ; donc tout l'eſpace parcouru dans le ſecond tems eſt 3 toiſes. A la fin du ſecond tems le mobile aura acquis deux degrés de viteſſe qui feront parcourir pendant le troiſiéme tems un eſpace quadruple de l'eſpace parcouru pendant le premier tems, (car puiſque 1 degré de viteſſe acquiſe fait parcourir un eſpace double ou 2 toiſes,) deux degrez de viteſſe acquiſe feront parcourir 4 toiſes, & la peſanteur toujours appliquée au corps fera parcourir une toiſe de même que dans le premier & le ſecond tems ; donc l'eſpace parcouru dans la troiſiéme partie du tems ſera 5 toiſes. 3 degrez de viteſſe acquiſe feront parcourir 6 toiſes dans le quatriéme tems, qui étant ajoutées à la toiſe que la peſanteur fait parcourir pendant le quatriéme tems, donneront 7 toiſes pour l'eſpace parcouru, & ainſi de ſuite.

66. Si l'eſpace parcouru pendant le premier tems étoit different de l'unité, pour lors les eſpaces parcourus en tems égaux, ſeroient les nombres 1. 3. 5. 7. &c. de la ſuite des nombres naturels multipliez chacun par le nombre qui exprimeroit l'eſpace parcouru dans le premier tems. Si le tems eſt, par exemple, diviſé en ſecondes, & qu'un corps qui tombe librement parcoure 15 pieds dans la premiere ſeconde, ou 1×15, il parcourra 3×15 pendant la deuxiéme ſeconde, il parcourra 5×15 dans la troiſiéme ſeconde & ainſi des autres termes. Or tous les termes de la ſuite étant multipliez par un même nombre, ſeront entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. Ainſi la propoſition eſt généralement vraie.

67. *On peut démontrer d'une maniere ſenſible que les eſpaces parcourus en tems égaux, ſont entr'eux comme les nombres impairs* 1. 3. 5. *&c.* L'eſpace parcouru dans le mouvement uniformément accéleré, eſt répréſenté par un triangle rectangle dont la hauteur exprime le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe. Si l'on diviſe la hauteur AB en autant de parties égales que le tems ; que par les points de diviſion on mene des paralleles à la baſe BC telles que GI, FL, EM, & que par les points I, L, M, où ces paralleles coupent le côté AC, on mene des paralleles au côté AB telles que IK, LN, MO, qui coupent la baſe BC ; que par les points K, N, O, & les points E, F, G, on mene d'autres paralleles au côté AC, le triangle ſera doublement diviſé, 1°. par les paralleles GI, FL, EM, en autant de trapeſes de même hauteur qu'il y a de parties dans le tems (conſidérant le triangle AGI comme un eſpece de trapeſe) & les ſecondes & les troiſiémes paralleles diviſent les trapeſes en triangles égaux au triangle AGI. Fig. 10.

Cela fait, il eſt aiſé d'appercevoir 1°. que ces trapeſes répréſentent de ſuite les eſpaces parcourus dans les tems AG, GF, FE, EB. 2° Qu'ils ſont entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. 7. &c. ce qui montre ſenſiblement que les eſpaces parcourus en tems égaux par un corps qui tombe librement ſont dans la raiſon des nombres impairs 1. 3. 5. &c.

68. La difference qui regne dans la progreſſion des eſpaces parcourus en tems égaux, eſt 2 qui eſt double de l'eſpace parcouru au premier tems; ainſi le ſecond terme contient le premier 1 avec la différence 2; le troiſiéme contient le premier 1 avec 2 fois la différence 2; le quatriéme contient le premier 1 avec trois fois la différence 2, & ainſi de ſuite; donc ſi l'on ajoute le premier terme à quelque autre terme de la progreſſion, la ſomme ſera un nombre double du nombre qui exprime le tems qui s'eſt écoulé depuis le premier moment de la deſcente juſqu'au tems incluſivement qui répond à ce terme. Ainſi ſi l'on ajoute le premier terme 1 au quatriéme qui eſt 7, le nombre 8 qui eſt la ſomme des deux eſt double du nombre 4 qui exprime le tems qui s'eſt écoulé juſqu'au tems incluſivement qui répond au quatriéme terme 7.

69. D'où l'on voit que ſi l'eſpace parcouru dans le premier tems eſt exprimé par l'unité, & que l'on veuille connoître l'eſpace qu'un corps qui tombe parcourt dans une certaine partie du tems de la deſcente, par exemple, dans la cinquiéme il faut doubler 5 & du produit 10 retrancher l'unité ou le premier terme, & le reſte 9 ſera l'eſpace parcouru dans le cinquiéme tems.

Si l'eſpace parcouru dans le premier tems eſt different de l'unité, les eſpaces parcourus dans les tems ſuivans ſeront encore ceux de la progreſſion 1. 3. 5. 7. 9. &c. multipliez chacun par l'eſpace parcouru dans le premier tems. Suppoſons, par exemple, que l'eſpace parcouru dans la premiere partie du tems ſoit 15, les termes de la progreſſion ſeront $1\times15.\ 3\times15.\ 5\times15.\ 7\times15.\ 9\times15$, & ainſi de ſuite: or ſi à un terme l'on ajoute le premier 15, que l'on diviſe la ſomme par 15, le quotient exprimera un tems double du tems qui s'eſt écoulé; ainſi ſi au troiſiéme terme 5×15, on ajoute 15 & que l'on diviſe la ſomme par 15, le quotient ſera 6 double du tems qui s'eſt écoulé, ce qui eſt évident: car le produit 5×15 contient 15, 5 fois; donc ſi à ce produit on ajoute 15, la ſomme contiendra 15, 6 fois, qui eſt un nombre double du nombre 3 qui exprime le tems. D'où l'on voit que dans ce ſecond cas pour avoir l'eſpace parcouru dans une partie du

du tems de la deſcente, par exemple, dans le quatriéme tems il faut doubler le nombre 4, & multiplier le produit 8 par 15, & du produit 8×15 retrancher le premier terme 15, & le reſtant ſera l'eſpace parcouru dans le quatriéme tems, ou multiplier 8 — 1, c'eſt-à-dire 7 par 15, & le produit ſera l'eſpace parcouru au quatriéme tems.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

70. *Les eſpaces qu'un corps a parcourus en tombant librement depuis le repos, c'eſt-à-dire, à compter du point d'où il commence à deſcendre, ſont comme les quarrez des tems employez à les parcourir.*

Demonstration. L'eſpace qu'un corps parcourt dans le premier tems étant exprimé par l'unité, les eſpaces parcourus aux tems ſuivans ſont exprimez par les nombres impairs de la progreſſion des nombres naturels, c'eſt-à-dire, que ces eſpaces pris de ſuite ſont 1. 3. 5. 7. 9. 11. &c. Cela poſé, ſi l'on ajoute les eſpaces parcourus dans le premier & le ſecond tems; que l'on ajoute les eſpaces parcourus dans le premier, le ſecond & le troiſiéme tems; que l'on ajoute les eſpaces parcourus dans les quatre premiers tems; que l'on ajoute les eſpaces parcourus dans les cinq premiers tems, dans les ſix premiers tems, & ainſi de ſuite, on formera les nombres 1. 4. 9. 16. 25. 36. &c. qui expriment de ſuite les eſpaces parcourus depuis le repos après le premier, les deux premiers, les trois premiers, les quatre, les cinq, les ſix premiers tems de la deſcente; or il eſt viſible que ces nombres ſont les quarrez des tems qui ſe ſont écoulez, par exemple, 1 & 9 ſont les quarrez du premier & des trois premiers tems; 4 & 25 ſont les quarrez des deux & des 5 premiers tems, &c. Donc les eſpaces parcourus depuis le repos ſont comme les quarrez des tems employez à les parcourir.

On peut encore démontrer la propoſition dont il s'agit en cette maniere: L'eſpace parcouru pendant tout le tems de l'accélération eſt exprimé par un triangle rectangle ABC dont la hauteur AB répréſente le tems, & la baſe BC la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems (62). Si par quelque point E de la hauteur AB on mene EM parallele à la baſe BC; de même que le triangle ABC exprime l'eſpace parcouru dans le tems AB, le triangle AEM répréſentera l'eſpace parcouru pendant le tems AE, car la baſe EM exprime la viteſſe acquiſe dans le tems AE; donc les eſpaces parcourus dans les tems AB, AE ſont entr'eux comme les Fig. 10.

triangles ABC, AEM ; or ces triangles étant ſemblables ſont entr'eux comme les quarrez des côtez homologues AB, AE, & par conſéquent entr'eux comme les quarrez des tems (19. *Géom.*).

71. *Les eſpaces parcourus depuis le repos ſont encore entr'eux comme les quarrez des viteſſes acquiſes à la fin des tems employez à les parcourir* ; car les viteſſes acquiſes à la fin de deux tems à compter depuis le repos (60), ſont comme ces tems, d'où il ſuit que les eſpaces parcourus ſont comme les quarrez des viteſſes, puiſqu'ils ſont entr'eux comme les quarrez des tems. Les quarrez des tems & des viteſſes étant en raiſon doublée des tems & des viteſſes, on dit auſſi que les eſpaces parcourus depuis le repos, ſont en raiſon doublée des tems & des viteſſes.

72. Si l'on connoît l'eſpace que la peſanteur fait parcourir dans un tems donné, par exemple, d'une ſeconde, on connoîtra l'eſpace qu'elle feroit parcourir dans tout autre tems donné : or des expériences faites avec ſoin ont fait connoître à M. Huygens qu'un corps peſant qui tombe librement parcourt dans la premiere ſeconde de la deſcente, 15 pieds. C'eſt pourquoi ſi on fait la proportion 1 quarré d'une ſeconde eſt au quarré d'un autre nombre de ſecondes, par exemple, eſt au quarré de 5 qui eſt 25, ainſi 15 eſt à un quatriéme terme, l'on aura l'eſpace parcouru pendant le tems de 5 ſecondes.

73. Puiſque les eſpaces parcourus ſont comme les quarrez des tems & des viteſſes acquiſes depuis le repos, il s'enſuit que *les tems & les viteſſes acquiſes depuis le repos ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus, ou en raiſon ſou-doublée des mêmes eſpaces.*

74. *Si les eſpaces que deux corps parcourent d'un mouvement uniforme avec les viteſſes qu'ils ont acquiſes par deux hauteurs differentes en deſcendant ſont comme les racines quarrées de ces hauteurs, ces mêmes eſpaces ſeront parcourus en tems égaux.* Car puiſque les eſpaces parcourus par les mouvemens uniformes ſont comme les racines quarrées des hauteurs d'où les mobiles ſont tombez, & que d'ailleurs les viteſſes dans le mouvement uniforme ſont auſſi comme les racines quarrées de ces hauteurs, puiſque les mobiles ont acquis ces viteſſes en deſcendant par ces hauteurs (73), il s'enſuit que les eſpaces parcourus uniformément, ſont comme les viteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus. Donc ils ſont parcourus en même-tems (*Liv.* I. 4).

75. *Si l'on connoit l'eſpace qu'un mobile a parcouru à la derniere ſeconde de ſa chute, on peut connoitre la viteſſe qu'il avoit*

acquiſe au commencement de cette derniere ſeconde, & tout l'eſpace qu'il avoit parcouru pour l'acquérir. Suppoſons que l'on ait obſervé que le mobile a parcouru dans la derniere ſeconde de ſa chute 105 pieds, puiſque la peſanteur fait parcourir 15 pieds en une ſeconde, il s'enſuit que ſi de 105 on retranche 15 pieds, le reſtant 90 pieds eſt l'eſpace que le mobile a parcouru pendant une ſeconde par un mouvement uniforme avec la viteſſe toute acquiſe au commencement de cette derniere ſeconde; d'un autre côté par la viteſſe acquiſe à la fin de la premiere ſeconde de la deſcente le mobile parcourroit 30 pieds: les eſpaces 90 & 30 étant parcourus en des tems égaux, il s'enſuit qu'ils ſont entr'eux comme les viteſſes, c'eſt-à-dire, comme 3 & 1; donc le mobile avoit au commencement de la derniere ſeconde de ſa chute, une viteſſe de 3 degrez, à laquelle ſi on ajoute le degré que la peſanteur a communiqué pendant cette derniere ſeconde, l'on ſçaura que le mobile a acquis à la fin de ſa chute 4 degrez de viteſſe en quatre ſecondes. La viteſſe acquiſe étant connue ou le tems de la deſcente, on pourra trouver par l'article (71. 72.) la hauteur d'où le mobile eſt tombé pour acquérir les quatre degrez de viteſſe.

76. En général, ſi de l'eſpace parcouru pendant une partie du tems de la deſcente, on retranche l'eſpace que le corps a parcouru dans la premiere partie du tems, le reſte étant comparé avec le double de l'eſpace retranché, on connoîtra la viteſſe que le mobile avoit acquiſe au commencement de cette partie propoſée du tems de la deſcente, car par la viteſſe que le mobile reçoit pendant la partie propoſée du tems de la deſcente, il parcourt un eſpace égal à l'eſpace qu'il parcourt dans le premier tems; donc ſi on retranche cet eſpace de celui que le mobile parcourt dans la partie propoſée du tems de la deſcente, qu'il parcourt, dis-je, tant par la viteſſe acquiſe, que par la viteſſe qu'il reçoit dans ce même tems, le reſtant ſera l'eſpace qu'il a parcouru par la viteſſe acquiſe & uniforme pendant cette même partie propoſée du tems; c'eſt pourquoi ſi on double l'eſpace parcouru dans la premiere partie du tems de la deſcente, ou l'eſpace qu'on a retranché (car ces deux eſpaces ſont égaux), qu'on compare cet eſpace double avec le reſtant dont on vient de parler, (les viteſſes étant entr'elles comme les eſpaces parcourus en même-tems,) on connoîtra la viteſſe acquiſe depuis le repos juſqu'au commencement du dernier tems propoſé, à laquelle ſi on ajoute la viteſſe que le mobile a acquiſe dans le dernier

tems, toute la viteſſe acquiſe ſera connue. Il ſera enſuite aiſé de connoître la hauteur d'où le mobile eſt tombé pour acquérir cette viteſſe.

77. *Un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut monte d'un mouvement uniformément retardé.*

Lorſqu'un corps deſcend & qu'il n'eſt point empêché, la peſanteur lui donne à chaque inſtant un nouveau degré de viteſſe; mais lorſque le corps eſt mu contre la direction ou l'effort de la peſanteur, cette force lui ôte continuellement de ſa viteſſe. Le corps monte donc d'un mouvement uniformément retardé, car les degrez de viteſſe qu'il perd ſont égaux à ceux qu'il recevroit dans le même-tems s'il deſcendoit, puiſque la force qui le retarde eſt préciſément la même que celle qui l'accélere, & que d'ailleurs un corps qui deſcend librement eſt mû d'une viteſſe uniformément accélerée. Donc un corps monte d'un mouvement uniformément retardé.

78. D'où il ſuit que ſi un corps eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, *il ſera autant de tems à perdre ſa viteſſe qu'il en a été à l'acquérir.*

79. *Il ſuit encore qu'un corps qui monte directement contre l'effort de la peſanteur perd des degrez de viteſſe qui augmentent comme les tems :* dans un tems double ou triple le mobile perd une viteſſe double ou triple.

PROPOSITION SIXIE'ME.

80. *Un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, remonte à cette hauteur, & lorſqu'il eſt arrivé au lieu du repos, c'eſt-à-dire, au lieu d'où il a commencé à deſcendre, il a perdu toute ſa viteſſe.*

Demonstration. Le tems de la montée étant égal au tems de la deſcente, ſi l'on diviſe l'un & l'autre par la penſée en parties infiniment petites, & que l'on compte à rebours les inſtans de la deſcente en commençant par le dernier inſtant, on verra qu'aux inſtans correſpondans le mobile a la même viteſſe en montant & en deſcendant, en ſorte que là où le corps a encore à recevoir un degré de viteſſe lorſqu'il deſcend, il en a perdu un en montant, & par conſéquent les viteſſes ſont égales; que là où le mobile a encore à recevoir deux degrez de viteſſe lorſqu'il deſcend, il en a perdu 2 degrez en montant, que là où le mo-

bile a encore trois degrez de viteſſe à recevoir lorſqu'il deſcend, il en a perdu trois lorſqu'il monte, & ainſi de ſuite juſqu'au premier inſtant de la deſcente où lorſque le mobile a acquis un degré de viteſſe & qu'il a tous les autres à acquérir, au même inſtant il a encore un degré de viteſſe lorſqu'il monte, & il a perdu tous les autres. Cela étant ainſi les eſpaces parcourus aux inſtans correſpondans de la montée & de la deſcente doivent être égaux puiſque les viteſſes ſont égales & cela pendant tout le tems que le corps deſcend & qu'il monte; donc de même que le corps parcourt la premiere partie de l'eſpace par le premier degré de viteſſe qu'il reçoit au premier inſtant de la deſcente: ainſi par le dernier degré de viteſſe qu'il perd lorſqu'il monte, il doit parcourir la derniere partie du même eſpace; donc il monte à la hauteur d'où il eſt deſcendu, & lorſqu'il eſt arrivé au point du repos il a perdu toute ſa viteſſe.

81. *Les eſpaces parcourus en tems égaux par un corps qui monte, ſont entr'eux comme les nombres impairs* 1. 3. 5. Car l'on peut ſuppoſer que la viteſſe avec laquelle le mobile commence à monter, eſt égale à la viteſſe qu'il acquerroit en tombant de la hauteur à laquelle il parvient: cela poſé, on vient de voir que les eſpaces que le mobile parcourt aux inſtans correſpondans de la montée & de la deſcente ſont égaux; mais les eſpaces que le mobile parcourt en tems égaux pendant la deſcente, ſont entr'eux comme les nombres impairs 1. 3. 5. &c. (65). Donc les eſpaces parcourus dans le mouvement uniformément retardé lorſque le corps monte, ſont auſſi entr'eux comme les mêmes nombres. Si on compte le tems dans le même ordre qu'il s'eſt écoulé, pour avoir de ſuite les eſpaces parcourus, il faudra renverſer la ſuite des nombres 1. 3. 5. 7. &c. mais cette même ſuite priſe dans l'ordre naturel, exprimera auſſi les eſpaces parcourus en des tems égaux, ſi on compte le tems de la montée à rebours en commençant par le dernier inſtant.

82. *Si on compte à rebours les inſtans de la montée en commençant par le dernier inſtant, les eſpaces parcourus ſont dans la raiſon des quarrez des tems.* Car ſi on compte ces eſpaces du dernier inſtant de la montée, ils ſont dans la raiſon des nombres impairs 1. 3. 5. Or on a vu que le premier nombre, la ſomme des deux premiers, la ſomme des trois premiers, la ſomme des quatre premiers nombres, &c. de la ſuite étoient les quarrez des nombres 1. 2. 3. 4. &c. qui expriment les tems; donc les eſpaces parcourus dans le mouvement uniformément retardé à comp-

ter du dernier inſtant de la montée, ſont entr'eux comme les quarrez des tems.

83. *L'eſpace parcouru par un corps qui monte par un mouvement uniformément retardé, eſt la moitié de l'eſpace que le mobile parcourroit dans un tems égal au tems de la montée, s'il étoit mû uniformément avec la viteſſe qu'il a lorſqu'il commence à monter.* Car ſuppoſons que le mobile deſcende de la hauteur où il eſt parvenu, le tems de la deſcente ſera égal au tems de la montée, & la viteſſe acquiſe au bas de la deſcente égale à la viteſſe avec laquelle le mobile a commencé à monter : or ſi le mobile étoit mû avec la viteſſe acquiſe au bas de la chute, il parcourroit d'un mouvement uniforme un eſpace double de l'eſpace parcouru par le mouvement accéleré, & cela dans un tems égal au tems de la deſcente (63.) ; donc puiſque dans le mouvement retardé la viteſſe & le tems ſont les mêmes que dans le mouvement accéleré, il s'enſuit que ſi un corps eſt mû uniformément avec la viteſſe qu'il a lorſqu'il commence à monter, il parcourra dans le tems de la montée, un eſpace double de la hauteur à laquelle il monte, ou, ce qui revient au même, cette hauteur n'eſt que la moitié de l'eſpace parcouru dans le même-tems avec la viteſſe qu'il a lorſqu'il commence à monter.

84. *Si l'on connoit l'eſpace qu'un corps parcourt au premier tems de la montée, on pourra déterminer ſa viteſſe, & la hauteur à laquelle il peut monter.*

Suppoſons que l'on ait obſervé ou que l'on ſache d'ailleurs qu'un corps qui eſt pouſſé de bas en haut, parcourt dans la premiere ſeconde de la montée une hauteur de 135 pieds. Puiſque la peſanteur a agi ſur le mobile pendant une ſeconde, elle lui a ôté un degré de viteſſe égal au degré qu'elle lui auroit communiqué s'il avoit été mû ſuivant ſa direction naturelle : or par le degré de viteſſe que la peſanteur auroit communiqué ſucceſſivement au mobile, elle lui auroit fait parcourir 15 pieds ; donc par le degré perdu il a parcouru 15 pieds ; mais ſi le corps étoit mû uniformément avec le degré reçu ou perdu, il parcourroit dans le même-tems un eſpace double de celui qu'il a parcouru ; donc dans le tems d'une ſeconde il auroit parcouru encore 15 pieds ; c'eſt pourquoi, ſi à 135 pieds qui ont été parcourus dans la premiere ſeconde de la montée, on ajoute 15 pieds que le corps n'a pas parcouru par l'obſtacle de la peſanteur, la ſomme 150 pieds ſera l'eſpace que le mobile parcourroit uniformément pendant une ſeconde ; par le degré perdu il

parcourroit dans le même-tems 30 pieds ; donc la viteſſe avec laquelle le mobile commence à monter eſt à la viteſſe perdue dans une ſeconde comme 150 eſt à 30, ou comme 5 eſt à 1, donc le mobile ſera 5 ſecondes à perdre toute la viteſſe avec laquelle il a commencé à monter, c'eſt pourquoi ſi on fait la proportion, Le quarré de 1 ſeconde eſt au quarré de 5 ſecondes, comme l'eſpace parcouru dans une ſeconde qui eſt 15 pieds, eſt à un quatriéme terme, l'on aura la hauteur à laquelle le mobile parviendra avec la viteſſe de 5 degrez qu'on vient de trouver (71. 72.).

85. On ſuppoſe qu'un corps tombe des trois hauteurs ED, AD, AE, il acquerra des viteſſes qui ſont dans la raiſon des racines quarrées des trois hauteurs (73.). Cela poſé, ſi du point E on éleve à AD la perpendiculaire indéfinie EBX, que des points A, D on mene deux lignes AB, DB qui ſe rencontrent en un même point B de la perpendiculaire EBX, en ſorte que l'angle ABD qu'elles forment au point B ſoit droit, ce qui eſt toujours poſſible ; *Je dis que ſi le corps eſt mû uniformément ſuivant les trois lignes* DE, DB, EB, *ſçavoir ſur* DE *avec la viteſſe acquiſe par* ED, *ſur* DB *avec la viteſſe acquiſe par* AD, *ſur* EB *avec la viteſſe acquiſe par* AE, *les trois lignes* ED, DB, EB *ſeront parcourues en des tems égaux.* Fig. 11.

1°. Les lignes ED, DB ſeront parcourues en tems égaux avec les viteſſes acquiſes par ED, AD. Car à cauſe des triangles ſemblables EDB, ADB, l'on a ED . DB :: DB . AD (8. *Geom.*). Donc $\overline{ED}$. $\overline{DB}$ :: ED . AD (26. *Arit.*). Donc ED . DB :: $\sqrt{ED}$. $\sqrt{AD}$ (24. *Arit.*), c'eſt-à-dire, que les longueurs ED, DB ſont comme les racines quarrées des hauteurs ED, AD. Donc elles ſont auſſi entr'elles comme les viteſſes acquiſes par ces hauteurs (73). Donc elles ſont parcourues en tems égaux avec ces viteſſes (*Liv.* I. 4.).

2°. *Les longueurs* ED, EB *ſeront parcourues en des tems égaux avec les viteſſes acquiſes par* ED, AE. Car à cauſe des triangles ſemblables EDB, AEB l'on a ED . EB :: EB . AE (8. *Géom.*) Donc $\overline{ED}$. $\overline{EB}$ :: ED . AE (26. *Arit.*). Donc ED . EB :: $\sqrt{ED}$. $\sqrt{AE}$ (24. *Arit.*) ; c'eſt-à-dire, que les longueurs ED . EB ſont comme les racines quarrées des hauteurs ED, AE, & conſéquemment comme les viteſſes acquiſes par ces hauteurs (73). Donc elles ſont parcourues en tems égaux avec ces mêmes viteſſes (*Liv.* I. 4.). D'où il ſuit que les longueurs DB, EB ſeront

parcourues en des tems égaux au tems que le mobile emploie à parcourir DE uniformément avec la viteſſe acquiſe par DE ; donc les trois lignes ED, DB, EB ſeront parcourues en des tems égaux avec les viteſſes acquiſes par les trois hauteurs ED, AD, AE.

86. *Il eſt évident que le tems pendant lequel les lignes* DB, EB *ſont parcourues d'un mouvement uniforme avec les viteſſes acquiſes par* AD, AE, *eſt égal à la moitié du tems de la deſcente par* ED : Car la ligne ED étant parcourue uniformément avec la viteſſe acquiſe par ED, le mobile n'employe que la moitié du tems qu'il a été à l'acquérir, c'eſt-à-dire, à tomber de la hauteur ED (64).

87. On prouveroit de la même maniere que les lignes AE, AB, EB ſeroient parcourues en tems égaux d'un mouvement uniforme, ſçavoir, AE, avec la viteſſe acquiſe par AE, AB avec la viteſſe acquiſe par AD, & EB avec la viteſſe acquiſe par ED, & que ce tems eſt la moitié du tems de la chute par AE.

88. On feroit voir auſſi que les lignes AD, DB, AB ſeroient parcourues en tems égaux, ſçavoir AD avec la viteſſe acquiſe par AD, BD avec la viteſſe acquiſe par ED, & AB avec la viteſſe acquiſe par AE, & que le tems par ces trois lignes ſeroit égal au tems que le mobile emploieroit à décrire DA par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe par AD.

89. 1°. Si le tems par ED eſt connu, les tems par DB & EB ſeront auſſi connus (86) ; 2°. de même ſi le tems par AE eſt connu, les tems par AB & EB ſeront auſſi connus (87) ; 3°. Enfin ſi le tems par AD eſt connu, les tems par DB, AB ſeront pareillement connus (88).

90. On peut réduire les propoſitions précédentes en formules comme on a fait pour le mouvement uniforme Ainſi ſi l'on nomme (V, v) les viteſſes que deux mobiles acquierent ou qu'un même corps reçoit en differens tems, (T, t) les tems des mouvemens, (E, e) les eſpaces parcourus en tombant.

On aura 1°. $V . v :: T . t$ (60) ; donc $V \times t = v \times T$ (12. *Arit.*) 2°. $E . e :: T^2 . t^2$ (70) ou encore $E . e :: V^2 . v^2$ (71), & parce que $V . v :: T . t$, on aura encore $E . e :: V \times T . v \times t$ en mettant le rapport de T à t au lieu de celui de V à v (14. *Arit.*). Donc $E \times t^2 = e \times T^2$. $E \times v^2 = e \times V^2$. $E \times v \times t = e \times V \times T$.

3°. Puiſqu'un corps qui eſt tombé d'une certaine hauteur parcourroit par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe un eſpace égal à cette hauteur dans la moitié du tems de la deſcente (64.) ou un eſpace double dans le tems entier, & que d'ailleurs

d'ailleurs on a la viteſſe en diviſant l'eſpace par le tems (*Liv.* I. 6. 17.), on aura auſſi $V . v :: \frac{2E}{T} . \frac{2e}{t}$ ou $V . v :: \frac{E}{T} . \frac{e}{t}$; c'eſt-à-dire, que les viteſſes acquiſes ſont comme les eſpaces diviſez par les tems employez à les acquérir. Sur quoi il faut remarquer qu'on ne peut pas ſuppoſer de même que dans le mouvement uniforme, que les tems T, t ſont égaux, à moins qu'on ne ſuppoſe que les eſpaces E, e ſont égaux ; car il eſt faux que les viteſſes V, v ſoient entr'elles comme les eſpaces, lorſque les eſpaces ſont inégaux.

4°. Puiſque les tems & les viteſſes ſont dans la raiſon des racines quarrées des hauteurs (73); dans la proportion précédente au lieu des diviſeurs T, t, on peut mettre les racines quarrées des eſpaces exprimées par $\sqrt{E}, \sqrt{e}$, & au lieu des viteſſes V, v, les tems T, t qui ſont dans la même raiſon que les viteſſes : la proportion ſera donc changée en celle-ci $T . t :: \frac{2E}{\sqrt{E}} . \frac{2e}{\sqrt{e}}$; c'eſt-à-dire, que les tems des mouvemens accélerez ſont entr'eux comme les hauteurs ou comme les doubles des hauteurs diviſées par les racines quarrées des mêmes hauteurs.

On va propoſer quelques problêmes ſur le mouvement accéleré & retardé des corps peſans. Dans le mouvement accéleré ou retardé des corps peſans il y a trois choſes à conſidérer, le tems, l'eſpace parcouru & la viteſſe acquiſe. Une de ces trois choſes étant connue, on peut avoir les deux autres.

Problême I.

91. *La hauteur d'où un corps eſt deſcendu librement étant connue, trouver le tems de la deſcente & la viteſſe acquiſe.*

Suppoſons qu'un corps ſoit tombé de 960 pieds de haut : il s'agit de trouver le tems de la deſcente. Il faut faire la proportion $15 . 960 :: 1 . xx$, c'eſt-à-dire, l'eſpace parcouru dans une ſeconde de tems, eſt à l'eſpace parcouru dans le tems cherché, comme 1 quarré d'une ſeconde eſt à xx quarré du tems cherché (71. 72.), la proportion fait voir qu'il faut diviſer l'eſpace 960 par 15, & tirer la racine du quotient 64, & l'on aura $x = 8$ ſecondes. Ainſi en 8 ſecondes de tems le mobile a parcouru d'un mouvement accéleré 960 pieds ; donc dans le même tems il parcourroit un eſpace double avec la viteſſe acquiſe, c'eſt-à-dire, 1920 pieds (63) : or l'on a la viteſſe d'un corps en diviſant l'eſpace par le tems (*Liv.* I. 6. 17.) ; donc $\frac{1920}{8}$ exprime la viteſſe

du mobile : ceci eſt encore évident, parce que ce quotient eſt l'eſpace que le mobile parcourroit en une ſeconde par la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant durant l'intervalle de 8 ſecondes ; mais par la viteſſe qu'il acquiert en tombant durant une ſeconde il parcourroit d'un mouvement uniforme 30 pieds (72. 63.) ; durant le même-tems d'une ſeconde. Donc les viteſſes que le mobile acquiert en tombant pendant le tems d'une ſeconde & de 8 ſecondes, ſont entr'elles comme les nombres $\frac{30}{1}$ & $\frac{1920}{8}$ qui ſont les eſpaces que le mobile parcourroit en même-tems avec ces viteſſes (*Liv.* I. 4. 6.) ; donc la fraction ou le quotient $\frac{1920}{1 \text{ ms } 8 \text{ ss}}$ exprime la viteſſe que le mobile a acquiſe en tombant durant l'intervalle de 8 ſecondes.

PROBLÊME II.

92. *Le tems qu'un mobile emploit à tomber librement d'une certaine hauteur que l'on cherche étant connu trouver cette hauteur & la viteſſe acquiſe.*

On ſuppoſe que le tems de la deſcente eſt de 8 ſecondes. On demande de quelle hauteur le mobile eſt tombé. Il faut faire la proportion 1 . 64 :: 15 . x ; c'eſt-à-dire, le quarré d'une ſeconde de tems eſt au quarré de 8 ſecondes qui eſt le tems de la deſcente, comme 15 pieds qui eſt l'eſpace que la peſanteur fait parcourir en une ſeconde, eſt à (x) qui eſt l'eſpace cherché (71, 72), la proportion fait voir qu'il faut multiplier 64 par 15, & le produit 960 pieds eſt la hauteur d'où le corps eſt deſcendu dans le tems de 8 ſecondes.

Si on double 960 & qu'on diviſe 1920 par 8, on aura la viteſſe du mobile : ce quotient eſt l'eſpace que le mobile parcourroit uniformément dans une ſeconde après être tombé de la hauteur de 960 pieds ; & on peut prouver par un raiſonnement ſemblable à celui du problême précedent que ce quotient exprime la viteſſe cherchée.

PROBLÊME III.

93. *La viteſſe d'un mobile étant connue trouver de quelle hauteur il faut qu'il deſcende pour acquérir cette viteſſe, enſemble le tems de la deſcente.*

La viteſſe d'un mobile eſt connue lorſqu'on ſçait quel eſt l'eſpace qu'il parcourroit dans un tems auſſi connu. On ſuppoſe donc que le mobile parcourroit en une ſeconde 120 pieds ; on ſçait encore qu'un corps qui ſeroit tombé de la hauteur de 15 pieds

parcourroit dans le même tems d'une ſeconde, par un mouvement uniforme, le double de 15 pieds, c'eſt-à-dire 30 (72.63.); donc la viteſſe acquiſe par la hauteur de 15 pieds, & la viteſſe ſuppoſée ſont entr'elles comme 30 & 120 (*Liv.* I. 4.); cela poſé, il faut faire 900 . 14400 :: 15 . x; c'eſt-à-dire, le quarré de la viteſſe acquiſe par la hauteur de 15 pieds, eſt au quarré de la viteſſe ſuppoſée 120, comme la hauteur de 15 pieds qui a donné la viteſſe 30, eſt à la hauteur cherchée (x) qui doit donner la viteſſe 120. La proportion fait voir qu'il faut multiplier 14400 par 15, & diviſer le produit par 900. (On peut abbreger l'opération en réduiſant les termes du premier rapport à leur plus ſimple expreſſion) & l'on trouve que la proportion eſt réduite à ces quatre termes 1 . 16 :: 15 . x; l'on a donc $\frac{16 \times 15}{1} = x = 240$ pieds qui eſt la hauteur d'où le mobile étant deſcendu auroit acquis la viteſſe néceſſaire pour faire 120 pieds en une ſeconde, en les parcourant par un mouvement uniforme. Les tems étant dans la raiſon des viteſſes acquiſes (60); il s'enſuit que le tems par 240 pieds eſt au tems par 15 pieds comme 120 eſt à 30, ou comme 4 eſt à 1 : ainſi le mobile a employé 4 ſecondes à deſcendre de la hauteur de 240 pieds.

Si on propoſoit de trouver à quelle hauteur un corps peut monter étant pouſſé de bas en haut avec une viteſſe donnée, il faudroit trouver la hauteur d'où le mobile étant deſcendu il auroit acquis la viteſſe donnée, & cette hauteur ſeroit celle à laquelle il monteroit s'il étoit pouſſé de bas en haut avec la viteſſe donnée ſelon l'article (80).

Si on vouloit trouver la hauteur par laquelle le mobile venant à tomber, acquerroit une viteſſe qui fût en raiſon donnée à une viteſſe connue, par exemple, qui fût double, triple, &c. de la viteſſe connue, il faudroit doubler, tripler, &c. la viteſſe connue, & opérer comme il eſt preſcrit par le problême.

Problême IV.

94. *L'eſpace qu'un corps parcourt dans une partie du tems de la deſcente, enſemble ce tems étant connus, trouver le tems total de la deſcente, la hauteur d'où le mobile eſt tombé, & la viteſſe acquiſe par cette hauteur, ou l'eſpace que le mobile parcourroit uniformément dans une ſeconde, avec la viteſſe acquiſe.*

Suppoſons que l'on ait obſervé ou que l'on ſçache d'ailleurs que le mobile pendant 2 ſecondes a parcouru 240 pieds, on demande 1°. de quelle hauteur il eſt tombé après avoir parcouru

les 240 pieds, 2°. quelle eſt la viteſſe qu'il a acquiſe, 3°. le tems de la deſcente. On va d'abord trouver en degrez la viteſſe, enſuite le tems, après cela la hauteur cherchée, enfin l'eſpace parcouru uniformément pendant une ſeconde, par la viteſſe acquiſe.

1°. L'eſpace que le mobile a parcouru dans deux ſecondes a été parcouru en partie par la viteſſe acquiſe & en partie par le mouvement accéleré de la peſanteur; dans deux ſecondes la peſanteur fait parcourir 60 pieds (71. 72.); c'eſt pourquoi ſi de 240 pieds je retranche 60 pieds, le reſte 180 pieds eſt l'eſpace que le mobile a parcouru par un mouvement uniforme avec la viteſſe qu'il avoit acquiſe au commencement des deux ſecondes, pendant leſquelles on l'a obſervé deſcendre; donc avec la viteſſe pour lors acquiſe, le corps auroit parcouru par un mouvement uniforme 180 pieds en 2 ſecondes, ou 90 pieds en une ſeconde. Or dans le mouvement uniforme les viteſſes étant entr'elles comme les eſpaces parcourus, lorſque les tems ſont égaux (*Liv.* I. 4.) la viteſſe que le corps avoit au premier inſtant de l'obſervation, eſt à la viteſſe que la peſanteur a imprimée au corps dans la premiere ſeconde de la deſcente, comme 90 eſt à 30; car avec la viteſſe acquiſe pendant une ſeconde, le corps parcourroit uniformément 30 pieds dans le même-tems (72. 63.); donc à l'inſtant de l'obſervation le mobile avoit une viteſſe triple de celle qu'il avoit acquiſe dans la premiere ſeconde de ſa chute; donc après avoir parcouru les 240 pieds, il avoit acquis 5 degrez de viteſſe, ou une viteſſe qu'intuple de celle qu'il avoit acquiſe dans la premiere ſeconde; car pendant les deux ſecondes de l'obſervation, la peſanteur lui avoit imprimé encore deux degrez de viteſſe. 2°. Les tems étant comme les viteſſes (60): il s'enſuit que le tems total de la deſcente eſt de 5 ſecondes. 3°. Le tems de la deſcente étant connu, on trouvera que la hauteur d'où le mobile eſt deſcendu eſt de 375 pieds (92). Si on double cette longueur & qu'on la diviſe par le tems de la deſcente qui eſt de 5 ſecondes, on au aura la viteſſe du mobile connue par le rapport de l'eſpace au tems, ou l'eſpace que le mobile parcourroit uniformément pendant 1 ſeconde avec la viteſſe acquiſe.

Si on obſerve le corps non lors de la deſcente, mais lorſqu'il monte, au lieu de retrancher 60 pieds de 240, il faut au contraire les ajouter; & le tems de l'obſervation étant ſuppoſé de 2 ſecondes, l'eſpace que le corps auroit pû parcourir uniformément en 2 ſecondes avec la viteſſe qu'il avoit lorſqu'il a com-

mencé à monter, ſeroit de 300 pieds, il auroit donc pû parcourir uniformément 150 pieds en une ſeconde, la viteſſe du mobile étant ainſi connue, on trouvera à quelle hauteur il peut monter & le tems de la montée.

Les problêmes précedens ont été réſolus en nombres, parce qu'on à ſuppoſé que la peſanteur fait parcourir dans un tems donné un eſpace d'une longueur connue & déterminée; mais on peut les réſoudre géométriquement ſans connoître cette meſure déterminée; il ſuffit que l'on ſçache que la peſanteur eſt une force conſtante qui imprime à un corps qui tombe des viteſſes égales en des tems égaux, ou en des tems inégaux des viteſſes proportionnelles aux tems, & que les eſpaces parcourus ont entr'eux les rapports que l'on a expoſés. Car ſi l'on ſuppoſe qu'une ligne répréſente l'eſpace qu'un corps parcourt dans un certain tems par un mouvement accéleré, on déterminera ſans peine la ligne qui répréſente l'eſpace qu'il parcourroit dans tel autre tems qu'on voudra ſuppoſer; & parce que les tems ſont entr'eux comme les racines quarrées des eſpaces parcourus, ils pourront être répréſentez par les racines quarrées de ces hauteurs, ou par d'autres lignes qui auront entr'elles le même rapport que les racines quarrées de ces eſpaces. Les viteſſes acquiſes à la fin des chutes étant entr'elles dans la raiſon des tems, elles pourront auſſi être répréſentées par les racines quarrées des eſpaces parcourus, ou par des lignes qui auront entr'elles les rapports de ces racines.

On ſçait qu'un même nombre peut exprimer des grandeurs ou quantitez, non-ſeulement inégales, mais encore de differente nature; par exemple, le nombre 3 peut exprimer ou trois degrés de viteſſe, ou trois heures, &c. Rien n'empêche que les lignes n'aient le même uſage: ainſi une ligne qui répréſente un eſpace parcouru, pourra répréſenter un tems ou une viteſſe, pourvu qu'à ces differens égards, elle ait les rapports convenables avec les lignes qui répréſentent les eſpaces & les tems ou les viteſſes.

Pour ôter toute difficulté même apparente ſur ce ſujet, ſuppoſons qu'un corps ſoit deſcendu pendant 1 ſeconde & pendant 5 ſecondes; s'il s'agit de trouver l'eſpace qu'il a parcouru pendant les cinq ſecondes, on le pourra en exprimant l'eſpace parcouru dans une ſeconde & le tems d'une ſeconde par une ligne de 15 pieds qui eſt l'eſpace parcouru dans une ſeconde par la viteſſe accélerée; car ſuivant les regles précédentes, on aura cet eſpace en faiſant la proportion $1\times1 . 5\times5 :: 15 . x$: or 1 ſeconde eſt la même choſe que $\frac{15}{15}$ de ſeconde & 5 ſecondes la même choſe que $\frac{75}{15}$ de ſeconde (27. *Arit.*), les tems ſont donc entr'eux comme

15 & 75 (8. *Arit.*), & les quarrez des tems comme les quarrez de 15 & de 75 ; donc ſi dans la proportion précedente on met les quarrez de 15 & de 75 au lieu des quarrez de 1 & 5, on trouvera l'eſpace parcouru dans 5 ſecondes. On peut donc ſuppoſer qu'une ligne de 15 pieds qui eſt l'eſpace parcouru dans une ſeconde, répréſente auſſi le tems de la deſcente, c'eſt-à-dire, cette ſeconde la même, pourvu que la ligne qui répréſente les 5 ſecondes, ait le même rapport avec une ligne de 15 pieds qu'il y a entre 5 & 1.

PROBLÊME V.

95. *Trouver géométriquement la hauteur d'où un corps eſt tombé par un mouvement uniformément accéleré, le tems* T *de la deſcente étant connu.*

Fig. 11. Suppoſons que l'eſpace qu'un corps parcourt par un mouvement uniformément accéleré pendant un certain tems t, par exemple, d'une ſeconde, eſt répréſenté par la ligne ED, & que la même ligne ED répréſente auſſi le tems t de la deſcente par cette hauteur, & que la ligne T répréſente le tems donné T. Du point E il faut élever la perpendiculaire indéfinie EBX ſur ED, ouvrir le compas d'une ouverture égale à la ligne T, du point D comme centre décrire un arc de cercle qui coupe EB au point B, & mener la ligne DB. Il faut enſuite élever ſur DB la perpendiculaire BA qui rencontre DE prolongée en A. Je dis que la hauteur AD eſt l'eſpace que le mobile a parcouru par un mouvement uniformément accéleré pendant le tems T.

Les triangles ſemblables EDB, ADB donnent ED . DB :: DB . AD (8. *Géom.*). Donc $\overline{ED}^2 . \overline{DB}^2 :: ED . AD$ (26. *Arit.*) ou $ED . AD :: \overline{ED}^2 . \overline{DB}^2$, c'eſt-à-dire, que les eſpaces ED, AD ſont dans la raiſon des quarrez des lignes ED, DB, ou des tems t & T répréſentez par ces lignes. Donc puiſque ED eſt l'eſpace parcouru dans les tems t, il faut que AD ſoit l'eſpace parcouru dans le tems T ; car dans les mouvemens uniformément accélerez, les eſpaces parcourus ſont comme les quarrez des tems ; & ſi ces eſpaces ſont dans la raiſon des quarrez de deux tems, que de plus l'un des eſpaces ſoit porcouru pendant l'un de ces deux tems, l'autre eſpace ſera néceſſairement parcouru pendant l'autre tems.

2° Si on ſuppoſe que ED répréſente la viteſſe qu'un mobile a acquiſe en tombant de la hauteur ED, & que la ligne T ou DB répréſente la viteſſe acquiſe par une ſeconde hauteur inconnue & que l'on cherche, on déterminera cette hauteur de la mê-

me maniere ; car l'on aura encore ED . AD :: $\overline{ED}^2$. $\overline{DB}^2$, c'eſt-à-dire, que les eſpaces ED, AD ſont entr'eux comme les quarrez des viteſſes répréſentées par ED . DB, or ED eſt la viteſſe acquiſe par la hauteur ED ; donc DB eſt la viteſſe acquiſe par AD.

On remarquera que les lignes ED, DB étant dans la raiſon des viteſſes acquiſes par les hauteurs ED, AD, elles ſeroient parcourues en même-rems d'un mouvement uniforme avec ces viteſſes ; mais les tems employez à les parcourir, ne ſeroient que la moitié du tems que le mobile a mis à parcourir ED d'un mouvement accéleré ; car on a fait voir qu'avec la viteſſe qu'un mobile auroit acquiſé par ED, il parcourroit la même ED d'un mouvement uniforme pendant la moitié du tems qu'il l'a parcourue d'un mouvement uniformément accéleré.

3°. Si la hauteur AD d'où un mobile eſt tombé par un mouvement uniformément accéleré étoit donnée, & qu'on voulût connoître la viteſſe acquiſe ou le tems de la deſcente, on ſuppoſeroit encore que ED répréſente l'eſpace parcouru d'un mouvement uniformément accéleré, par lequel le mobile acquiert la viteſſe répréſentée par ED, au point E on éleveroit la perpendiculaire EBX indéfinie, on formeroit l'angle droit ABD en décrivant un demi-cercle qui eût pour diametre AD, & la ligne DB exprimeroit la viteſſe acquiſe par AD ; car les triangles ſemblables EDB, ADB, donnent ED . DB :: DB . AD. Donc (26. *Arit.*) $\overline{ED}^2$. $\overline{DB}^2$ :: ED . AD. Donc ED . DB :: $\sqrt{ED}$. $\sqrt{AD}$ (24. *Arit.*) ; c'eſt-à-dire, que les lignes ED, DB ſont comme les racines quarrées des hauteurs ED, AD ; donc elles ſont dans la raiſon des viteſſes acquiſe par ED, AD (73). Or par l'hypotheſe ED ou le double de ED exprime la viteſſe acquiſe par ED ; donc DB ou le double de DB répréſente la viteſſe acquiſe par AD.

Il eſt encore évident que ſi ED répréſente le tems par ED, DB répréſente le tems par AD.

96. *Remarque.* En parlant du mouvement des corps peſants, on a ſuppoſé, ou plutôt on a fait abſtraction de la réſiſtance de l'air ; il eſt néanmoins certain qu'il réſiſte aux corps en mouvement, & qu'il rallentit leur viteſſe, & toutes choſes étant d'ailleurs égales, la réſiſtance eſt d'autant plus grande que le mobile a plus de ſurface : ſi un même corps mû avec la même viteſſe préſente à l'air une ſurface double ou triple, l'air lui réſiſte doublement,

triplement. D'où il ſuit que ſi deux corps ſemblables de même matiere, ſont mûs avec une viteſſe égale, le petit corps trouve plus de réſiſtance, à raiſon de la force qui lui eſt appliquée, que le grand corps; car les forces de ces corps par leſquelles ils ſurmontent à chaque inſtant les réſiſtances de l'air, ſont comme leurs quantitez de mouvement; les viteſſes ſont ſuppoſées les mêmes; donc les forces par leſquelles ces corps ſurmontent la réſiſtance de l'air, ſont comme les maſſes ou les poids: or la raiſon de la grande maſſe à la petite eſt plus grande que la raiſon de la grande ſurface à la petite, car les ſoliditez ſont comme les cubes des diametres, & les ſurfaces comme les quarrez des mêmes diametres, en ſorte que ſi les diametres ſont comme 4 & 1, les maſſes ou les peſanteurs ſont comme 64 & 1, & les ſurfaces ſeulement comme 16 & 1: ainſi les forces des mobiles ſont comme 64 & 1, & les réſiſtances qui ſont comme les ſurfaces ſont ſeulement comme 16 & 1; donc le grand corps trouve à raiſon de ſa plus grande force moins de réſiſtance que le petit corps. On peut encore concevoir que plus un corps a de viteſſe, plus l'air lui réſiſte; car plus il a de viteſſe, plus il rencontre d'air en même-tems. Cela étant, la viteſſe d'un corps qui deſcend par un mouvement accéleré, peut croître juſqu'au point que la réſiſtance de l'air lui ôte à chaque inſtant la viteſſe que la peſanteur lui imprime, ou plutôt que l'effort de la peſanteur ſoit détruit à chaque inſtant par la réſiſtance de l'air; auquel cas la viteſſe du mobile demeurera uniforme, pendant tout le tems qu'il continuera de ſe mouvoir ſuivant la direction de la peſanteur. Pour appercevoir de qu'elle maniere ſe fait l'équilibre entre la réſiſtance de l'air, & l'action de la peſanteur, il faut ſuppoſer un principe qui ſera expliqué plus au long dans la ſuite; que ſi un corps en choque un autre, la force du choc ou l'impreſſion que les corps reçoivent du choc, eſt la même tant que la viteſſe reſpective eſt la même, (c'eſt-à-dire, tant que la viteſſe avec laquelle les deux corps s'approchent, ne change point:) ainſi l'air réſiſte à un corps en mouvement, ou fait ſur ce corps la même impreſſion que ſi le corps étant en repos, l'air le venoit choquer avec une viteſſe égale à celle qu'on ſuppoſe au corps. Or la viteſſe de l'air peut être aſſez grande pour qu'il faſſe équilibre avec un poids; donc ſi ce poids eſt mû ſuivant la direction des corps peſans avec une viteſſe égale à la viteſſe qu'on ſuppoſe à l'air, l'impreſſion qu'il recevra en choquant l'air, ſera la même, & l'air détruira à chaque inſtant l'effet de la peſanteur; c'eſt pourquoi le poids continuera de ſe mouvoir.

voir uniformément avec la viteſſe acquiſe. M. Mariotte appelle la viteſſe uniforme à laquelle parvient un corps peſant qui tombe, *viteſſe complete.*

97. On remarquera encore que ſi la terre tourne, & que l'on regarde le milieu dans lequel les corps peſans deſcendent comme immobile pendant le tems de la deſcente, dans cette hypotheſe ils répondent à des endroits de la terre toujours differens; ainſi on ne peut pas dire que les corps peſans tombent ſuivant des directions perpendiculaires à l'horiſon. Mais comme les corps qui tombent, ſe meuvent dans un milieu mobile, ſçavoir l'air, il arrive que ſi la terre tourne, l'atmoſphere qui ne fait qu'un même corps, avec la terre, tourne auſſi avec elle. De-là vient que les corps peſans qui tombent, étant emportez par l'air, répondent directement pendant tout le tems de la deſcente au même endroit de la terre, & que leur chûte ſe fait ſuivant des lignes verticales ou à-plomb; d'où l'on voit que la chûte perpendiculaire des corps peſans, n'eſt point oppoſée au mouvement de la terre autour de ſon centre: car rien n'empêche que tandis qu'une roue tourne, un autre corps, par exemple, une fourmi ne ſe meuve ſur un des rayons de la roue, ſuivant une direction qui tende directement au centre, & par conſéquent perpendiculaire à la circonférence.

98. On remarquera enfin que ſi la terre tourne, du mouvement propre des corps peſans & du mouvement circulaire de la terre, il réſulte un mouvement compoſé par lequel les corps qui tombent décrivent une ligne ſpirale, ainſi qu'on peut facilement l'imaginer à l'égard de la fourmi qui en s'approchant du centre de la roue fait pluſieurs tours & révolutions, & décrit par conſéquent une ligne ſpirale. Ceci n'eſt point contraire à ce qu'on a dit dans l'article précedent de la chûte perpendiculaire des corps peſans. Si la terre tourne, les corps décrivent certainemennt dans leur chûte une ligne courbe, ce qui n'empêche pas que relativement à la terre & en apparence ils ne tombent ſuivant une direction perpendiculaire: or le mouvement relatif étant le ſeul que l'on connoiſſe, que l'on puiſſe déterminer, & que l'on conſidere le plus ordinairement, c'eſt avec raiſon que l'on dit que les corps tombent ſuivant des directions perpendiculaires à la ſurface de la terre.

CHAPITRE TROISIE'ME.

DU MOUVEMENT DES CORPS jettez ſuivant des directions inclinées à l'horizon.

ON a vû que ſi un corps eſt pouſſé verticalement de bas en haut, il ne ſort point de ſa direction ; mais s'il eſt jetté ſuivant toute autre direction differente de la verticale, il eſt contraint de la quitter, car il ſe trouve entre deux déterminations : la force externe qui lui eſt appliquée pouſſe le corps ſuivant ſa direction, & la peſanteur tend à le rabbattre vers la terre. D'où il réſulte un effort compoſé par lequel il eſt mû ſuivant une direction moyenne ; & parce que la peſanteur agit continuellement, & pouſſe le mobile ſans relâche, il s'enſuit qu'il n'eſt jamais deux inſtans ſur la même direction, en étant détourné ſans ceſſe ; de-là vient que la trace du mobile ſe plie peu à peu, & forme une ligne courbe.

Dans ce Chapitre on éxaminera 1°. quelle eſt la ligne courbe que décrivent les corps jettez ; 2°. les propriétez & les circonſtances des jets. 3°. On appliquera les principes établis à la réſolution des queſtions ou problêmes qu'on a coutume de propoſer ſur les jets.

DE LA LIGNE COURBE QUE LES CORPS JETTEZ décrivent.

99. Les Auteurs qui les premiers ont traité des corps jettez, ont diſtingué deux mouvemens, l'un qu'ils appelloient *violent*, & l'autre *naturel*. Le mouvement violent eſt produit par la cauſe externe qui eſt appliquée au mobile, le mouvement naturel a pour principe l'action de la peſanteur. Le mouvement violent a été appellé dans la ſuite mouvement de *projection* ou *d'impulſion*. Pour découvrir l'eſpece de courbe que les corps jettez décrivent, on les conſidérera d'abord comme s'ils décrivoient un polygone d'un nombre fini de côtez, ainſi qu'on a fait lorſqu'on a traité de la force centrale. On concevra le tems diviſé en parties égales, & les corps jettez décrivant dans chaque partie du tems un côté du polygone. Dans cette hypotheſe la peſanteur n'agira qu'à differentes repriſes & par intervalles égaux ; ſçavoir, à tous les angles du polygone, lorſqu'à la fin de chaque tems il ſera néceſſaire de détourner les corps pour les empêcher de continuer ſuivant leur direction.

100. *La peſanteur étant ſuppoſée une force conſtante, doit produire des efforts égaux en tems égaux.*

101. Les directions des corps peſans concourent au centre de la terre ou fort près du centre, elles ſont donc divers angles entr'elles plus grands les uns que les autres; en ſorte que ſi deux corps ſont éloignez l'un de l'autre d'une minute de degré, l'angle de leurs directions eſt d'une minute : or une minute ſur la circonférence d'un grand cercle de la terre vaut plus de 900 toiſes, & la plus grande étendue des jets n'excede pas ordinairement cette portée ; ainſi les lignes ſuivant leſquelles les corps jettez tendent au centre de la terre, font un angle qui eſt pour l'ordinaire au plus d'une minute, lors même qu'ils ſont chaſſez par les plus fortes machines ; mais un angle d'une minute eſt de nulle conſéquence par rapport au ſujet dont il s'agit ici : *C'eſt pourquoi il n'y a nul inconvénient de regarder les lignes ſuivant leſquelles les corps jettez ſont pouſſez par la peſanteur pendant le mouvement, comme paralleles. Ces choſes ſuppoſées.*

102. Soit le corps K jetté ſuivant la direction AX inclinée ou parallele à l'horizon avec une force capable de lui faire parcourir AB dans la premiere partie du tems, par exemple, en une ſeconde ; à la fin de la premiere ſeconde le corps K ſeroit au point B, mais parce que la peſanteur au premier inſtant de l'impulſion agit ſuivant ſa direction AZ, & que d'ailleurs on ſuppoſe que par un ſeul effort elle imprime au corps une force qui peut lui faire parcourir en une ſeconde tout l'eſpace qu'il parcourroit, ſi l'action de la peſanteur n'étoit pas ſuppoſée interrompue, il s'enſuit que le corps K ſera détourné de la direction AX, & qu'il décrira la diagonale AG du parallelogramme BL fait ſur les directions AX, AZ, & dont les côtez AB, AL expriment la force d'impulſion, & l'effort de la peſanteur pendant une ſeconde ; ſi on prolonge AG en I, en ſorte que GI ſoit égale à AG, le corps par la force qu'il a reçue ſuivant AG, iroit dans le ſecond tems de G en I ; mais étant au point G, la peſanteur le détournera une ſeconde fois, & par l'action conjointe de cette force & de la tendence qu'il a ſuivant GI, il décrira la diagonale d'un nouveau parallelogramme : pour avoir cette diagonale, il faut par le point I mener la ligne CIM parallele à la direction AZ, & prendre IM égale à AL ou BG, elle exprimera l'effort que la peſanteur a fait, le corps étant au point G, & ſera par conſéquent un des côtez du parallelogramme dont le corps K décrit la diagonale, l'autre côté du parallelogramme eſt GI ; donc la Fig. 12. 13.

diagonale décrite eſt GM. Si on prolonge GM en N, en ſorte que MN ſoit égale à GM, que par le point N on mene DNO parallele à la direction AZ, que ſur cette ligne on prenne NO égale à AL ou BG, elle exprimera l'effort de la peſanteur lorſque le corps K eſt au point M, & MO ſera la diagonale que le corps décrit par l'action conjointe de la peſanteur & de la tendence qu'il a ſuivant MN. Si on continue de cette maniere à décrire de nouveaux parallelogrammes, on déterminera de nouveaux côtez du polygone décrit; & ſi l'on ſuppoſe que le tems eſt diviſé en parties infiniment petites, la peſanteur agira par une action non interrompue, les côtez des parallelogrammes ſeront infiniment petits, de même que leurs diagonales, & le polygone ſera changé en une vraie courbe.

103. Quelque ſoit le nombre des côtez du polygone décrit, fini ou infini, il eſt certain 1°. que *les petits côtez* BG, IM, NO, *&c. qui expriment tous l'effort ou l'action de la peſanteur, ſont égaux entr'eux.* 2°. Que *la derniere diagonale qui a été décrite ſert de côté au parallelogramme ſuivant, ou plutôt ce côté eſt égal à la diagonale du parallelogramme qui précede* : ainſi le côté GI eſt égal à la diagonale AG, & le côté MN égal à la diagonale GM. 3°. *Si on prolonge les côtez* GB, MI, ON, *&c. juſqu'à ce qu'ils rencontrent la ligne* AX *ſuivant laquelle le corps a été jetté, elle ſera diviſée en parties égales dans les points de rencontre* B, C, D, &c. Car AG = GI; donc à cauſe des paralleles BG, CM ou GI, AB = BC (7. *Géom.*) : de même GM = MN; donc à cauſe des paralleles BG, CM, DN. BC = CD (7. *Géom.*). On fera voir de la même maniere que les autres parties de la ligne AX ſont égales entr'elles. 4°. Suivant l'hypotheſe le corps K par le mouvement de projection auroit décrit AB dans la premiere partie du tems; donc dans le même tems ou en des tems égaux il auroit parcouru par le même mouvement de projection, les parties BC, CD, &c. mais dans le tems qu'il auroit parcouru AB, il décrit la diagonale AG, ou le petit côté de la courbe : *Donc tandis que par le mouvement de projections il auroit décrit les parties* AB, BC, CD, *&c. il a décrit les côtez correſpondans de la courbe.* 5°. Il ſuit de-là *que ſi l'on connoît le lieu de la ligne* AX, *où le corps ſeroit arrivé par le mouvement de projection, on ſçaura à quel point de la courbe décrite il ſe trouve pour lors.* Suppoſons qu'après un certain tems le corps fût arrivé en D par la force de projection, ſi du point D on mene une ligne DO parallele à la direction de la peſanteur, qui rencontre

la courbe au point O, on ſçaura que le mobile eſt au point O. Car l'arc AO de la courbe décrite contient autant de petits côtez, que AD contient de parties égales interceptées entre les paralleles menées des angles formez par les petits côtez de l'arc AO ; mais les côtez de l'arc AO ſont décrits en même-tems que les parties de la ligne AD ſeroient décrites par le mouvement de projection ; donc tandis que par ce mouvement le corps K ſeroit allé de A en D, il a décrit l'arc AO de la courbe déterminé par la ligne DO parallele à AZ. 6°. *On voit encore que ſi le corps ſe trouve ſur une des paralleles* BG, CM, DO, *&c. par le mouvement de projection, il ſeroit arrivé en même-tems ſur cette parallele, ſçavoir au point où elle coupe* AX. 7°. Si on prend ſur AX tant de parties égales qu'on voudra, que par les points de diviſion on mene des paralleles à la direction de la peſanteur, qui rencontrent la courbe, *les arcs compris entre ces paralleles ſont décrits en tems égaux :* car ils ſont décrits dans le même-tems que le mobile décriroit par le mouvement de projection les parties égales de la ligne AX. Or ces parties ſeroient décrites en tems égaux ; donc les arcs de la courbe compris entre ces paralleles également diſtantes ſeront décrites en tems égaux. 8°. *Il eſt évident que la ligne* AX *ſuivant laquelle le corps* K *eſt jetté eſt tangente de la courbe :* car au moment que le corps K eſt jetté ſuivant AX, la peſanteur l'en détourne, en ſorte que AX ne touche la courbe qu'au point A. 9°. *Les paralleles* BG, CM, DO, *&c. compriſes entre la tangente* AX *& la courbe, ſont les eſpaces que la peſanteur a fait parcourir ſuivant ſa direction au corps* K, *ou qu'elle a empêché le corps de parcourir :* car puiſque le corps par le mouvement de projection ſeroit allé de A en B, de A en C, de A en D, &c. dans le tems qu'il eſt allé de A en G, de A en M, de A en O, il eſt évident que la peſanteur a agi de même que ſi elle avoit fait parcourir ſuivant ſa direction les longueurs BG, CM, DO ; donc ces lignes expriment les eſpaces que la peſanteur auroit fait parcourir ſuivant ſa direction, ſi elle avoit agi ſeule, pendant que le corps eſt allé de A en G, de A en M, de A en O, &c. *D'où il ſuit que les lignes* BG, CM, DO, *&c. ſont entr'elles comme les quarrez des tems employez à aller de* A *en* G, *de* A *en* M, *de* A *en* O, &c. 10°. Il eſt évident que *les parties* AB, AC, AD, &c. *ſont entr'elles comme les tems employez à aller de* A *en* G, *de* A *en* M, *de* A *en* O, &c. Car de-même que le tems de A en M eſt double, & le tems de A en O triple du tems de A en G, AC eſt auſſi double, & AD triple de AB,

D'où il ſuit que les lignes BG, CM, DO, &c. *ſont entr'elles comme les quarrez des parties*, AB, AC, AD, &c, *de la tangente.* 110. Puiſque l'on peut prolonger AX à l'infini, & mener toujours de nouvelles paralleles qui s'éloignent auſſi à l'infini du point A, *il s'enſuit que la ligne courbe que le mobile décrit s'etend de plus en plus à l'infini, & qu'elle ne rentre point en elle-même, comme fait la ligne circulaire :* car on peut ſuppoſer que le mobile parcourt uniformément par le mouvement de projection ſur la ligne AX des eſpaces de plus en plus grands, en s'éloignant du point A : or ſi du point où on ſuppoſe qu'il eſt arrivé, on mene une parallele à la direction de la peſanteur qui rencontre la courbe en un point, c'eſt le lieu où le mobile ſe trouve pour lors ; donc les nouvelles parties de la courbe, décrites par le mobile, s'éloignent de plus en plus de la direction AZ ; donc la courbe ne revient pas ſur elle-même. *D'où il ſuit que les paralleles* BG, CM, DO, &c. *prolongées à l'infini ne rencontrent la courbe décrite qu'aux points* G, M, O, &c.

Fig. 12. 13. 104. Dans la parabole les lignes paralleles entr'elles, & qui prolongées à l infini, ne rencontrent la courbe qu'en un point, ſont appellées *diametres*. Si de differens points G, M, &c. de la parabole, on mene GL, MV, &c. paralleles à la tangente, qui rencontrent le diametre AZ aux points L, V, elles ſont appellées *ordonnée* au diametre AZ, & il eſt viſible qu'elles ſont égales aux parties AB, AC de la tangente, & que les paralleles BG, CM, &c. ſont égales aux parties AL, AV du diametre AZ. Or la principale propriété de la parabole, eſt que les parties AL, AV, du diametre, ou bien leurs égales BG, CM, ſont entr'elles comme les quarrez des ordonnées GL, MV, ou comme les quarrez de leurs égales AB, AC, &c.

105. *La ligne courbe que les corps jettez décrivent eſt une parabole.* Car la ligne courbe que les corps jettez décrivent, a cette propriété, que les paralleles compriſes entre la tangente & la courbe, ſont entr'elles comme les quarrez des parties correſpondantes de la tangente, & que de plus ces paralleles prolongées à l'infini ne rencontrent la courbe qu'en un point. Or telle eſt la propriété de la parabole ; donc la courbe décrite par les corps jettez eſt une parabole.

Fig. 12. 13. 106. On nomme *ſommet* de la parabole le point où le corps ceſſe de monter & où il commence à deſcendre ; ſi le corps eſt jetté horizontalement, le ſommet de la parabole eſt au point de départ ; ſi le corps eſt jetté ſuivant une direction inclinée au deſſous de l'horizon, la parabole décrite n'a point de ſommet. Car

la courbe que le corps décrit eſt la portion d'une parabole qui auroit ſon ſommet au lieu du départ, s'il avoit été jetté horizontalement; ou bien cette parabole auroit ſon ſommet au-deſſus de l'horizon, ſi le corps avoit été jetté au-deſſus du même horizon. La ligne horizontale AT qui joint le point de départ, & un autre point de la parabole, eſt appellée *étendue du jet* ou *amplitude de la parabole*. Si la ligne AY qui joint le point de départ, & un point de la courbe où l'on ſuppoſe que le mobile eſt arrivé, n'eſt pas horizontale, elle eſt appellée ligne de *diſtance*, ou ligne de *but*. La ligne AX ſuivant laquelle le corps eſt jetté, eſt appellée ligne de *projection*; mais on nomme plus particulierement ligne de *projection*, la partie de la tangente compriſe entre le point A & la verticale qui paſſe par le lieu où le corps eſt arrivé ou bien où il s'eſt arrêté; & la verticale compriſe entre le lieu où le corps jetté ſe trouve, & la ligne de projection, eſt appellée ligne de *chûte*, ou ligne de *chûte reſpective*: ainſi ſi le corps eſt au point Q, AE eſt la ligne de projection, & EQ la ligne de chûte reſpective; s'il eſt au point S, la ligne de projection eſt AF, & la ligne de chûte reſpective eſt FS, &c. Fig. 13.

On a coutume d'expliquer le mouvement des corps jettez en y appliquant les propriétez de la parabole, néanmoins comme ce ſujet peut être traité ſans aucun rapport à cette courbe, on a cru qu'on pouvoit ſe diſpenſer de s'en ſervir, afin que les lecteurs qui ne ſeroient pas inſtruits des propriétez de cette courbe, ne fuſſent pas arrêtez en liſant cet endroit. De ſorte que ſi dans la ſuite on décrit la parabole, ce ſera ſeulement pour fixer l'imagination & répréſenter aux yeux la trace des corps jettez & non pas pour y fonder quelque explication.

DES PROPRIETEZ ET CIRCONSTANCES des jets.

107. Dans les jets il y a ſur-tout à conſiderer le corps qui eſt jetté, la force qui le chaſſe, la ligne de projection, la hauteur du jet, ſon étendue, ſa durée, & le terme où le mobile s'arrête.

Si la peſanteur n'abbaiſſoit pas continuellement les corps jettez, pour les faire tomber ſur un endroit propoſé, il ſuffiroit de viſer droit au but; mais l'expérience fait voir qu'en les dirigeant vers le but, ils n'arrivent point au lieu propoſé. Si en les pouſſant on les éleve trop ou trop peu, on éprouve qu'on ne réuſſit pas mieux que ſi on les lançoit droit vers le but. Il a donc fallu puiſer dans la ſcience du mouvement des regles pour les jets, déter-

miner pour chacun en particulier la ligne de projection qui lui eſt propre, & trouver la force qu'il faut appliquer au mobile eu égard à ſa maſſe ou peſanteur.

DE LA FORCE DU JET ET DES CHANGEMENS ou altérations qui arrivent à cette force.

108. Par la force du jet on entend la force qui chaſſe le corps : elle eſt égale ou proportionnelle au produit de la maſſe & de la viteſſe que le corps reçoit au moment que la force externe qui le pouſſe s'applique à ſa maſſe. Si la maſſe eſt la même, la force du jet eſt proportionnelle à la viteſſe ; & ſi la viteſſe eſt la même pour tous les jets, la force eſt proportionnelle à la maſſe ; ſi enfin la maſſe & la viteſſe ſont les mêmes pour tous les jets, la force eſt auſſi la même. On nommera *viteſſe d'impulſion* ou de *projection* celle qu'un corps reçoit de la force externe qui le pouſſe.

PROPOSITION SEPTIE'ME.

109 *Lorſqu'un corps eſt jetté ſuivant une direction inclinée au-deſſus de l'horizon, ſon mouvement ou ſa viteſſe ſe décompoſe ſuivant deux déterminations, l'une par laquelle le corps monte ou deſcend, l'autre par laquelle il avance ſuivant des directions paralleles à l'horizon.*

Demonstration. Lorſqu'un corps eſt jetté ſuivant une direction inclinée à l'horizon, il monte pendant quelque temps, il paroît enſuite pendant quelques inſtans, ne monter ni deſcendre : il redeſcend enfin, & il ne s'arrête point qu'il ne rencontre la terre ; donc pendant tout le tems du mouvement, le mobile fait effort contre la peſanteur, ou bien il obéit à ſon impulſion ; or pendant tout ce tems il avance auſſi ſuivant la direction horizontale. Donc dans le mouvement d'un corps jetté il faut diſtinguer deux efforts ou deux viteſſes ; l'une, par laquelle il réſiſte à la peſanteur ; cette viteſſe eſt détruite peu à peu pendant que le mobile monte : & l'autre viteſſe eſt l'horizontale qui ſubſiſte pendant tout le tems du mouvement, ſoit que le corps monte, ſoit qu'il deſcende.

Fig. 14. 110. La viteſſe par laquelle le corps monte ou deſcend, ſera nommée viteſſe *perpendiculaire* ou *verticale*.

111. *Si le mouvement ou la viteſſe de projection eſt exprimée par l'hypothenuſe* AD *du triangle rectangle* ADB, *la viteſſe horizontale & la viteſſe verticale ſont exprimées par les côtez* AB, BD, *de l'angle droit du même triangle.*

Car

Car tandis que par le mouvement de projection le mobile iroit de A en D, il parcourroit ſuivant l'horizontale une longueur égale à AB, & il monteroit à la hauteur BD; la viteſſe horizontale & la viteſſe verticale ſont donc entr'elles comme les côtez AB & BD qui ſeroient parcourus en même-tems avec ces viteſſes.

On peut encore prouver la propoſition par ce qui a été dit de la décompoſition des mouvemens dans la premiere partie.

Si un corps qui eſt mû rencontre un obſtacle ou une force qui ne lui réſiſte pas directement, ſa force eſt décompoſée en deux autres efforts qui ſont exprimez par les côtez d'un parallelogramme rectangle (*Liv.* I. 177.) dont la diagonale répréſente la force ſuivant la direction que le corps avoit avant la rencontre de l'obſtacle.

PROPOSITION HUITIE'ME.

112. *Dans les jets obliques ou inclinez à l'horizon, la viteſſe horizontale demeure la même pendant tout le tems du mouvement*; c'eſt-à-dire, qu'en tems égaux *le mobile parcourt des eſpaces égaux ſuivant la direction horizontale.*

DEMONSTRATION. Si l'on diviſe la ligne de projection AX en parties égales, que par les points de diviſion on mene des perpendiculaires à l'horizon, elles ſeront toutes également diſtantes, & le mobile décrira les arcs compris entre ces verticales en des tems égaux (103); il parcourra donc en des tems égaux les diſtances égales qui ſont entre ces verticales; or ces diſtances égales ſont meſurées par les parties d'une ligne horizontale; donc en tems égaux le mobile parcourra des parties égales de la ligne horizontale; par conſéquent la viteſſe horizontale demeure la même pendant tout le mouvement. Fig. 12. 13.

113. *La viteſſe verticale augmente ou diminue pendant tout le mouvement.* Si le corps monte, cette viteſſe diminue parce qu'elle eſt contraire à la peſanteur; mais ſi le corps deſcend, elle augmente parce qu'elle eſt dans le ſens de la peſanteur.

Si un corps eſt jetté horizontalement, il n'a point de viteſſe verticale à l'inſtant de la projection; mais cette viteſſe s'accroît peu à peu ſuivant la regle des mouvemens uniformément accélerez.

114. *Si la force du jet eſt la même pour toutes les directions, le rapport de la viteſſe verticale à la viteſſe horizontale eſt variable*: car ſi le corps eſt jetté horizontalement, la viteſſe verticale eſt nulle: ſi au contraire le corps eſt jetté perpendiculairement de bas en haut, c'eſt la viteſſe horizontale qui eſt nulle. Entre ces

miner pour chacun en particulier la ligne
eſt propre, & trouver la force qu'il faut a
égard à ſa maſſe ou peſanteur.

DE LA FORCE DU JET ET D
ou altérations qui arrive

108. Par la force du jet on e
corps : elle eſt égale ou proportio
de la viteſſe que le corps reçoit
qui le pouſſe s'applique à ſa m
force du jet eſt proportionn
la même pour tous les jets, l
ſi enfin la maſſe & la vitef
force eſt auſſi la même. C
jection celle qu'un corp

PROP

109. *Lorſqu'un*
au-deſſus de l'hor
ſuivant deux dé
deſcend, l'aut
talleles à l'h

DEMON
ction incl
roît en
redeſc
donc
tre
ce
l

ue
ΓA ;
ient AC
(63) ; donc
it parcouru avec
s : or ſi du point H
iteſſe verticale ſera ex-
e d'impulſion eſt à la viteſſe
ou comme le ſinus total au ſinus
Géom.).

F

e maniere pour toute autre direction
npulſion eſt à la viteſſe verticale comme le
us de l'angle d'inclinaiſon.

Il ſuit que ſi un corps eſt pouſſé avec la même force
irections differemment inclinées, les viteſſes vertica-
reçoit de la même impulſion, ſont entr'elles comme les ſinus
ngles d'inclinaiſon. Ainſi la viteſſe verticale qu'il reçoit,
ant pouſſé ſuivant AX, eſt à la viteſſe verticale qu'il reçoit,

pouſſé par la même force ſuivant AD, comme le ſinus de
ZAX eſt au ſinus de l'angle ZAD; car ſi on ſuppoſe que
AD ſoient égales à AC, elles expriment la viteſſe ac-
AT, & par conſéquent la viteſſe d'impulſion ſuivant
nt AD; donc tandis que le mobile parcourroit
nt uniforme AH, il parcourroit dans le même-
conſéquent il s'éleveroit aux hauteurs BH, ND:
x, les viteſſes verticales ſont entr'elles comme
, c'eſt-à-dire, comme BH & ND; donc el-
ne les ſinus des angles d'inclinaiſon, car
our ſinus total, BH & ND ſont les ſinus
r. *Géom.*).

ON DIXIE'ME.

* *la viteſſe acquiſe par* TA, Fig. 15.
C *qui rencontre les directions*
les viteſſes verticales que
la force du jet acquiſe par
des AE, AL.

eſſes verticales du mobile lorſqu'il
ons AX & AD, ſont entr'elles com-
or AE & AL ſont égales à BH & ND.
ngles ſemblables ABH, ACE, l'on a AH.
les antécedens ſont égaux; donc les conſéquens
nt auſſi égaux. On fera voir de la même maniere
ND. Donc les viteſſes verticales du mobile lorſqu'il
e ſuivant les directions AX, AD par la même force
iteſſe d'impulſion exprimée par AC, ſont entr'elles comme
es cordes AE, AL.

121. On peut conclure de-là que ſi un corps eſt jetté ſuivant des directions differemment inclinées, & que la viteſſe d'impulſion ſoit la même pour toutes, cette viteſſe étant exprimée par le diametre d'un cercle, les viteſſes verticales ſont entr'elles comme les cordes du même cercle ſur leſquelles les directions ſont couchées.

122. Puiſque la viteſſe d'impulſion & les viteſſes verticales du mobile lorſqu'il eſt pouſſé ſuivant AX & AD, ſont entr'elles comme AC, AE, AL; il s'enſuit que ces lignes ſeroient parcourues en même-tems ou en tems égaux avec les viteſſes qui leur ſont proportionnelles; or AC ſeroit parcourue d'un mouvement uniforme dans le tems que le mobile ſeroit tombé de TA;

deux cas extrêmes il y en a une infinité où l'une de ces viteſſes augmente lorſque l'autre diminue : en un mot leur rapport varie de même que celui des côtez d'un triangle rectangle dont l'hypothénuſe eſt conſtamment la même.

115. *La force du jet ou de projection étant la même ; le mobile montera à des hauteurs differentes, ſelon que la viteſſe verticale ſera plus ou moins grande :* car on vient de voir que la force du jet étant la même, la viteſſe verticale change ſelon que la ligne de projection eſt plus ou moins inclinée ; donc un corps étant pouſſé ſuivant des directions differemment inclinées avec la même force, montera à des hauteurs inégales.

15. 116. Si la ligne AZ répréſente l'horizon, & AX la ligne de projection, l'angle ZAX eſt appellé angle *d'inclinaiſon.*

117. Quelle que ſoit la viteſſe qu'un corps jetté reçoit ſuivant la ligne de projection, on peut toujours ſuppoſer qu'il l'a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur. On regarde cette hauteur comme la force même du ſujet, parce qu'étant connue, on connoît auſſi quelle eſt cette force, ou la viteſſe que le mobile acquiert par cette chûte.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

118. *La viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon.*

Demonstration. Suppoſons que la viteſſe d'impulſion que le corps K reçoit ſuivant AX, ait été acquiſe par la chûte TA ; donc avec la viteſſe acquiſe il parcourroit uniformément AC double de TA dans un tems égal à celui de la chûte (63) ; donc ſi ſur AX on prend AH=AC, l'eſpace AH ſeroit parcouru avec la viteſſe acquiſe par TA dans le même-tems : or ſi du point H on abbaiſſe la perpendiculaire HB, la viteſſe verticale ſera exprimée par HB (111), donc la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale, comme AH eſt à HB, ou comme le ſinus total au ſinus de l'angle ZAX ou BAH (21. *Géom.*).

On fera voir de la même maniere pour toute autre direction AD, que la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon.

119. *D'où il ſuit que ſi un corps eſt pouſſé avec la même force ſuivant des directions differemment inclinées, les viteſſes verticales qu'il reçoit de la même impulſion, ſont entr'elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon.* Ainſi la viteſſe verticale qu'il reçoit, étant pouſſé ſuivant AX, eſt à la viteſſe verticale qu'il reçoit,

étant pouſſé par la même force ſuivant AD, comme le ſinus de l'angle ZAX eſt au ſinus de l'angle ZAD; car ſi on ſuppoſe que AH & AD ſoient égales à AC, elles expriment la viteſſe acquiſe par AT, & par conſéquent la viteſſe d'impulſion ſuivant AX & ſuivant AD; donc tandis que le mobile parcourroit d'un mouvement uniforme AH, il parcourroit dans le même-tems AD, & par conſéquent il s'éleveroit aux hauteurs BH, ND: les tems étant égaux, les viteſſes verticales ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus, c'eſt-à-dire, comme BH & ND; donc elles ſont entr'elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon, car ſi on prend AH ou AD pour ſinus total, BH & ND ſont les ſinus des angles d'inclinaiſon (21. *Géom.*).

PROPOSITION DIXIE'ME.

120. *Si ſur* AC *qui repréſente la viteſſe acquiſe par* TA, *on décrit une demi-circonférence* ALEC *qui rencontre les directions* AX, AD *aux points* E, L, *je dis que les viteſſes verticales que le mobile reçoit ſuivant* AX & AD *de la force du jet acquiſe par* TA, *ſont entr'elles comme les cordes* AE, AL. Fig. 15.

DEMONSTRATION. Les viteſſes verticales du mobile lorſqu'il eſt pouſſé ſuivant les directions AX & AD, ſont entr'elles comme BH & ND (119); or AE & AL ſont égales à BH & ND. Car à cauſe des triangles ſemblables ABH, ACE, l'on a AH. AC :: BH. AE, les antécedens ſont égaux; donc les conſéquens BH, AE, ſont auſſi égaux. On fera voir de la même maniere que AL = ND. Donc les viteſſes verticales du mobile lorſqu'il eſt pouſſé ſuivant les directions AX, AD par la même force ou viteſſe d'impulſion exprimée par AC, ſont entr'elles comme les cordes AE, AL.

121. On peut conclure de-là que ſi un corps eſt jetté ſuivant des directions differemment inclinées, & que la viteſſe d'impulſion ſoit la même pour toutes, cette viteſſe étant exprimée par le diametre d'un cercle, les viteſſes verticales ſont entr'elles comme les cordes du même cercle ſur leſquelles les directions ſont couchées.

122. Puiſque la viteſſe d'impulſion & les viteſſes verticales du mobile lorſqu'il eſt pouſſé ſuivant AX & AD, ſont entr'elles comme AC, AE, AL; il s'enſuit que ces lignes ſeroient parcourues en même-tems ou en tems égaux avec les viteſſes qui leur ſont proportionnelles; or AC ſeroit parcourue d'un mouvement uniforme dans le tems que le mobile ſeroit tombé de TA;

donc AE & AL ſeroient parcourues avec les viteſſes verticales dans un tems égal, d'un mouvement auſſi uniforme.

123. Si ſur TA qui eſt la hauteur d'où le mobile eſt tombé pour acquérir la viteſſe d'impulſion exprimée par AC, on décrit une demi-circonférence qui rencontre les trois directions aux points T, M, S, les cordes AC, AE, AL ſont coupées en deux parties égales; ainſi les moitiez étant dans la même raiſon que les tous, il s'enſuit que la viteſſe d'impulſion & les viteſſes verticales, ſont encore entr'elles comme le diametre AT, & les cordes AM, AS ſont entr'elles; *donc tandis que par la viteſſe d'impulſion le mobile parcourroit* AT *d'un mouvement uniforme avec les viteſſes verticales, il parcourroit* AM, AS *d'un mouvement pareillement uniforme* (*Liv.* I. 4.), *& ce tems ſeroit la moitié du tems de la chûte par* TA (64).

124. Suppoſant que la demi-circonférence ASMT rencontre toutes les directions, & que la force du jet ou la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par la chûte TA diametre du cercle. Je dis que *cette viteſſe eſt à la viteſſe verticale propre à un jet, comme la corde ſur laquelle eſt couchée la direction pour ce jet, eſt à la partie du diametre compriſe entre le point de départ* A, *& la perpendiculaire abbaiſſée de l'extrêmité de la corde ſur le même diametre.* Ainſi la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale propre au jet par AX comme la corde AM ſur laquelle eſt la direction AX, eſt à la partie AG du diametre TA, compriſe entre le point de départ A, & la perpendiculaire MG. Car la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme AT & à AM (123); mais AT eſt à AM comme AM eſt à AG (39. *Géom.*); donc la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme AM eſt à AG. On fera voir de la même maniere que dans le jet par AD, la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme la corde AS eſt à la partie AP compriſe entre le point de départ A & la perpendiculaire SP abbaiſſée du point S ſur AT.

125. Il ſuit-de-là que tandis que le mobile parcourroit AM par la viteſſe d'impulſion, il parcourroit AG par la viteſſe verticale (*Liv.* I. 4.); ſçavoir, l'une & l'autre d'un mouvement uniforme.

PROPOSITION ONZIE'ME.

Fig. 15. 126. *Suppoſant encore que la viteſſe d'impulſion eſt la même pour toutes les directions, & qu'elle a été acquiſe par la chûte* TA; *je dis que ſi du point* M *ou une direction, par exemple* AX,

rencontre la demi-circonférence ASMT, *on abbaiſſe* MG *perpendiculairement ſur le diametre* TA, AG *eſt la hauteur où le corps peut monter par la viteſſe verticale propre au jet par* AX.

Demonstration. Par la propriété du cercle l'on a AG.AM $\overset{2}{=}$ AM.AT (39, *Géom.*). Donc AG . AM $\overset{2}{::}$ AG . AT (26. *Arit.*). Donc les quarrez des viteſſes exprimées par AG, AM ſont dans la raiſon des hauteurs AG, AT; donc les viteſſes ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs AG, AT (24. *Arit.*); ſi le corps étoit tombé de la hauteur GA, il auroit acquis une viteſſe qui ſeroit à celle qu'il a acquiſe par la hauteur TA, comme la racine quarrée de GA à la racine quarrée de AT (73); donc la viteſſe verticale propre au jet par AX, & la viteſſe acquiſe par la hauteur GA, ont même raiſon à la viteſſe acquiſe par TA; donc ces viteſſes ſont égales (28. *Arit.*); mais avec la viteſſe acquiſe par GA, le corps monteroit préciſément à la hauteur AG, ou étant parvenu il auroit perdu toute cette viteſſe (80); donc avec la viteſſe verticale propre au jet par AX, le mobile montera préciſément à la même hauteur AG où il aura auſſi perdu toute cette viteſſe.

On fera voir de la même maniere que le mobile par la viteſſe verticale propre au jet par AD, monteroit à la hauteur AP. De ce que la viteſſe verticale propre au jet par AX, & la viteſſe acquiſe par TA ſont entr'elles comme les racines quarrées de AG & de AT, & que d'ailleurs par la viteſſe acquiſe dans la chûte TA le mobile monteroit à la hauteur AT, on auroit pû d'abord conclure qu'avec la viteſſe verticale propre au jet par AX, le corps monteroit préciſément à la hauteur AG.

PROPOSITION DOUZIE'ME.

127. *La viteſſe d'impulſion étant encore ſuppoſée la même pour tous les jets, & que la demi-circonférence* ASMT, *rencontre toutes les directions, je dis que par la viteſſe d'impulſion le mobile parcourroit la corde ſur laquelle une direction eſt couchée dans la moitié du tems qu'il eſt à deſcendre par un mouvement accéleré de la hauteur compriſe entre le point* A *& la perpendiculaire abbaiſſée de l'extrémité de la corde ſur le diametre.* Ainſi par la viteſſe d'impulſion le mobile parcourroit AM dans la moitié du tems de la deſcente par GA. Fig. 15.

Demonstration. Si le corps deſcendoit de la hauteur GA, il acquerroit une viteſſe par laquelle il parcourroit AG d'un mou-

vement uniforme dans la moitié du tems de la chûte par GA (64); d'ailleurs avec la viteſſe verticale propre au jet par AX, le corps peut monter à la hauteur AG (126); donc la viteſſe verticale propre au jet par AX, eſt égale à la viteſſe qu'il acquerroit par la chûte GA. Donc par la viteſſe verticale propre au jet par AX, le corps parcourroit AG d'un mouvement uniforme dans la moitié du tems de la chûte ou de la montée par AG (64); mais la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale propre au jet par AX, comme AM eſt à AG (124); donc tandis que par la viteſſe verticale le mobile parcourroit AG d'un mouvement uniforme, il parcourroit auſſi AM par la viteſſe d'impulſion (*Liv.* I. 4); or on vient de voir que par la viteſſe verticale, le mobile parcourroit AG dans la moitié du tems de la chûte par GA; donc par la viteſſe d'impulſion il parcourra AM dans le même-tems.

128. Il ſuit de cette propoſition que dans le tems entier de la montée ou de la deſcente par GA, le mobile parcourroit AE double de AM.

DE L'ETENDUE DU JET.

PROPOSITION TREZIE'ME.

Fig. 15. 129. *Suppoſant encore que la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par* TA; *je dis que l'étendue du jet eſt quadruple de l'horizontale* GM *qui rencontre la direction* AX *au point où cette direction coupe la demi-circonférence* ASMT: c'eſt-à-dire, que ſi le corps eſt pouſſé ſuivant la direction AX avec la viteſſe qu'il auroit acquiſe par TA, il rencontrera le plan horizontal AZ en un point R éloigné du point A du quadruple de GM.

DEMONSTRATION. Le corps étant pouſſé ſuivant AX avec la viteſſe qu'il auroit acquiſe par TA, & continuant de ſe mouvoir ſuivant cette direction d'un mouvement uniforme, ſe trouveroit toujours ſur la même verticale ſur laquelle il ſe trouve étant mû d'un mouvement retardé ou accéléré par la peſanteur (103); donc lorſque par la viteſſe d'impulſion il ſeroit arrivé au point E de la verticale EF, il ſera ſur quelque point de la même verticale, & par conſéquent au point I où l'horizontale GM coupe cette verticale. Car tandis que par la viteſſe verticale propre au jet par AX, le corps monte à la plus grande hauteur AG ou ſon égale FI, par la viteſſe d'impulſion, il parcourroit le double de AM, c'eſt-à-dire AE (128.); donc pendant le tems que le corps eſt monté à la plus grande

hauteur AG ou FI, il a parcouru ſuivant l'horizontale la longueur GI double de GM. Mais le tems de la deſcente par IF eſt égal au tems de la montée par AG (78); donc pendant le tems de la deſcente, le mobile parcourroit encore par la viteſſe d'impulſion EV = AE; donc lorſque le corps rencontrera l'horizon, il ſe trouvera au point R de la verticale VR (103), & par conſéquent éloigné du point A du quadruple de GM, car comme AV eſt quadruple de AM, AR eſt quadruple de GM.

130. Le jet qui ſe fait ſous l'angle de 45 degrez a la plus grande étendue; car cette étendue eſt quadruple du rayon CL qui eſt la plus grande des perpendiculaires tirée de la circonférence ſur le diametre. On peut dire auſſi qu'elle eſt égale au double du diametre TA. Fig. 16.

131. Il ſuit de-là que ſi la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par la chûte TA, ou qu'elle ſoit égale à la viteſſe acquiſe par TA, la plus grande étendue du jet fait avec cette force ou viteſſe d'impulſion eſt double de la hauteur TA; en ſorte que ſi l'on vouloit donner au jet une plus grande étendue ou faire tomber le mobile à une plus grande diſtance du point A, la choſe ſeroit impoſſible. Car le jet qui a la plus grande étendue, eſt celui de 45 degrez: or l'étendue de ce jet n'excede pas le double de TA; donc il ſeroit impoſſible de donner au jet une étendue plus grande que le double de TA.

132. Il eſt viſible que les lignes horizontales GM, PS, qui rencontrent la demi-circonférence aux points M, S également éloignez du point L où l'horizontale CL qui paſſe par le centre C, coupe le demi-cercle, ſont égales. Donc les jets qui ſe font ſuivant les directions AX, AR également diſtantes de la direction AD, qui fait l'angle BAD de 45 degrez, ont la même étendue.

133. D'où il ſuit que ſi le corps eſt jetté ſuivant ces deux directions, il ira rencontrer l'horizontale AB en un même point. Il y a donc toujours deux directions ſuivant leſquelles le corps étant jetté tombera au même endroit de l'horizon, & ces deux directions ſont également diſtantes de celle de l'angle de 45 degrez.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

134. *Les jets qui ſe font ſuivant des directions differemment inclinées, ont des étendues qui ſont entr'elles comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon.* Ainſi l'étendue du jet par l'angle BAR, eſt à l'étendue du jet par l'angle BAD, comme le Fig. 16.

ſinus du double de l'angle BAR, eſt au ſinus du double de l'angle BAD de 45 degrez.

DEMONSTRATION. Il faut mener les rayons CS ou CL où les directions coupent la demi-circonférance : l'angle ACS eſt double de l'angle BAR (17. 18. *Géom.*) ; de même l'angle ACL eſt double de l'angle BAD, c'eſt-à-dire, que ces angles au centre C ſont doubles des angles d'inclinaiſon ; mais ces angles ont pour ſinus PS & CL (21. *Géom.*) qui ſont chacune le quart des étendues des jets par AR & AD (129) ; donc les etendues entieres étant dans la même raiſon que leurs quatriémes parties, ſont entr'elles comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon.

DE LA HAUTEUR DU JET.

135. Il eſt évident que les jets qui ſe font par une même force, ont des hauteurs differentes ſuivant que l'angle d'inclinaiſon eſt plus ou moins grand, en ſorte que le jet qui ſe fait ſuivant la verticale à l'horizon, a la plus grande hauteur, & le jet qui ſe fait ſuivant une ligne parallele à l'horizon n'a aucune hauteur, puiſque la peſanteur abbaiſſe le mobile auſſi-tôt que la force externe ceſſe de lui être appliquée. Dans la propoſition ſuivante on détermine les rapports qu'ont les hauteurs des jets.

PROPOSITION QUINZIE'ME.

136. *Les hauteurs des jets qui ſe font par une même force ſuivant des directions differemment inclinées, ſont en raiſon doublée des ſinus des angles d'inclinaiſon.*

Fig. 16. Car les hauteurs AP & AG auxquelles le mobile peut parvenir par la même impulſion étant jetté ſuivant AR & AX, ſont entr'elles en raiſon doublée des viteſſes verticales propres aux jets par AR & AX (126. 77. 71.) : or ces viteſſes ſont entr'elles comme les ſinus des angles d'inclinaiſon ZAR, ZAX (119) ; donc les hauteurs auxquelles le mobile peut arriver, ſont en raiſon doublée des ſinus des angles d'inclinaiſon.

Fig. 15. On peut démontrer géométriquement cette propoſition. On a vû que les viteſſes verticales propres aux jets par AR & AX étoient entr'elles comme les cordes AS & AM (123) : or AT . AM :: AM . AG (39. *Géom.*) ; donc $\overline{AT.AM}^2 :: \overline{AT.AG}^2$ ou $AT . AG :: \overline{AT}^2 . \overline{AM}^2$ (26. *Arit.*). Par un raiſonnement ſemblable l'on aura $AP . AT :: \overline{AS}^2 . \overline{AT}^2$. Si on multiplie par ordre

par ordre les termes de ces proportions, & qu'on diviſe les deux premiers produits par $\overline{AT}^2$ & les deux derniers par $\overline{AT}^2$, on aura $\overline{AP}.\overline{AG} :: \overline{AS}.\overline{AM}$, c'eſt-à-dire, que les hauteurs AP & AG ſont en raiſon doublée des viteſſes verticales ; mais ces viteſſes ſont dans la raiſon des ſinus des angles d'inclinaiſon, ou ces ſinus dans la raiſon des viteſſes verticales (119), & la raiſon doublée des mêmes ſinus égale à la raiſon doublée des viteſſes verticales. Donc les hauteurs des jets par AD & AX ſont en raiſon doublée des ſinus des angles d'inclinaiſon.

137. Comme les hauteurs AP, AG ſont les ſinus verſes des arcs AS, AM ou des angles ACS, ACM qui ſont doubles des angles d'inclinaiſon ZAR, ZAX, on peut dire encore que les hauteurs des jets ſont dans la raiſon des ſinus verſes des angles doubles des angles d'inclinaiſon.

DU TEMS ET DE LA DURE'E DES JETS.

Lorſqu'un corps eſt pouſſé par une même force ſuivant toutes les directions, il eſt plus ou moins de tems en l'air & à retomber. Il n'eſt pas difficile d'appercevoir que plus le jet a de hauteur, plus il doit durer de tems. Fig. 16.

PROPOSITION SEZIE'ME.

138. *Le tems ou la durée d'un jet eſt au tems ou à la durée d'un autre jet, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du premier eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon du ſecond.*

Demonstration. Le corps étant jetté ſuivant la direction AX, la durée du jet eſt égale au tems qu'il emploieroit à parcourir uniformément par la viteſſe d'impulſion, le quadruple de la corde AM. De même le corps étant jetté ſuivant la direction AR, le jet durera autant de tems que le mobile emploieroit à parcourir le quadruple de AS, par le mouvement d'impulſion, s'il reſtoit uniforme (129.128) ; donc les deux jets par AX & AR doivent durer autant de tems que le mobile ſeroit à parcourir uniformément le quadruple de AM & de AS. La viteſſe d'impulſion étant la même pour toutes les directions, les tems ſuivant AX & AR ſont dans la raiſon des eſpaces parcourus, c'eſt-à-dire, comme les quadruples de AM & de AS, ou encore comme AM & AS,

ou comme les viteſſes verticales propres aux jets par AX & AR (123.) : or ces viteſſes ſont dans la raiſon des ſinus des angles d'inclinaiſon (119.) ; donc le tems ou la durée du jet par AX, eſt au tems ou à la durée du jet par AR, comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon ZAX eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon ZAR.

139. Comme l'angle droit a le plus grand de tous les ſinus, il s'enſuit que le jet de la plus longue durée eſt celui qui ſe fait, l'angle d'inclinaiſon étant droit, c'eſt-à-dire, lorſque le jet ſe fait ſuivant la verticale AT. Ce qui eſt encore évident en ce que les cordes AM & AT (qui ſont dans la raiſon des viteſſes verticales propres à ces jets,) ſont auſſi dans la raiſon des tems que les jets faits par les cordes, doivent durer : or il eſt viſible que la corde AT eſt la plus grande de toutes ; donc le tems du jet par AT eſt le plus long de tous.

DU LIEU DU CORPS PENDANT LE MOUVEMENT.

140. En parlant de l'étendue du jet on a déterminé trois points de la route du corps, le point de départ, le point où il ſe trouve lorſqu'il arrive à la plus grande hauteur où il puiſſe monter, & le point où il rencontre la ligne horizontale qui paſſe par le lieu de départ ; mais il eſt utile de pouvoir déterminer pour chaque inſtant de la durée du mouvement, l'endroit ou le lieu du mobile.

141. M. Caſſini nomme *ligne d'égalité* la ligne qui eſt quadruple de la hauteur d'où le mobile étant deſcendu par un mouvement accéleré, auroit acquis la viteſſe d'impulſion : ainſi ſi la viteſſe d'impulſion eſt égale à celle que le mobile auroit acquiſe en tombant de la hauteur TA, AC quadruple de AT, eſt appellée *ligne d'égalité*. Fig. 17.

142. Si un corps étant pouſſé ſuivant la direction AX avec une viteſſe ou force égale à celle qu'il auroit acquiſe par la chûte TA, & que des points O, D, O, &c. on abbaiſſe des verticales qui rencontrent la courbe que le corps décrit par le jet ſuivant AX ; les parties AO, AD, AO, &c. de la direction AX compriſes entre le départ A & un point O ou D, ſont appellées chacune en particulier *lignes de projection*. Les lignes OR, DB, OR compriſes entre la courbe décrite par le jet ſuivant AX & l'extrêmité O ou D d'une ligne de projection AO ou AD, ſont appellées *lignes de chute reſpective*.

143. Il ſuit de cette définition que dans un même jet il y a autant de lignes de projection & de lignes de chûte reſpective qu'il y a de points dans la ligne courbe décrite par ce jet.

PROPOSITION DIX-SEPTIE'ME.

144. *Dans un même jet la ligne d'égalité, la ligne de projection, & la ligne de chûte reſpective ſont trois lignes en proportion continue; en ſorte que ſi l'on prend ſur la direction* AX *une partie* AO *à volonté pour la ligne de projection, que du point* O *on mene une verticale* OR *qui rencontre la courbe décrite en un point* R, *on aura* AC. AO :: AO. OR.

DEMONSTRATION. La propoſition peut avoir deux cas: ou bien la ligne de chûte reſpective DB rencontre la courbe décrite au point B de l'horizontale AZ qui paſſe par le point A de départ, ou bien la ligne de chûte reſpective OR rencontre la courbe en un point R au-deſſus ou au-deſſous de l'horizontale AZ. Fig. 17.

Premier cas. Puiſque la ligne de chûte DB rencontre la courbe au point B de l'horizontale AZ, AB eſt l'étendue du jet, (on ſuppoſe que la viteſſe d'impulſion eſt égale à celle qui auroit été acquiſe par la chûte TA, & que la ligne de direction eſt AX) d'où il ſuit que la ligne de projection AD eſt quadruple de la corde AM du demi-cercle AMT, décrit ſur AT pour diametre (128). Cela poſé, les triangles ſemblables ADB, AMT donnent AT. AM :: AD. DB. Si on multiplie les deux premiers termes par 4, on aura 4AT. 4AM :: AD. DB. Si au lieu de 4AT & 4AM, on met leurs égales AC & AD, on aura AC. AD :: AD. DB

Second cas. Lorſque la ligne de chûte reſpective OR rencontre la courbe à un point R au-deſſus ou au-deſſous de l'horizontale AZ.

On a fait voir que ſi de deux points D, O, de la direction AX on mene deux verticales DB, OR qui rencontrent la courbe que le mobile décrit, elles ſont en raiſon doublée des parties AD, AO de la direction AX qui leur répondent, c'eſt-à-dire, que les lignes de chûte reſpective DB, OR ſont en raiſon doublée des lignes de projection correſpondantes (103. *n.* 10.); donc DB. OR :: $\overline{AD}^2$. $\overline{AO}^2$. Le premier cas de la propoſition donne AC. AD :: AD. DB; donc $\overline{AC}^2$. $\overline{AD}^2$ :: AC. DB (26. *Arit.*) ou AC. DB :: $\overline{AC}^2$. $\overline{AD}^2$.

Voici les deux proportions qu'on vient de former. Si on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, & qu'on diviſe les deux premiers produits par DB, & les deux derniers par $\overline{AD}^2$: on aura

$$DB . OR :: \overline{AD}^2 . \overline{AO}^2.$$
$$AC . DB :: \overline{AC}^2 . \overline{AD}^2.$$

AC . OR :: $\overline{AC}^2$. AO ou $\overline{AC}^2$. AO :: AC . OR. D'où l'on tire AC . AO :: AO . OR, puiſque ſi on avoit cette derniere proportion on auroit $\overline{AC.AO}^2$ :: AC.OR (26. *Arit.*).

145. *Il ſuit de cette propoſition que la viteſſe d'impulſion étant connue, enſemble le tems qui s'eſt écoulé depuis le moment du départ, on pourra trouver le point où le mobile ſe trouve après ce tems :* car la viteſſe d'impulſion étant connue, on trouvera l'eſpace AO qu'il auroit parcouru uniformément ſur AX avec cette viteſſe pendant le tems donné : or dans le même tems par ſon mouvement réel il ſe trouve ſur la verticale OR qui paſſe par l'extrêmité O de l'eſpace AO (103. *n.* 6.). Il ne s'agit donc plus que de déterminer ſur la verticale OR le point R de la courbe que le corps décrit par le jet ſuivant AX ; mais la propoſition en donne le moyen. Donc ſi la viteſſe d'impulſion eſt connue, enſemble le tems qui s'eſt écoulé depuis le moment du départ, on pourra trouver le lieu du corps après ce tems.

146. Suppoſant encore que la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par la chûte TA & que AC eſt la ligne d'égalité. Si on prend à volonté un point R duquel on éleve une verticale RO, que du point A on mene une ligne AO qui rencontre la verticale au point O, telle qu'elle ſoit moyenne proportionnelle entre la ligne d'égalité AC & la ligne de chûte OR : *Je dis que le corps étant jetté ſuivant* AO *avec la viteſſe d'impulſion acquiſe par* TA, *paſſera par le point* R. Car le corps A étant jetté ſuivant AO doit décrire une courbe dont la propriété eſt telle que ſi de quelque point de la direction AO, on mene une verticale qui rencontre la courbe ; la ligne de projection AO eſt moyenne proportionnelle entre la ligne d'égalité & la ligne de chûte reſpective : or par la conſtruction les lignes AO & OR ont la condition requiſe ; donc la ligne OR rencontre la courbe décrite au point R ; donc le point R eſt un point de cette courbe, & par conſéquent le mobile paſſera par le point R.

147. Si après avoir mené la verticale OR on ne pouvoit trouver aucune moyenne proportionnelle entre OR & AC qui pût

joindre les points A & O, le mobile étant jetté par la direction AO, ne passeroit pas par le point R ; car les lignes AO, OR n'ayant pas les conditions requises, ne pourroient déterminer le point R. Ainsi ce point seroit hors de la courbe décrite.

148. Dans ce qui vient d'être dit des jets obliques, on a supposé que la vitesse d'impulsion étoit connue, & qu'elle avoit été acquise par une hauteur connue, si cette vitesse étoit déterminée, mais que l'on ne sçût pas par qu'elle chute elle peut être acquise ; pour arriver aux déterminations précédentes, il faudroit auparavant déterminer cette chûte (93) : car on a vû que c'est une des conditions dont on a eu continuellement besoin pour déterminer les differentes circonstances des jets obliques.

DES JETS QUI SONT FAITS PAR DES FORCES differentes.

149. On a supposé jusqu'ici que c'est le même corps qui est poussé avec la même force suivant toutes les directions. Il est aisé de voir que si la force qui chasse le corps, augmente ou diminue, ou que la masse soit plus ou moins grande, la force demeurant la-même ; ou enfin que la masse & la force externe qui lui est appliquée changent, les circonstances du jet oblique varieront, quand même le jet se feroit suivant la même direction. Si on veut comparer les jets faits suivant la même direction avec des forces differentes, il faut connoître auparavant la vitesse d'impulsion, c'est-à-dire, la vitesse que la force externe peut imprimer au mobile quelle que soit sa masse, connoître aussi par quelle chûte cette vitesse pourroit être acquise. Cela posé,

150. Si deux corps, quelles que soient leurs masses, sont poussez suivant la même direction avec des vitesses d'impulsion differentes, ils parviendront à des hauteurs qui sont entr'elles comme les hauteurs par où les vitesses d'impulsion ont été acquises.

Supposons que les vitesses que les mobiles reçoivent étant pous- Fig. 18.
sez suivant la même direction AX, ont été acquises par les chûtes TA & GA. Si des points M, N on abbaisse les perpendiculaires MS, NP, les hauteurs AS, AP sont celles où les mobiles parviendront avec les vitesses qui leur sont imprimées suivant la même direction AX (126) : or il est visible que AS & AP sont dans la raison des hauteurs TA & GA par où les vitesses d'impulsion ont été acquises, car ces deux raisons sont égales à celle de AM à AN.

151. Puiſque les étendues des jets ſont quadruples des lignes horizontales SM, PN, & que ces mêmes lignes ſont encore entr'elles comme les hauteurs TA, GA, il s'enſuit que les deux jets ont des étendues qui ſont dans la raiſon des hauteurs TA, GA, par où les viteſſes d'impulſion ont été acquiſes.

152. Il eſt évident que les viteſſes d'impulſion qu'on ſuppoſe avoir été acquiſes par les hauteurs TA & GA ſont en raiſon ſoudoublée de ces hauteurs ou comme leurs racines (73); pareillement les viteſſes verticales par leſquelles les mobiles montent aux hauteurs AS, AP, ſont auſſi en raiſon ſou-doublée des hauteurs AS, AP; donc les viteſſes verticales des mobiles ſont auſſi en raiſon ſou-doublée, ou comme les racines quarrées des hauteurs TA, GA, par leſquelles les viteſſes dimpulſion ont été acquiſes; car les hauteurs TA, GA, ſont en même raiſon que SA & PA. D'où il ſuit encore que les viteſſes verticales par leſquelles les deux mobiles montent aux hauteurs AS, AP, ſont dans la même raiſon que les viteſſes d'impulſion.

APPLICATION DES PRINCIPES PRE'CEDENS à la réſolution des queſtions ou problèmes qu'on a coutume de propoſer ſur les jets.

PROBLÊME VI.

153. *Connoiſſant la force du jet, c'eſt-à-dire, la chûte* TA, *qui a donné la viteſſe d'impulſion, & l'angle d'inclinaiſon* ZAD, *trouver l'étendue du jet, ſa hauteur, la ligne de projection, & la ligne de chûte reſpective.*

Le Problême peut être réſolu géométriquement ou en nombres.

Réſolution géométrique. Sur AT priſe pour diametre il faut décrire un demi-cercle qui rencontre la ligne de direction au point S, duquel il faut mener SP perpendiculaire au diametre AT, prendre AB quadruple de SP, elle ſera l'étendue du jet, & AP la hauteur; il faut enſuite élever la perpendiculaire BD qui rencontre la ligne de direction au point D, & l'on aura DB pour la ligne de chûte reſpective, & AD pour la ligne de projection. Fig. 19.

La réſolution du problême eſt évidente par tout ce qui précede, on peut voir les articles (126. 129. 106.).

Réſolution en nombres. Suppoſons que l'angle d'inclinaiſon ZAD eſt de 30 degrez, l'angle ATS qui lui eſt égal, eſt auſſi de 30 degrez: ainſi dans le triangle ATS on connoît le côté AT qui eſt la chûte qui a donné la viteſſe d'impulſion, on

connoît l'angle droit & l'angle ATS ; donc la corde AS ſera connue (12. *Géom.*) ; donc 1°. la ligne de projection AD quadruple de AS ſera auſſi connue. 2°. AS eſt moyenne proportionnelle entre AT & AP (39. *Géom.*) ; donc la hauteur AP ſera connue (10. *Arit.*). 3°. Les triangles ADB, ATS ſont ſemblables ; donc AT . AS :: AD . DB ; dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus ; donc DB qui eſt la ligne de chûte reſpective eſt connue (10. *Arit.*). 4°. PS eſt moyenne proportionnelle entre AP & PT qui ſont les deux parties du diametre AT, leſquelles ſont connues, parce que le diametre AT, & la partie AP ſont connues ; donc par leur moyen on connoîtra (29. *Arit.*) PS dont le quadruple eſt égal à l'étendue du jet AB.

Problême VII.

154. *Suppoſant encore que la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par la chûte* TA, *& que le lieu du départ eſt au point* P *ſitué ſur une hauteur* AP, *on propoſe de trouver la diſtance* AB *où le corps rencontrera l'horizon, étant chaſſé ſuivant l'horizontale* PS *avec la viteſſe acquiſe par* TA. Fig. 20.

Réſolution géométrique. Il faut mener la corde AS, & la porter deux fois de A en B ſur l'horizontale AZ, & AB ſera la diſtance cherchée.

Si le corps étoit pouſſé ſuivant la direction AS tandis que par la viteſſe verticale il monteroit à la hauteur AP, par la viteſſe d'impulſion il parcourroit le double de AS (128.) : or le tems de la deſcente par PA eſt égal au tems de la montée par AP (78) ; donc le corps étant jetté horizontalement ſuivant PS, par la viteſſe d'impulſion dans le tems de la deſcente par PA parcourroit uniformément le double de AS ; mais la viteſſe horizontale du mobile pendant tout le tems du mouvement eſt égal à la viteſſe d'impulſion (112.) ; donc dans le tems de la deſcente par PA, le corps parcourra le double de la corde AS ſuivant la direction horizontale, & par conſéquent il rencontrera la ligne horizontale au point B diſtant de A du double de AS.

Réſolution en nombres. Il s'agit de trouver la corde AS. Les hauteurs TA & AP ſont connues : or AS eſt moyenne proportionnelle entre AT & AP ; donc AS ſera connue (29. *Arit.*).

Il eſt évident que ſi le point P de départ étoit au haut de la chûte TA, la corde AS ſeroit égale au diametre TA, c'eſt pourquoi le mobile rencontreroit l'horizontale AZ au point B diſtant du point A de deux fois le diametre TA. En effet tandis

que le mobile parcourroit TA d'un mouvement uniformément accéleré, il parcourra par la viteſſe horizontale le double de AT (63); car la viteſſe horizontale eſt égal à la viteſſe d'impulſion, & elle demeure uniforme pendant tout le tems du mouvement

PROBLÊME VIII.

155. *Trouver le rapport des tems qu'un mobile emploie par deux jets faits avec la même viteſſe d'impulſion.*

Fig. 20. On ſuppoſe que la viteſſe d'impulſion ſoit égale à celle qui auroit été acquiſe par la chûte TA, & que les jets ſont dirigez ſuivant AM & AS. Il faut décrire ſur AT priſe pour diametre le demi cercle ASMT qui coupe les directions AX, AD aux points M, S. Les cordes AM, AS ont entr'elles le même rapport que les tems cherchez : car les tems que le mobile emploie à rencontrer l'horizontale AZ lorſqu'il eſt pouſſé avec la même viteſſe ſuivant les directions AM, AS ſont égaux aux tems qu'il emploieroit à parcourir uniformément des eſpaces quadruples de AM & de AS (128.), les viteſſes ſuivant AM, AS étant égales, il s'enſuit que les tems ſont entr'eux comme les lignes quadruples de AM & de AS, ou comme AM & AS (*Liv.* I. 12.).

Si on veut avoir en nombres le rapport des cordes AM, AS, dans les triangles ATM, ATS, on connoît tous les angles, & un côté, ſçavoir AT; donc les cordes AM, AS ſeront connues.

Si en faiſant le calcul on regarde le diametre AT comme ſinus total, on connoîtra ſeulement le rapport des tems ; mais ſi l'on emploie AT comme étant la hauteur par où le mobile a acquis en tombant, la viteſſe d'impulſion, & que l'on eſtime le tems de la chûte TA, l'on connoîtra les tems réels que le mobile emploie dans les jets ſuivant AM, AS.

Suppoſons que l'angle BAS ſoit de 30 degrez, & l'angle BAM de 64 degrez 10'. L'angle ATS eſt auſſi de 30 degrez, & l'angle ATM de 64 degrez 10' : or AT étant conſiderée comme ſinus total (ſuivant les tables des ſinus) vaudra 100000, le ſinus de l'angle de 30 degrez 50000, & le ſinus de 60 degrez 10', 90006 ou 90000. Ces ſinus étant comparez au ſinus total & entr'eux, ſont dans le rapport de $\frac{5}{10}$ à $\frac{9}{10}$ ou comme 5 & 9 : ainſi les cordes AS, AM, étant entr'elles dans le rapport de ces nombres, il s'enſuit que les tems des jets par AS, AM ſont entr'eux comme 5 & 9 ; mais ſi on ſuppoſe que la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par la hauteur TA de 1500 pieds, on trouvera par le problême

blême I. (91) que le tems de la chûte par TA, eſt de 10 ſecondes ; donc le tems du jet par AT, c'eſt-à-dire, le tems de la montée & de la deſcente ſera de 20 ſecondes ; or ſuivant l'hypotheſe AT, AS, AM, ſont entr'elles comme les nombres 10, 5, 9, on aura donc $10 . 5 :: 20^{11} . 10^{11}$ & $10 . 9 :: 20^{11} . 18^{11}$: ainſi les tems réels des jets par AS & AM ſont l'un de 10, & l'autre de 18 ſecondes ; & ces tems ſont encore dans la raiſon de 5 à 9.

Problême IX.

156. *La viteſſe d'impulſion étant connue, & la durée du jet horizontal, trouver l'eſpace parcouru horizontalement.* AP *eſt la hauteur du lieu de départ au-deſſus du plan horizontal* AZ.

Puiſque la viteſſe d'impulſion eſt connue, la hauteur TA par où elle a été acquiſe, eſt auſſi connue, de même que le tems par TA parcourue d'un mouvement uniformément accéléré. Cela poſé, il faut faire la proportion. Le tems par TA eſt au tems de la chûte par PA, comme le double de TA eſt à un quatriéme terme qui eſt l'eſpace que le corps a parcouru horizontalement pendant le jet horizontal. Car lorſque la viteſſe eſt la même, les eſpaces parcourus ſont comme les tems (*Liv.* I. 12.) : or la viteſſe horizontale ne differe point de la viteſſe d'impulſion (112) ; donc les eſpaces parcourus par cette viteſſe doivent être entr'eux comme les tems. Mais par la viteſſe d'impulſion le mobile parcourroit deux fois la hauteur TA dans un tems égal à celui de la chûte TA (63) ; donc dans le tems du jet horizontal le corps doit parcourir l'eſpace que la proportion fait trouver.

Dans les problêmes précedens on a ſuppoſé que la force du jet étoit connue, c'eſt-à-dire, la viteſſe que la force externe appliquée au mobile lui imprime. Voici la maniere de trouver par une ſeule expérience quelle eſt cette force.

Problême X.

157. *Un corps étant chaſſé par une certaine force ſuivant une direction à volonté, trouver cette force, c'eſt-à-dire, déterminer quelle eſt la viteſſe qui lui a été imprimée par cette force.*

Le problême a trois cas : ou bien le corps eſt tombé ſur un plan horizontal, qui paſſe par le point de départ, ou il s'eſt arrêté au deſſus de ce plan, ou il eſt deſcendu plus bas. La réſolution eſt la même pour les trois cas.

Fig. 21. 22. 23. 24. Suppoſons que le mobile étant jetté ſuivant la direction AD horizontale ou inclinée, ſoit au-deſſus ſoit au-deſſous de l'horizon, tombe au point B. Cela poſé, il faut 1°. remarquer l'angle DAB, formé par la direction AD, & le rayon viſuel qui paſſe par le lieu de départ A, & l'endroit où le mobile B s'eſt arrêté. 2°. Il faut imaginer une ligne verticale qui paſſe par le lieu B & qui rencontre la direction AD au point D. 3°. Dans le triangle BAD, l'on connoît le côté AB qu'on peut meſurer actuellement, ou du moins en déterminer la longueur par la Géométrie pratique : on connoît auſſi l'angle DAB par l'obſervation : l'angle ADB eſt auſſi connu, car il eſt égal à l'angle CAD ſon alterne qui peut être connu par l'obſervation. Donc les côtez AD, DB ſeront connus. 4°. Il faut trouver une troiſiéme proportionnelle aux lignes BD, AD. Suppoſons que cette ligne ſoit AC, il faut partager AC en quatre parties égales, & l'une des quatre eſt la hauteur d'où le mobile venant à deſcendre par un mouvement uniformément accéleré, acquerroit la viteſſe qu'il a reçue dans le jet par AD (141). La chûte propre à la viteſſe d'impulſion étant connue la viteſſe acquiſe par cette chûte ſera connue, & par conſéquent la viteſſe d'impulſion.

Voici la preuve de la réſolution que l'on vient de donner : Puiſque le mobile s'eſt arrêté au point B, il s'enſuit que ce point appartient à la courbe décrite ; d'ailleurs on ſuppoſe que AD eſt la ligne de projection ; donc DB qui paſſe par le point B de la courbe, & qui étant verticale rencontre AD, eſt la ligne de chûte reſpective (142) ; donc la troiſiéme ligne proportionnelle aux deux BD, DA eſt la ligne d'égalité (144) ; mais le quart de cette ligne eſt la hauteur qui donneroit la viteſſe d'impulſion qui a été imprimée au mobile (141). Donc cette viteſſe ſera connue.

Lorſque la force du jet eſt connue, on a facilement la plus grande étendue du jet fait avec cette force.

Il y auroit encore un problême à réſoudre ; ce ſeroit de propoſer de faire tomber un corps jetté ſur un lieu donné ; mais ce problême trouvera mieux ſa place dans le ſecond traité où l'on appliquera les principes qu'on vient d'établir à l'art de jetter les bombes.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

DES CORPS PESANS MUS SUR DES PLANS inclinez par un mouvement accéleré ou retardé par la peſanteur.

158. LA ſurface ſur laquelle un corps peſant eſt mû peut être courbe ou plane. Les miroirs ordinaires répréſentent une ſurface plane, la ſuperficie d'une ſphere ou d'un globe, les ſurfaces courbes. La ſurface courbe peut être conſiderée comme compoſée de pluſieurs plans contigus qui par leur rencontre & leur interſection forment la courbure de la ſurface. Les ſurfaces étant inſéparables de la matiere, ſont remplies d'inégalitez qui retardent les corps dans leur mouvement : il faudroit donc avoir égard au déchet cauſé par cette inégalité. Néanmoins pour ne porter d'abord notre attention qu'à l'objet principal qui eſt d'éxaminer ce qui doit arriver à des corps qui ſeroient mûs ſur des plans inclinez par le ſeul effort de la peſanteur, on conſiderera les ſurfaces comme ſi elles étoient parfaitement liſſes & polies, on fera abſtraction de toute âpreté qui pourroit alterer en quelque ſorte le mouvement que le corps doit avoir.

159. On conſiderera les corps peſans 1°. en tant que mûs ſur un ſeul plan incliné. 2°. On examinera ce qui leur arrive lorſqu'ils ſont mûs ſur pluſieurs plans inclinez contigus les uns aux autres. 3°. On appliquera les principes établis aux mouvemens des pendules.

DES CORPS PESANS EN TANT QUE MUS ſur un ſeul plan incliné.

160. Un plan peut avoir trois poſitions principales à l'égard de la direction naturelle des corps peſans. Il peut être horizontal, incliné à l'horizon, & vertical.

161. Lorſque le plan qui ſupporte un corps peſant eſt horizontal, la direction du corps eſt perpendiculaire au plan, c'eſt pourquoi l'effort de la peſanteur eſt arrêté tout court par la réſiſtance du plan ; & parce que par cet effort le corps n'eſt pas porté plus vers un côté que vers un autre, il doit demeurer en repos. Si le plan eſt vertical, la direction du poids eſt parallele au même plan : de là vient que le corps deſcend ſans preſſer aucunement le plan ; mais ſi le plan eſt incliné, la direction de la

peſanteur qui eſt perpendiculaire au plan horizontal, eſt néceſſairement oblique au plan incliné ; donc ce plan ne réſiſte pas totalement à l'effort qui pouſſe le corps ; c'eſt pourquoi cet effort ſe décompoſe en deux autres, par l'un la peſanteur preſſe le plan, & par l'autre elle ſollicite le corps à deſcendre : d'où l'on voit que ſi le corps n'eſt pas retenu par une obſtacle ou une force contraire, il deſcendra néceſſairement ſur le plan.

162. Dans un plan incliné on diſtingue la longueur, la hauteur & la baſe. On répréſente ces trois choſes par les trois côtez d'un triangle rectangle, ſçavoir la longueur par l'hypothénuſe, la hauteur par l'un des côtez de l'angle droit, & la baſe par l'autre côté du même angle : ainſi AD eſt la longueur du plan, BD la hauteur, & AB la baſe. Fig. 25.

163. On ſuppoſera dans la ſuite que les corps peſans qui ſont mûs ſur un plan incliné, ſont de figure ſphérique, ou plutôt on fera abſtraction de toute figure, & on les répréſentera toutes par la ſphérique. La difference qu'il y a entre un corps terminé par des ſurfaces planes & un globe, c'eſt que le premier gliſſe pour l'ordinaire ſur le plan incliné à cauſe qu'il a une baſe qui eſt rencontrée par la direction du centre de gravité ; mais un globe qui eſt abandonné à lui-même, roule ſur le plan au lieu de gliſſer, parce que la direction du centre de gravité, paſſant hors de la baſe du corps, la peſanteur l'incline & l'oblige de rouler. D'où l'on voit que les parties d'une ſphere qui eſt mûe librement ſur un plan incliné, vont inégalement vîte ; celles qui ſont vers la ſurface étant mûes avec une plus grande viteſſe que celles qui ſont près du centre, car elles décrivent en même-tems des eſpaces plus grands. L'on voit encore que toutes les parties d'un globe qui roule décrivent des lignes courbes, il n'y a que le centre qui étant toujours également éloigné du plan décrit une ligne droite parallele au plan. Or c'eſt par la viteſſe du centre auquel on conçoit que toute la peſanteur eſt réunie qu'il faut juger de la viteſſe du corps. On ſuppoſera donc que ce centre eſt mû ſur le plan, de même qu'un corps qui ne feroit que gliſſer. On ſuppoſera encore que les directions de la peſanteur ſont paralleles entr'elles & perpendiculaires à la baſe du plan.

164. *Un corps qui deſcend librement ſur un plan incliné, reçoit dans tous les inſtans du mouvement des degrez égaux de viteſſe.* Car la peſanteur étant une force conſtante & uniforme, tend à imprimer au mobile des degrez égaux de viteſſe en tems égaux, il n'y auroit donc que la réſiſtance du plan qui pût em-

pêcher que les degrez de viteſſe que le mobile reçoit à chaque inſtant ne fuſſent égaux. Mais ſi on fait attention que les directions de la peſanteur étant paralleles entr'elles, la réſiſtance du plan eſt continuellement la même, on verra que ſi au premier inſtant de la deſcente, la peſanteur communique au corps un degré de viteſſe, au ſecond inſtant elle en communiquera un ſecond égal au premier, autrement la peſanteur ne ſeroit pas une force conſtante, ou bien le plan incliné ne réſiſteroit pas également aux efforts inſtantanés de la peſanteur, ce qu'on ne peut pas dire dans la ſuppoſition des directions paralleles. Donc le mobile reçoit à chaque inſtant des degrez égaux de viteſſe.

165. *La viteſſe d'un corps qui deſcend librement ſur un plan incliné, eſt uniformément accélerée.* Car en des tems égaux la peſanteur lui imprime la même viteſſe; d'ailleurs aux inſtans ſuivans il conſerve toute la viteſſe qu'il a reçue aux inſtans précedens, puiſque le plan incliné ne lui ôte rien de cette viteſſe. Donc la viteſſe du corps s'accroît comme les tems. Donc elle eſt uniformément accélerée.

166. *Le mouvement d'un corps qui monte par un plan incliné, eſt uniformément retardé.* Car le plan n'étant point oppoſé au mouvement du corps, ſans la peſanteur le corps ſeroit mû d'une viteſſe uniforme. Or il eſt évident que ſi la peſanteur accélere un corps qui deſcend par unplan incliné, elle le retarde lorſqu'il monte par ce plan; mais elle le retarde uniformément, car ſans le plan elle lui ôteroit à chaque inſtant le même degré de viteſſe. Or on vient de voir que le plan réſiſte également à l'effort de la peſanteur; donc cet effort qui en lui-même eſt uniforme, étant également empêché, agit auſſi également ſur les corps; il doit donc détruire des degrez égaux de viteſſe en tems égaux; donc le mouvement d'un corps qui monte par un plan incliné, eſt uniformément retardé.

167. *Si un corps après être deſcendu librement par un plan incliné, eſt pouſſé vers le ſommet avec une viteſſe égale à celle qu'il a acquiſe lorſqu'il arrive au bas du plan, il ſera autant de tems à la perdre qu'il en a été à l'acquérir.* Car puiſque l'action de la peſanteur eſt uniforme, & que d'ailleurs le plan réſiſte également à cette action, ſoit que le corps monte, ſoit qu'il deſcende, il s'enſuit que ſi la peſanteur donne au corps lorſqu'il deſcend une viteſſe d'un certain degré, elle lui ôtera ce degré dans un tems égal lorſqu'il monte; donc le corps ſera autant de tems à perdre le mouvement qu'il en a été à l'acquérir.

168. *Si un corps eſt pouſſé du bas du plan vers le ſommet avec la viteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant par le plan, il remontera préciſément à la hauteur d'où il eſt deſcendu ; & lorſqu'il ſera arrivé à l'endroit d'où il eſt parti, il aura perdu toute ſa viteſſe.* Cette propoſition ſe démontre de la même maniere qu'on a fait voir qu'un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec la viteſſe acquiſe dans la chûte verticale, remonte préciſément à la hauteur d'où il eſt deſcendu. On ne repete pas ici la démonſtration : on ajoûtera ſeulement que la loi qui regle le mouvement d'un corps qui deſcend & qui monte par un plan incliné, étant la même ou parfaitement ſemblable à la loi d'un corps qui deſcend où qui monte verticalement, les effets doivent être parfaitement ſemblables ; donc puiſqu'un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe au bas de la chûte verticale, monte à la hauteur d'où il eſt deſcendu, s'il remonte par un plan incliné avec la viteſſe qu'il a acquiſe quand il eſt arrivé au bas du plan, il doit remonter juſqu'à l'endroit d'où il a commencé à deſcendre, & lorſqu'il y eſt parvenu, il doit avoir perdu toute ſa viteſſe.

169. On pourroit démontrer ici en ſuivant les mêmes principes & la même méthode, que pour le mouvement accéleré ou retardé des corps qui deſcendent ou qui montent verticalement.

1°. Que l'eſpace parcouru par un corps qui deſcend ſur un plan incliné eſt exprimé par un triangle rectangle dont la hauteur répréſente le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems ; & que ſi le corps eſt pouſſé vers le haut du plan avec la viteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant, l'eſpace parcouru eſt auſſi exprimé par le même triangle, puiſqu'il eſt égal à l'eſpace parcouru en deſcendant.

2°. Que cet eſpace eſt la moitié de celui que le corps parcourroit en même-tems ou en tems égal, s'il étoit mû uniformement avec la viteſſe qu'il auroit acquiſe en deſcendant, ou perdue en montant. Ou que le tems que le mobile emploieroit à parcourir cet eſpace uniformément avec la viteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant, ou perdue en montant, n'eſt que la moitié du tems qu'il a été à deſcendre ou à monter le long du plan incliné.

3°. Que les eſpaces que le mobile a parcourus à compter du point de repos, c'eſt-à-dire, du point de départ lorſque le corps deſcend, ou du point de l'arrivée lorſqu'il monte, ſont entr'eux comme les quarrez des tems ou des viteſſes acquiſes ou perdues à la fin de ces tems.

4°. Que les tems & les viteſſes acquiſes ou perdues à compter du point de repos, ſont dans la raiſon des racines quarrées des eſpaces parcourus, &c.

Mais il ſeroit inutile & ſuperflu de répéter les mêmes démonſtrations : après avoir donc prouvé que le mouvement d'un corps qui deſcend par un plan incliné, eſt uniformément accéleré, & qu'il eſt uniformément retardé lorſqu'il monte, il ſuit évidemment que tout ce qui a été dit du mouvement vertical des corps peſans, eſt auſſi vrai du mouvement ſur un plan incliné, puiſque tout ce qui a été prouvé du mouvement vertical, eſt uniquement fondé ſur cette propriété, que le mouvement d'un corps qui deſcend librement, eſt uniformément accéleré, & qu'il eſt uniformément retardé lorſqu'il monte.

170. Il paroît par tout ce qui vient d'être dit, que l'action qui accélere & qui retarde un corps qui eſt mû ſur un plan incliné, eſt une action conſtante, de même que l'action qui accélere & retarde les corps dans le mouvement vertical. On peut donc conſidérer la peſanteur comme une force qui éxerce deux actions qui ſont l'une & l'autre conſtantes ; l'action qui pouſſe les corps verticalement a ſon effet plein & entier, elle produit tout ce qu'elle peut faire ; mais cette même action eſt modifiée lorſque le corps eſt mû ſur un plan incliné ; ſon effet eſt moindre à cauſe de la réſiſtance du plan, & d'autant moindre que le plan par ſa ſituation à l'égard de la direction de la peſanteur réſiſte davantage : il eſt néanmoins certain que cette action, quoique diminuée, eſt conſtante, lorſque le corps eſt mû ſur un même plan. On peut donc regarder la peſanteur qui meut les corps verticalement, & la peſanteur qui les meut ſur des plans inclinez, comme deux forces conſtantes, quoique ces deux forces en elles-mêmes n'en ſoient qu'une ; elles doivent donc produire à chaque inſtant des effets qui leur ſoient proportionnels.

171. L'action ou l'effort de la peſanteur ſuivant ſa direction naturelle, eſt appellée *peſanteur abſolue*, elle eſt proportionnelle au poids du corps. Mais l'action de la peſanteur en tant qu'elle meut les corps ſur des plans inclinez, eſt appellée *gravité* ou *peſanteur relative*, elle eſt toujours moindre que la peſanteur abſolue, puiſque la peſanteur relative n'eſt que la peſanteur abſolue en tant qu'elle eſt détruite ou empêchée en partie par la réſiſtance du plan. Ces deux forces ont leurs directions differemment ſituées ; la peſanteur abſolue agit ſuivant des directions perpendiculaires à la baſe du plan incliné, & la peſanteur relative ſuivant des di-

rections paralleles au plan incliné. La direction de la pesanteur absolue est invariable, mais la direction de la pesanteur relative change selon que le plan est plus ou moins incliné.

172. *La pesanteur relative d'un corps est égale à une force qui le tiendroit en équilibre sur le plan incliné suivant une direction parallele au plan.* Car la pesanteur relative tend à faire descendre le corps parallelement au plan ; donc la force qui le tient en équilibre suivant une direction parallele au plan, agit en sens contraire de la pesanteur relative, & elle lui est toute opposée, & par conséquent égale ; car un corps ne peut être retenu en équilibre par deux puissances directement opposées, à moins qu'elles ne soient égales.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

173. *Si un corps est retenu en équilibre sur un plan incliné suivant une direction parallele au plan la pesanteur absolue est à la force qui le retient, comme la longueur du plan est à sa hauteur.*

Fig. 25. Si le poids P est retenu en équilibre sur le plan incliné DA par la puissance M, suivant une direction CM parallele au plan AD, la pesanteur absolue est à la puissance M comme la longueur AD est à la hauteur DB.

Demonstration. Le poids P & la puissance M ne sont en équilibre sur le plan incliné qu'autant que ce plan leur résiste, il est donc évident que de leur action conjointe il en resulte une pression sur le plan à laquelle le plan résiste : or la pression causée sur le plan est nécessairement perpendiculaire au même plan ; car si la pression se faisoit suivant une direction oblique au plan, le corps P étant sollicité par cette force moyenne, glisseroit ou rouleroit sur le plan, puisqu'un plan ne résiste totalement qu'à la pression perpendiculaire (*Liv.* I. 173. 175.) : ainsi le poids P ne seroit pas en équilibre, ce qui est contre la supposition : il faut donc que la direction de la pression resultante du concours d'action du poids P & de la puissance M, soit perpendiculaire au plan ; donc si par le point d'attouchement N, on mene CO perpendiculaire au plan incliné DA, le plan résistera à l'effort résultant du concours d'action de la puissance & du poids suivant la direction OC. Sur les trois directions, sçavoir de la puissance suivant CM, du poids suivant CF, de la résistance suivant OC, soit fait le parallelogramme EF, en sorte que la direction de la résistance soit sur la diagonale CO. Dans le cas d'équilibre la puissance & le poids sont entr'eux comme

comme

comme les côtez CE,CF du parallelogramme EF (*Liv.* I 187.), ou bien comme les côtez CE, EO du triangle EOC, car EO =CF. Cela posé, les triangles EOC, DAB sont semblables, l'angle B est droit, l'angle ECO est aussi droit : car CO est perpendiculaire aux deux paralleles AD & CM, l'angle CEO est égal à l'angle D, car ces deux angles sont égaux à l'angle EGD qui est alterne par rapport à l'un & à l'autre angle (29. *Géom.*) ; donc EO . EC :: AD . BD (8. 15. *Géom.*) ; c'est-à-dire le poids P ou la pesanteur absolue exprimée par EO ou CF est à la puissance M exprimée par CE, comme la longueur du plan est à sa hauteur.

174. *La pesanteur absolue est à la pesanteur relative comme la longueur du plan est à sa hauteur :* Car la pesanteur relative du poids P est égale à la puissance M qui le tient en équilibre sur le plan suivant une direction parallele au plan, puisqu'elle lui est directement opposée. Mais par la proposition la pesanteur absolue est à la puissance M comme la longueur du plan est à sa hauteur ; donc la pesanteur absolue est à la pesanteur relative dans la même raison.

175. *D'où il suit que tant que le plan conserve la même inclinaison, la pesanteur absolue & la pesanteur relative sont dans un rapport constant, & que la pesanteur absolue est toujours plus grande que la pesanteur relative tant que le plan* DA *à quelque inclinaison.* Si le plan DA devient plus ou moins incliné, c'est-à-dire, s'il s'abbaisse ou s'il devient plus élevé, la pesanteur relative changera, elle sera moindre si le plan s'abbaisse, plus grande si le plan devient plus élevé. *Si le plan incliné faisoit avec la hauteur* DB *un angle infiniment petit, les côtez* DA, DB *pourroient être considerez comme égaux & paralleles, pour lors la pesanteur relative seroit égale à la pesanteur absolue.* Et si le plan incliné devenoit parallele à la base, en sorte que l'angle DAB fût infiniment petit, la pesanteur relative seroit nulle.

176. Lorsqu'un corps est mû sur un même plan incliné la pesanteur absolue est à la pesanteur relative dans le rapport constant de la longueur à la hauteur (174) ; *Donc ces deux forces impriment en même-tems aux corps qu'elles meuvent suivant leurs directions, des vitesses qui sont dans le rapport constant de la longueur à la hauteur du plan incliné* (*Liv.* I. 110. 127.). La pesanteur absolue donne aux corps qui tombent suivant la direction naturelle des degrez égaux de vitesse en des tems égaux ; donc la pesanteur relative donne aussi au corps qui descend par

un plan incliné des degrez égaux de viteſſe en tems égaux, & les degrez de viteſſe produits par la peſanteur abſolue, ſont aux degrez de viteſſe produits par la peſanteur relative comme la longueur du plan eſt à la hauteur.

177. On peut conclure ici une ſeconde fois que le mouvement d'un corps qui deſcend librement par un plan incliné, eſt uniformément accéleré, & que lorſqu'il remonte le plan, ſa viteſſe eſt uniformément retardée. C'eſt pourquoi on peut encore conclure que tout ce qui a été dit du mouvement des corps peſans mûs ſuivant la direction verticale, eſt vrai à l'égard des corps peſans qui ſont mûs ſur des plans inclinez.

178. Si on ſuppoſe que deux corps C, K ſe meuvent, l'un ſçavoir C ſuivant la direction naturelle des corps peſans, & l'autre K ſuivant le plan incliné DA, que de l'angle droit B on abFig. 26. baiſſe une perpendiculaire ſur le plan incliné AD; *Je dis que dans le tems que le corps* C *parcourra la hauteur* DB *par un mouvement uniformément accéleré, le corps* K *parcourra ſur le plan incliné, l'eſpace* DG *compris entre le ſommet* D *& la perpendiculaire* BG, *pareillement d'un mouvement uniformément accéleré.*

Il eſt évident que le mouvement de l'un & de l'autre corps eſt uniformément accéleré, s'il ne ſe trouve aucun obſtacle comme on ſuppoſe. Les eſpaces que deux forces conſtantes font parcourir en même-tems ſont dans la raiſon de ces forces (*Liv.* I. 128.). Il faut donc faire voir que DB & DG ſont dans le rapport des peſanteurs abſolue & relative, c'eſt-à-dire, que ces lignes ſont dans la raiſon de la longueur AD du plan à la hauteur DB, puiſque les peſanteurs abſolue & relative ſont dans ce rapport (174) : or les triangles ſemblables ADB, DBG donnent AD . DB :: DB . DG; donc tandis que le corps C parcourra DB par la peſanteur abſolue, le corp K parcourra DG ſur le plan incliné.

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

179. *Le tems de la deſcente par le plan incliné* DA *eſt au tems de la deſcente perpendiculaire* DB, *comme la longueur du plan eſt à la hauteur.*

Fig. 26. DEMONSTRATION. On vient de voir que le tems de la deſcente par DG ſur le plan incliné, eſt égal au tems de la chûte perpendiculaire DB; il reſte donc à démontrer que le tems par DA eſt au tems par DG comme la longueur DA eſt à la hauteur

DB. On a DA. DB :: DB. DG (37. *Géom.*); donc DA. DB :: DA. DG (26. *Arit.*) ou DA . DG :: $\overline{DA}^2$. $\overline{DB}^2$; donc $\sqrt{DA}$. $\sqrt{DG}$ :: DA . DB (24. *Arit.*) : mais les tems par DA, DG ſont entr'eux comme les racines quarrées de DA, DG (169. *n.* 4); donc les tems des deſcentes par DA, DG ſont comme DA, DB, & par conſéquent les tems par DA & DB ſont entr'eux comme ces lignes, c'eſt-à-dire, comme la longueur du plan incliné eſt à la hauteur.

On peut faire voir en nombres la vérité de cette propoſition. Suppoſons que la longueur DA du plan incliné ſoit triple de la hauteur DB ; la partie DG ne ſera que la neuviéme partie de la longueur DA, car DA étant triple de DB, DB eſt triple de DG (37. *Géom.*) : ainſi DG n'eſt que le tiers du tiers, & par conſéquent la neuviéme partie de DA ; donc tandis que le corps deſcendroit de la hauteur perpendiculaire DB, il parcourra ſur le plan incliné la neuviéme partie de ſa longueur DA (178) ; mais le tems par DG n'eſt que le tiers du tems par DA, car les tems ſont comme les racines quarrées des eſpaces parcourus 1 & 9, c'eſt-à-dire, comme 1 & 3 (169. *n* 4.); donc le tems par DB qui eſt égal au tems par DG, eſt le tiers du tems par DA ; donc de même que la longueur DA eſt triple de la hauteur DB, ainſi le tems par DA, eſt triple du tems par DB.

180. *Les tems des deſcentes par* DA, DB *ſont entr'eux réciproquement comme les peſanteurs qui font parcourir, ces eſpaces.* Car les tems par DA, DB, ſont comme ces eſpaces (179), & les forces ou les peſanteurs qui les font parcourir, ſont entr'elles comme comme DB & DA (174) ; donc les tems par DA & DB, ſont entr'eux réciproquement comme les peſanteurs qui font parcourir ces eſpaces.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

181. *La viteſſe qu'un corps acquiert en deſcendant par un mouvement uniformément accéleré du ſommet* D *au bas du plan, eſt égale à celle qu'il acquerroit en tombant perpendiculairement d'une hauteur égale à celle du plan incliné par un mouvement pareillement uniformément accéleré.*

DEMONSTRATION. Si la peſanteur abſolue & la peſanteur rélative agiſſoient ſur un corps pendant des tems égaux, le mobile recevroit des viteſſes qui ſeroient entr'elles comme les forces qui lui ſeroient appliquées, c'eſt-à-dire dans la raiſon de la peſanteur abſolue à la peſanteur relative (*Liv.* I. 110. 127.) ; mais ſi le tems pendant lequel la peſanteur Fig. 16.

relative agit, eſt d'autant plus grand qu'elle eſt plus petite, il eſt viſible que la viteſſe qu'elle donnera au mobile ſera égale à celle que le même mobile reçoit de la peſanteur abſolue : or le tems de la deſcente par le plan incliné DA eſt d'autant plus long, que la peſanteur relative eſt plus petite, puiſque les tems par DA & par la hauteur DB ſont entr'eux réciproquement comme les forces qui agiſſent ſuivant DA & DB ; donc la longueur du tems ſuppléant à la foibleſſe de la peſanteur relative, elle aura communiqué au mobile lorſqu'il ſera deſcendu au bas du plan incliné, une viteſſe égale à celle que le même mobile acquerroit par la chûte verticale DB.

On peut auſſi ſe ſervir des nombres pour faire voir la vérité de cette propoſition. Si l'on ſuppoſe comme auparavant que la longueur du plan incliné eſt triple de la hauteur, la peſanteur relative ne ſera que le tiers de la peſanteur abſolue ; mais le tems de la deſcente par DA ſera triple du tems de la chûte verticale DB : ainſi le corps qui deſcend par le plan incliné DA eſt pouſſé par une force qui eſt trois fois plus petite que la peſanteur abſolue ; mais d'un autre côté elle agit pendant un tems triple ; donc la viteſſe qui acquiſe en tems égal, n'auroit été que le tiers de la viteſſe que donne la peſanteur abſolue, ſera triple de ce qu'elle eût été, & par conſéquent égale à la viteſſe acquiſe par l'effort de la peſanteur abſolue dans la chûte DB.

On peut dire encore que la viteſſe acquiſe au point G n'eſt que le tiers de la viteſſe acquiſe par la chûte DB ; mais le tems par DA eſt triple du tems par DG ; donc la viteſſe acquiſe par DA eſt triple de la viteſſe acquiſe par DG, & par conſéquent égale à la viteſſe acquiſe par DB.

182. *Si un corps deſcend par pluſieurs plans inclinez qui ont la même hauteur, il acquerra par tous ces plans la même viteſſe, ſçavoir celle qu'il acquerroit en tombant librement par la hauteur commune des plans inclinez.*

183. *Si un corps deſcend par pluſieurs plans inclinez qui aient une même hauteur, les tems par ces differens plans inclinez, ſont entr'eux comme les longueurs des mêmes plans.*

Fig. 27. Si l'on nomme (T) le tems de la chûte perpendiculaire DB. (*t*) le tems de la deſcente par DA : (*T*) le tems de la deſcente par DR, on aura les proportions.

T . *t* :: DB . DA.
T . T :: DR . DB.

Si on multiplie par ordre, & qu'on diviſe les deux premiers produits par T, & les deux derniers par DB, on aura

$T . t :: DR . DA$; c'eſt-à-dire, que les tems des deſcentes ſont comme les longueurs des plans.

184. Si pluſieurs plans inclinez ont une même hauteur DB, que de l'angle droit D on mene des perpendiculaires ſur ces plans inclinez, *les parties compriſes entre le ſommet commun* D, *& les perpendiculaires abbaiſſées ſeront parcourues en même-tems.* Car elles ſeront parcourues dans un tems égal au tems de la chûte verticale DB. Fig. 28.

185. Si ſur la hauteur commune DB priſe pour diametre on décrit une demi-circonférence, elle paſſera par les ſommets des angles droits DCB, DGB, DIB (41. *Géom.*), & les parties DC, DG, DI ſeront cordes du cercle décrit : *d'où il ſuit qu'elles ſeront parcourues en même-tems ou en des tems égaux.*

186. *Donc ſi un corps deſcend par les cordes d'un cercle vertical tirées de l'extrêmité ſupérieure du diametre pareillement vertical, elles ſeront parcourues en des tems égaux, & ces tems ſont égaux au tems par le diametre* DB.

187. *Les cordes* BC, BG, BI, *menées de l'extrêmité inférieure du diametre vertical* DB, *ſont auſſi parcourues en des tems égaux entr'eux, & égaux au tems par le diametre* DB. Car on peut concevoir d'autres cordes tirées du point ſupérieur D, telles que DF, DN qui ſoient égales aux cordes BC, BG, &c. & qui aient la même inclinaiſon, elles ſeront parcourues en des tems égaux ; donc les cordes BC, BG, BI leur étant égales & ſemblablement inclinées, ſeront auſſi parcourues en tems égaux.

188. *C'eſt pourquoi les cordes qui ſont tirées des extrêmitez du diametre vertical* DB *ſont toutes parcourues en des tems égaux, & ce tems eſt égal au tems par le diametre.*

189. Si ſur DB on prend à volonté une partie DE ſur laquelle comme diametre, on décrive un cercle qui coupe ſur les lignes DA, DR, DS, les parties DH, DL, DO, elles ſeront auſſi parcourues en tems égaux, car ce tems eſt égal au tems par DE (186) ; *donc les parties compriſes entre les deux cercles ſeront auſſi parcourues en des tems égaux, ſi le mobile après être arrivé aux points* E, O, L, H *continue de ſe mouvoir avec les viteſſes acquiſes à ces points.*

Il eſt auſſi viſible que les cordes EO, EL, EH, ſeront parcourues en des tems égaux.

190. *Les viteſſes acquiſes depuis le repos* D *par les cordes* BC, DG, DI, *ſont entr'elles comme ces cordes.* Les tems par ces cor-

des ſont égaux (178); donc les viteſſes acquiſes ſont comme les peſanteurs relatives. Or les peſanteurs relatives ſont dans la raiſon des cordes. Car la peſanteur abſolue eſt à la peſanteur relative ſuivant DA, comme DA eſt à DB (174), ou comme DB eſt à DC; de même la peſanteur relative ſuivant DG, eſt à la peſanteur abſolue, comme DG eſt à DB. En ſorte que ſi on nomme (P) la peſanteur abſolue ſuivant DB, (R) la peſanteur relative ſuivant DC, (r) la peſanteur relative ſuivant DG, on aura

$P . R :: DB . DC.$
$r . P :: DG . DB.$

Si on multiplie par ordre les termes de ces proportions, & qu'on diviſe les deux premiers par P, qui exprime la peſanteur abſolue, & les deux derniers par DB, on trouvera que les peſanteurs relatives ſuivant les cordes DC, DG, ſont comme ces cordes; d'ailleurs les cordes DC, DG ſont parcourues en des tems égaux; donc les peſanteurs relatives qui ſont dans le rapport conſtant de ces cordes, produiſent des viteſſes qui ſont comme DC, DG (*Liv.* I. 110. 127.); donc les viteſſes acquiſes aux points C, G ſont comme les cordes.

191. On fera voir de la même maniere que les viteſſes acquiſes par les cordes CB, GB, IB, ſont dans la raiſon de ces cordes: non-ſeulement les viteſſes acquiſes au bas des cordes ſont entr'elles dans la raiſon des cordes, mais encore les viteſſes inſtantanées que le mobile reçoit en les parcourant; car les peſanteurs relatives qui produiſent ces viteſſes inſtantanées, ſont dans la raiſon des cordes.

Ce qui eſt vrai par rapport aux cordes du cercle BCD, l'eſt auſſi à l'égard des cordes tirées dans le cercle EHD des extrêmitez E, D du diametre vertical ED, puiſque ces dernieres cordes ſont ſituées ſemblablement aux premieres.

Fig. 28. 192. *Les viteſſes acquiſes au bas de deux cordes d'arcs ſemblables & ſemblablement ſituez, ſont en raiſon ſous-doublées des diametres des cercles.* Ainſi les viteſſes acquiſes aux points H, C extrêmitez des cordes DH, DC des arcs ſemblables DH, DC, ſont en raiſon ſous-doublée des diametres DE, DB. Car les viteſſes acquiſes aux points H, C, ſont en raiſon ſous-doublée de DH à DC (169 *n.* 4.): or DH & DC ſont entr'elles comme les diametres DE, DB; donc la raiſon ſous-doublée des diametres eſt égale à la raiſon ſous-doublée des cordes; donc les viteſſes acquiſes au bas des cordes DH, DC aux points H, C, ſont en raiſon ſous-doublée des diametres DE, DB.

DU MOUVEMENT DES CORPS PESANS sur plusieurs plans contigus & differemment inclinez.

193. Lorsqu'un corps pesant parcourt de suite plusieurs plans inclinez contigus les uns aux autres, il est obligé de changer sa direction à la rencontre de chaque nouveau plan : or il ne sçauroit se détourner ainsi, qu'il ne choque le nouveau plan, & qu'il ne perde de son mouvement comme on verra dans le troisiéme Livre. Quoiqu'on n'ait pas encore posé les loix du choc, on apperçoit néanmoins à l'aide des principes établis dans le premier Livre, que plus le choc est direct plus le corps qui le choque perd de sa viteſſe ou de son mouvement : on voit aussi que la perte est d'autant moindre que le choc est oblique : or la direction du mobile peut être si oblique à l'égard du plan ou de la surface choquée que le coup ou l'impression faite sur le plan soit insensible. C'est-là ce qui arrive lorsqu'un corps parcourt la circonférence d'un cercle ou une autre courbe ; les côtez de la courbe qu'on peut regarder comme autant de plans contigus les uns aux autres, font entr'eux des angles de part & d'autres, sçavoir celui qui est intérieur si grand & l'extérieur si petit, que ces côtez deux à deux sont sensiblement sur une ligne droite, l'effet du choc doit donc être insensible lorsque le mobile quitte un côté de la courbe pour passer sur un autre. Cependant quelque petit que soit le choc, il s'en fait un, & le corps choquant doit y perdre quelque partie de sa viteſſe, d'où il suivroit qu'après un certain tems le mobile auroit perdu toute sa viteſſe, & qu'il s'arrêteroit enfin. Or on démontre qu'un pendule une fois mis en mouvement, ne doit point s'arrêter, & qu'il doit retracer sans fin l'arc qu'il a décrit dans la premiere vibration, ce qui ne dévroit pas arriver, s'il est vrai qu'un corps qui décrit une ligne courbe, perde à chaque changement de côté quelque petite partie de sa viteſſe. Pour ne rien laisser qui puisse jetter quelque incertitude sur le mouvement perpétuel du pendule, on va examiner quelle est la partie de la viteſſe perdue par un mobile, lorsque décrivant une courbe il est obligé de changer de direction. On examinera aussi le nombre de fois qu'il faudroit qu'il décrivît la courbe pour perdre toute sa viteſſe.

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.

194. *Si un corps commence à décrire la circonférence d'un cercle avec une viteſſe déterminée, exprimée, par exemple, par le rayon* CB, *la viteſſe qu'il perd à chaque changement de côté ou de direction eſt telle, qu'il pourra décrire cette circonférence une infinité de fois avant que d'avoir perdu toute ſa viteſſe.*

Fig. 29. DEMONSTRATION. Suppoſons que le mobile eſt au point E, & qu'il eſt prêt de décrire le petit côté EB, lorſqu'il ſera arrivé au point B où le nouveau côté BF coupe le côté BE, il ſera contraint de changer de direction, il perdra par conſéquent un peu de ſa viteſſe. Soit prolongé le petit côté BE vers L, de même que le petit côté FB vers M, & après avoir pris BL=CB, ſoit menée du point L, LN parallele à CB, par-là on formera le triangle LBN égal & ſemblable au triangle BCE, car l'angle BLN eſt égal à ſon alterne CBE (29. *Géom.*), l'angle FBE & l'angle BCE valent deux droits (31. *Géom.*) : pareillement l'angle FBE & l'angle LBN pris enſemble valent deux droits (30. *Géom.*) : ôtez de part & d'autre FBE, il reſte l'angle LBN égal à l'angle C, les deux triangles LBN, BCE qui ont les côtez BL, BC égaux, & les angles ſur ces côtez égaux auſſi égaux ſont donc égaux & ſemblables (22. *Géom.*) ; donc LN=BE. Soit encore menée LO qui faſſe l'angle LON égal à l'angle BLN, & la perpendiculaire LM. Le triangle OLN eſt ſemblable au triangle LBN, puiſque ces deux triangles ont deux angles égaux ; donc les trois triangles BCE, CBN, OLN, ſont iſoceles & ſemblables. Cela poſé, lorſque le corps eſt au point B où les côtez EB, BF ſe rencontrent, ſon mouvement ſe décompoſe en deux efforts, l'un ſuivant la perpendiculaire au plan, l'autre ſuivant la parallele au même plan d'incidence FBMN (*Liv.* I. 179.), la viteſſe du corps étant exprimée par CB ou CE, elle le ſera auſſi par BL ſon égale ; & ſi on conſidere cette ligne comme la diagonale d'un rectangle qui auroit pour côtez BM & LM, la force perpendiculaire avec laquelle le corps choque le plan, eſt exprimée LM, & la force parallele par BM ; donc MN eſt la viteſſe que le corps perd en choquant le plan FBMN ou le côté FB, car BN=BL ; donc ſi de BL ou BN qui exprime la viteſſe du corps au point E ou B, on retranche la viteſſe reſtante qui eſt BM, MN ſera la partie perdue de la viteſſe primitive. Il eſt évident que ſi la force du choc ou la viteſſe perpendiculaire étoit exprimée par LN ou LO, & que la viteſſe reſtante après la décompoſition du mouvement fût exprimée par BO, la viteſſe perdue

due ſeroit exprimée par ON plus grande que MN. N'importe, ſuppoſons que la viteſſe perpendiculaire par laquelle le corps choque le plan FBMN, eſt exprimée par LN ou LO, & que ON eſt la partie dont la viteſſe primitive BL eſt diminuée ; à cauſe des triangles ſemblables LBN, OLN, l'on a BL . LN :: LN . NO, c'eſt-à-dire, la viteſſe primitive eſt à la viteſſe perpendiculaire par laquelle le corps choque le plan, comme cette même viteſſe perpendiculaire eſt à la viteſſe perdue dans le choc : or la viteſſe BL eſt infiniment grande par rapport à la viteſſe LN, puiſque le côté LN ou ſon égal BE eſt infiniment petit par rapport à CB, & que d'ailleurs BC ou BL exprime la viteſſe primitive & LN la viteſſe avec laquelle le corps choque le plan; donc la viteſſe LN eſt auſſi infiniment grande par rapport à NO partie perdue de la viteſſe primitive: mais puiſque la viteſſe LN eſt infiniment grande par rapport à la viteſſe NO que le corps perd en choquant un ſeul côté, il s'enſuit qu'il pourra choquer une infinité de fois, c'eſt-à-dire, achever un tour ſur le polygone infinitaire FBE, &c. avant que d'avoir perdu toute la viteſſe LN ; donc pareillement puiſque la viteſſe BL eſt infiniment grande par rapport à la viteſſe LN, il s'enſuit que le corps pourra faire une infinité de tours ſur le même polygone avant que d'avoir perdu la viteſſe primitive BL. Ce qu'il falloit démontrer.

195. On peut donc ſuppoſer qu'un corps qui décrit une ligne courbe conſerve toute ſa viteſſe, lorſque la courbure eſt la ſeule cauſe qui puiſſe la diminuer, puiſqu'il faudroit que le corps la décrivît une infinité de fois avant que d'avoir perdu la viteſſe initiale avec laquelle il commence à la décrire.

PROPOSITION VINGT-DEUXIE'ME.

196. *Si un corps qui deſcend par pluſieurs plans inclinez & contigus les uns aux autres ; tels que* AB, BC, CD, DE *qui faſſent entr'eux des angles infiniment grands, la viteſſe qu'il aura acquiſe au bas de ces plans, eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe par la chûte verticale* HK. Fig. 30.

DEMONSTRATION. Soient prolongez les plans juſqu'à ce qu'ils rencontrent l'horizontale AH aux points G, F, H. On ſuppoſe que les angles intérieurs B, C, D, &c. formez par ces plans, ſont infiniment grands, & les angles extérieurs infiniment petits. Cela poſé, la viteſſe acquiſe par le plan incliné AB eſt égale à la viteſſe acquiſe par le plan incliné GB (182.), pareillement la viteſſe acquiſe par le plan incliné GC eſt la même que la viteſſe acquiſe par le plan incliné FC ; donc la viteſſe

acquiſe par les plans inclinez AB, BC, eſt égale à la viteſſe acquiſe par le plan FC, la viteſſe acquiſe par le plan FD eſt égale à la viteſſe acquiſe par le plan HD; donc la viteſſe acquiſes par les plans AB, BC, CD eſt égale à la viteſſe acquiſe par HD, la viteſſe acquiſe par le plan HDE eſt égale à la viteſſe acquiſe par la chûte verticale HK (181); donc la viteſſe acquiſe par les plans AB, BC, CD, DE, eſt égale à la viteſſe acquiſe par la chûte verticale HK.

Fig. 31. 197. Si un corps deſcend par l'arc AB d'une courbe, il aura acquis la même viteſſe que s'il étoit tombé de la hauteur perpendiculaire AD.

198. *Si un corps après être deſcendu par une ſuite de plans inclinez & contigus les uns aux autres, eſt repouſſé vers le ſommet avec la viteſſe acquiſe au bas de tous ces plans, de maniere qu'il ſoit mû ſur les plans parcourus dans la deſcente, il arrivera au haut de tous ces plans.*

Fig. 30. Lorſque le corps aura remonté par le plan incliné ED, il lui reſtera une viteſſe par laquelle il pourroit remonter juſqu'au point H (169.*n.*4) la viteſſe reſtante étant égale à celle qu'il auroit acquiſe par HD ou FD (182), il pourroit remonter juſqu'en F; donc lorſqu'il aura parcouru le plan DC par la viteſſe reſtante, il pourroit remonter en G, car les viteſſes acquiſes par FC & GC ſont égales (182); donc lorſqu'il aura parcouru le plan CB, par la viteſſe reſtante, il pourra remonter en A, car la viteſſe reſtante eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe par le plan incliné AB; & lorſqu'il ſera arrivé en A, il aura perdu toute ſa viteſſe.

Fig. 31. 199. *Si un corps après être deſcendu par l'arc* AB *par le ſeul effort de la peſanteur, commence à retracer le même arc avec la viteſſe acquiſe au bas de l'arc, il remontera au repos* A, *où étant arrivé, il aura perdu toute la viteſſe acquiſe.* Car on peut regarder l'arc AB comme compoſé d'une ſuite de plans inclinez & contigus les uns aux autres.

200. Si pluſieurs plans AB, BC, &c. contigus les uns aux autres, ſont autant inclinez qu'un pareil nombre d'autres plans Fig. 32. *ab*, *bc*; que de plus les premiers d'une part ſoient proportion- 33. nels aux ſeconds de l'autre part pris de ſuite & dans le même ordre, *on dit que les premiers ſont ſemblables aux ſeconds, & qu'ils ſont ſemblablement inclinez.*

201. *Si un corps deſcend par deux ſuites de plans ſemblables, & ſemblablement inclinez* ABC, abc, *les viteſſes acquiſes au bas de ces deux ſuites aux points* C *&* c *ſont entr'elles comme les racines quarrées des longueurs* ABC, abc.

Les viteſſes acquiſes par ces deux ſuites de plans inclinez, ſont égales aux viteſſes acquiſes par les chûtes verticales *DH*, *dh* (196); donc elles ſont entr'elles comme les racines quarrées de *DH*, *dh*, les longueurs *ABC*, *abc* étant ſemblables, & ſemblablement inclinées, ſont entr'elles comme les hauteurs *DH*, *dh*; donc les racines quarrées des longueurs *ABC*, *abc* ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs *DH*, *dh*; donc les viteſſes acquiſes en *C* & *c* par les longueurs *ABC*, *abc*, ſont entr'elles comme les racines quarrées des mêmes longueurs.

PROPOSITION VINGT-TROISIE'ME.

202. *Les tems des deſcentes par deux ſuites de plans ſemblables & ſemblablement poſez, ſont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs de ces ſuites. Ainſi le tems de la deſcente par la ſuite* ABC, *eſt au tems de la deſcente par la ſuite* abc, *comme la racine quarrée de la longueur* ABC, *eſt à la racine de la longueur* abc.

Les tems des deſcentes par les plans *DC*, *dc* également inclinez, Fig. 32. ſont comme les racines quarrées des longueurs *DC*, *dc* ou *ABC*, 33. *abc* (169.*n*.4.) les tems des deſcentes par *DB*, *db* ſont auſſi entr'eux comme les racines quarrées de *DB*, *db* (169.*n*.4.) ou comme les racines quarrées de *ABC*, *abc* (24. *Géom.*); c'eſt-à-dire, que les tems des deſcentes par *DC* & *dc*, ſont en même raiſon que les tems des deſcentes par *DB*, *db*; donc ſi des tems par *DC* & *dc* on ôte les tems par *DB* & *db*, on aura les tems par *BC* & *bc* qui ſeront encore entr'eux dans la même raiſon des racines quarrées de *ABC* à *abc* (9. *Arit.*), (en ſuppoſant que les plans *BC* & *bc* ſont parcourus en partie par les viteſſes acquiſes aux points *D* & *d* dans les deſcentes par *DB* & *db*, & en partie par le mouvement uniformément accéleré ſuivant les mêmes plans *BC* & *bc*). Les viteſſes acquiſes par *DB* & *db*, ſont égales aux viteſſes acquiſes par *AB* & *ab*; ainſi que le corps ſoit deſcendu par *DB* & *db*, ou par *AB* & *ab*, les tems par les plans *BC* & *bc* ne different pas de ceux qu'on vient de trouver: or les tems par *AB* & *ab* ſont comme les racines quarrées des longueurs *AB* & *ab*, ou comme les racines quarrées de *ABC* & *abc*; donc les tems par *AB* & *ab*, ſont en même raiſon que les tems par *BC* & *bc*, c'eſt-à-dire, dans la raiſon des racines quarrées de *ABC*, *abc*; ſi on ajoute les tems par *AB*, *ab*, aux tems par *BC* & *bc*, leurs ſommes ſeront encore dans la même raiſon (9. *Arit.*), c'eſt-à-dire, dans la raiſon des racines quarrées des longueurs *ABC*, *abc*.

En nombres. Suppoſons que *AB* ſoit quadruple de *ab*, *BC* ſera quadruple de *bc*, & *DC* quadruple de *dc*. Cela poſé, le tems par *DC* ſera double du tems par *dc* (169. *n.* 4.) le tems par *DB* eſt auſſi double du tems par *db*; ſi des deux tems par *DC* & *dc*, on ôte les tems par *DB* & *db*, les reſtes ſçavoir les tems par *BC* & *bc*, ſeront encore comme 2 & 1 : or *BC* & *bc* ſont parcourus par les viteſſes acquiſes le long de *DB* & *db*, dans le même tems que ſi le corps étoit deſcendu par *AB* & *ab*, parce que les viteſſes acquiſes par *AB*, *ab*, ſont les mêmes que les viteſſes acquiſes par *DB*, *db* (182) ; donc ſi les tems par *AB* & *ab* ſont encore comme 2 & 1, les tems par les plans *ABC*, *abc* ſeront comme 2 & 1, c'eſt-à-dire, comme les racines quarrées des longueurs *ABC*, *abc* : or cela ſe trouve ainſi, car *AB* eſt quadruple de *ab*, & les deux plans ont la même inclinaiſon ; donc le tems par *ABC* eſt au tems par *abc* comme 2 & 1 (169. *n.* 4.) c'eſt-à-dire, comme les racines quarrées de ces longueurs.

203. *Si un corps deſcend par deux arcs ſemblables, & ſemblablement ſituez, il les parcourra en des tems qui ſont comme les racines quarrées des longueurs.* Fig. 34.

PROPOSITION VINGT-QUATRIE'ME.

204. *Si un corps deſcend par la cycloïde renverſée* AKC, *il parviendra en même-tems au bas en* C, *de quelque point* A *ou* H *ou* K *qu'il commence à deſcendre.*

Demonstration. Si de l'extrêmité inférieure C du diametre vertical CE du cercle générateur CGE, on mene tant de cordes CG, CL qu'on voudra, & par les points G, L où ces cordes coupent la circonférence du cercle, les lignes MGH, NLK paralleles à la baſe AD de la cycloïde, ou perpendiculaire au diametre EC, & qui rencontrent la cycloïde aux points H, K : que par les points H, K, on mene des tangentes à la cycloïde, elles ſont paralleles aux cordes CG, CL (4. de la cycloïde.) ; donc les petits côtez de la courbe dont les tangentes ſont les prolongemens, ſont paralleles aux cordes CG, CL ; donc ſoit qu'un corps ſe trouve au point G de la corde CG ou au point H de la cycloïde, il y recevra la même viteſſe de la peſanteur relative ; de même, ſoit que le corps ſe trouve au point L de la corde CL, ou au point K de la cycloïde, il y recevra la même viteſſe de la peſanteur relative. Or ſi le corps étoit aux points G, L ſur les cordes CG, CL, il y recevroit des viteſſes qui ſont entr'elles comme les cordes (190) ; donc étant aux Fig. 35.

points H, K, il y recevra des viteſſes qui ſont auſſi entr'elles comme les cordes GC, LC, ou comme les arcs HC, KC de la cycloïde, car ces arcs ſont chacun le double des cordes coreſpondantes GC, LC (5. de la cycloïde. *n.* 4.). On fera voir de la même maniere qu'en quelqu'autre point de la cycloïde que le corps ſe trouve, il y recevra une viteſſe qui ſera proportionnelle à la longueur de l'arc compris entre le point C & le lieu du corps; donc les viteſſes que le corps reçoit aux differens points H, K, &c. de la cycloïde, ſont entr'elles comme les longueurs des arcs HC, KC; donc s'il commence à deſcendre par le point H ou par le point K, il arrivera en même-tems au point C. Car on a fait voir que ſi un corps eſt mû ſur une ligne d'une longueur donnée par un mouvement accéleré tel que les viteſſes qu'il reçoit à chaque point de la ligne, ſoient entr'elles comme les diſtances au terme auquel il tend, il arrivera à ce terme en même-tems, à quelque endroit de la ligne que le corps commence à ſe mouvoir par le mouvement accéleré, tel qu'on le ſuppoſe ici (*Liv.* I. 135.).

PROPOSITION VINGT-CINQUIE'ME.

205. *Si un corps après être deſcendu par la demi cycloïde* AHC, *eſt mû uniformément avec la viteſſe acquiſe au bas au point* C, *il parcourra un eſpace égal à la même demi-cycloïde dans un tems qui eſt au tems de la deſcente ſur la même* AHC, *par un mouvement accéleré, comme le diametre du cercle générateur eſt à la demi-circonférence.* Fig. 35.

Demonstration. On a fait voir que ſi un corps parcourt le rayon d'un cercle par un mouvement accéleré, tel que les viteſſes qu'il reçoit, ſoient comme les diſtances au point auquel il tend, qu'enſuite il parcoure le même rayon par un mouvement uniforme avec la viteſſe acquiſe par ce rayon, le tems du mouvement uniforme eſt au tems du mouvement accéleré, comme le rayon eſt au quart de la circonférence (*Liv.* I. 136.). Cela poſé, ſi on prend CB double de EC pour le rayon d'un quart de cercle, le tems du mouvement uniforme par CB eſt au tems du mouvement accéleré par la même CB comme CB eſt au quart de la circonférence BB qui a pour rayon BC. Or le rayon BC étant quadruple du rayon du cercle générateur, ce quart de circonférence eſt quadruple de la quatriéme partie de la circonférence du cercle générateur (13. *Géom.*), ou ſi l'on veut, égale à la circonférence entiere; donc le tems du mouvement uniforme par BC, eſt au tems du mouvement accéleré comme deux diametres du cer-

cle générateur eſt à la circonférence entiere, ou comme le diametre eſt à la demi-circonférence; mais la demi cycloïde eſt égale à BC (5. de la cycloïde. *n.* 4); d'ailleurs le mouvement par cette demi cycloïde AHC eſt accéleré préciſément de la même maniere que par BC (204); donc le tems du mouvement uniforme eſt au tems du mouvement accéleré par la demi cycloïde comme le diametre du cercle générateur eſt à la demi-circonférence.

PROPOSITION VINGT-SIXIE'ME.

Fig. 35. 206. *Le tems de la deſcente par la demi-cycloïde* AHC *eſt au tems de la chûte verticale* EC *diametre du cercle générateur comme la demi-circonférence eſt au diametre.*

DEMONSTRATION. Le tems de la deſcente par AHC eſt au tems du mouvement uniforme par la même AHC parcourue avec la viteſſe acquiſe au point C, comme la demi-circonférence eſt au diametre (205). Cela poſé, la viteſſe que le corps acquiert par la demi-cycloïde AHC eſt égale à la viteſſe acquiſe par la chûte perpendiculaire EC (196); donc ſi le corps parcourt d'un mouvement uniforme la demi-cycloïde avec la viteſſe acquiſe ſur AHC au point C, ou s'il parcourt 2EC d'un mouvement pareillement uniforme avec la viteſſe acquiſe par la chûte verticale EC, le tems ſera égal de part & d'autre, puiſque les viteſſes ſont égales & les eſpaces égaux, & il eſt viſible que le tems auquel 2EC ſeroit parcourue uniformément avec la viteſſe acquiſe par EC, eſt égal au tems de la deſcente ou de la chûte verticale EC (63); donc le tems du mouvement uniforme par la demi-cycloïde AHC parcourue avec la viteſſe acquiſe par la même AHC eſt égal au tems de la chûte verticale EC; mais le tems du mouvement accéleré par la demi-cycloïde eſt au tems du mouvement uniforme par la même AHC parcourue avec la viteſſe acquiſe au point C, comme la demi-circonférence eſt au diametre (205); donc le tems de la deſcente par la demi-cycloïde eſt au tems de la chûte verticale EC, comme la demi-circonférence eſt au diametre.

207. *Le tems par la cycloïde entiere eſt au tems de la chûte verticale* EC, *comme la circonférence entiere eſt au diametre.*

Lorſque le corps eſt tombé par la demi-cycloïde AHC, il a acquis une viteſſe par laquelle il peut remonter au point A, en retraçant le même arc AHC dans un tems égal au tems de la deſcente (198); d'ailleurs l'autre demi-cycloïde que l'on peut concevoir à la gauche du diametre EC du cercle générateur eſt égale, ſemblable, & ſemblablement ſituée; donc avec la viteſſe acquiſe au

point C, le corps décrira cette autre demi-cycloïde dans un tems égal au tems de la deſcente par AHC: ſi dans la proportion du nombre précedent, on multiplie les deux antécedens par 2, on aura le tems par la cycloïde entiere, eſt au tems de la chûte verticale EC, comme la circonférence entiere eſt au diametre.

DES PENDULES.

208. *Le pendule* eſt compoſé d'un fil ou verge CD, & d'un poids P ſuſpendu à l'une des extrêmitez, l'autre étant attachée au point fixe C autour duquel le pendule peut tourner librement. Le point fixe C eſt appellé *point de ſuſpenſion*, le point E où le pendule s'arrête lorſqu'il n'eſt pas mû, eſt appellé *repos*. Si le pendule en tournant autour du point C garde la même longueur, & que la ſurface tracée par la ligne CD ſoit plane, la figure décrite eſt une portion de cercle dont le centre eſt en C; ſi la longueur CD eſt variable, qu'elle augmente ou diminue, la figure décrite ſera differente du cercle. On va d'abord expoſer les propriétez communes à tous les pendules: on parlera enſuite du pendule circulaire, & après du pendule qui décrit la cycloïde. Fig. 36.

PROPRIETEZ COMMUNES A TOUS LES PENDULES.

209. Lorſqu'un pendule eſt au point de repos E, le fil ou la verge qui ſoutient le poids eſt dans une ſituation verticale ou perpendiculaire à l'horizon. Car le poids par ſa pente naturelle tend à deſcendre ſuivant la ligne verticale; mais puiſque par la réſiſtance du fil ou de la verge, il eſt en repos au point E, il faut que cette réſiſtance ſoit directement oppoſée à la tendance du poids; donc le fil ou la verge eſt dans une ſituation verticale.

210. *Si on retire un pendule du repos* E *en lui faiſant décrire l'arc* EG *ou l'arc* EF, *qu'on l'abbandonne enſuite à lui-même, il deſcendra au repos* E. Car par ce mouvement le fil ou la verge à laquelle le poids eſt attaché, ceſſe d'être dans une ſituation verticale, & devient inclinée à la direction des corps peſans: donc la réſiſtance que la verge fera au poids P ne ſera pas directement oppoſée à la tendance du poids, le poids n'étant pas totalement ſoutenu deſcendra donc au repos E d'où il avoit été tiré. Fig. 36.

211. Lorſqu'on retire un pendule du repos E, la réſiſtance de la verge & la tendance du poids étant dirigées de maniere que les directions font un angle, des deux efforts, il en réſulte un mouvement compoſé qui détermine le poids à deſcendre par l'arc GE ou FE, comme il feroit ſur un ou pluſieurs plans inclinez & contigus.

212. *Si on retire un pendule du repos* E *en lui faiſant décrire l'arc* EG, *qu'on le laiſſe enſuite aller, après qu'il ſera deſcendu au repos* E, *qui eſt l'endroit le plus bas de l'arc* EG, *il ne s'y arrêtera pas, mais il remontera par l'arc* EF : Car lorſque le pendule ſera deſcendu à l'endroit le plus bas, il aura acquis la même viteſſe que s'il étoit tombé de la hauteur perpendiculaire GK : or le poids P étant arrivé au point E, la viteſſe acquiſe le détermineroit ſuivant la tangente KE ; mais puiſqu'il ne peut pas ſuivre cette détermination, & que d'ailleurs la réſiſtance du point fixe C ne détruit pas la viteſſe acquiſe, il s'enſuit qu'il montera par l'arc EF.

213. On appelle *vibration ſimple* l'allée par l'arc GF, ou le retour par l'arc FG ; on appelle *vibration compoſée* l'allée & le retour enſemble par l'arc GF & l'arc FG. On appelle *vibrations iſochrones* celles qui ſe font en des tems égaux.

DU PENDULE CIRCULAIRE.

Fig. 36. 214. Le pendule circulaire une fois mis en mouvement continue de même ſans jamais s'arrêter, car lorſqu'il aura décrit en deſcendant, l'arc GE, il aura acquis une viteſſe par laquelle il pourra retracer l'arc EG en remontant (198.) ; donc par la viteſſe acquiſe au point E, il décrira un arc EF égal en tout à l'arc GE ; & après avoir perdu toute ſa viteſſe, il redeſcendra par l'arc FE, & dans cette deſcente il acquerra la viteſſe qu'il avoit acquiſe en deſcendant par l'arc GE, puiſque l'arc FE eſt égal en tout & ſemblablement poſé à l'arc EG ; avec la viteſſe acquiſe une ſeconde fois au point E, il remontera par l'arc EG. D'où l'on voit que le pendule à chaque vibration remontant à une hauteur égale à celle d'où il eſt deſcendu, continuera de ſe mouvoir de même ſans jamais s'arrêter.

215. Lorſqu'on dit que le mouvement du pendule circulaire eſt perpétuel, on fait abſtraction de la réſiſtance de l'air & du frottement qui ſe fait au point de ſuſpenſion C ; ces deux cauſes enſemble font que les vibrations du pendule ſont inégales, & qu'elles n'ont pas toutes la même étendue, & que les arcs décrits dans les premieres vibrations ſont plus grands que ceux qui ſont décrits dans les dernieres. De-là vient que la viteſſe acquiſe par des arcs moindres eſt néceſſairement moindre, & qu'elle ſe ralentit peu à peu, & enfin elle s'éteint entierement. Pour concevoir comment la viteſſe que le corps acquiert au point de repos E diminue peu à peu, il faut ſuppoſer que le corps deſcend d'abord par l'arc GE, l'air lui réſiſte dans la deſcente, c'eſt

pourquoi

quoi il acquiert une viteſſe moindre que celle qu'il auroit acquiſe ſans cette réſiſtance ; donc avec cette viteſſe le corps remontera à une moindre hauteur, tant parce que la viteſſe acquiſe au point E eſt moindre, qu'à cauſe que l'air continue de réſiſter ; ainſi l'arc décrit dans la montée ſera moindre que l'arc GE ; d'où l'on voit que le mobile en redeſcendant par ce dernier arc acquerra une viteſſe moindre que celle par laquelle il l'a décrit en montant, à cauſe de la réſiſtance de l'air ; la viteſſe acquiſe au repos E, eſt donc moindre aux vibrations ſuivantes que dans celles qui précedent : c'eſt pourquoi le pendule ſe ralentit peu à peu & s'arrête enfin au repos E.

PROPOSITION VINGT-SEPTIE'ME.

216. *Si un pendule décrit dans un même cercle des arcs inégaux, lorſqu'il eſt arrivé au bas de ces arcs, il a acquis des viteſſes qui ſont entr'elles comme les cordes de ces arcs.* Ainſi le pendule étant deſcendu par les arcs DE, FE, les viteſſes acquiſes au repos E, ſont entr'elles comme les cordes ED, EF. Fig. 37.

DEMONSTRATION. Les viteſſes que le pendule acquiert en deſcendant par les arcs DE, FE, ſont celles qu'il acquerroit par les chûtes verticales IE, KE (196) : or les viteſſes acquiſes par les chûtes verticales IE, KE, ſont entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs (73.) ; donc les viteſſes acquiſes dans les deſcentes par les arcs DE, FE ſont dans la même raiſon ; mais les cordes DE, FE ſont auſſi comme les racines quarrées des hauteurs IE, KE : car les cordes ED, EF ſont moyennes proportionnelles entre le diametre du cercle & les parties EI, EK du même diametre (39. *Géom.*) ; donc ſi on nomme 2EC le diametre du cercle, on aura les proportions (16. *Arit.*). Si on multiplie par ordre

$$\overline{4EC}^2 . \overline{DE}^2 :: \overline{2EC}^2 . \overline{EI}^2$$
$$\overline{EF}^2 . \overline{4EC}^2 :: \overline{EK}^2 . \overline{2EC}^2$$

& que l'on diviſe les deux premiers termes par $\overline{4EC}^2$, & les deux derniers par $\overline{2EC}^2$, on aura $\overline{EF}^2 . \overline{DE}^2 :: \overline{EK}^2 . \overline{EI}^2$; donc $EF . DE :: \sqrt{EK} . \sqrt{EI}$ (24. *Arit.*) ; donc les viteſſes acquiſes au repos E par les arcs DE, FE, ſont entr'elles comme les cordes de ces arcs.

PROPOSITION VINGT-HUITIE'ME.

217. *Les pendules qui décrivent des arcs ſemblables font leurs vibrations en des tems qui ſont entr'eux en raiſon ſous-doublée, ou comme les racines quarrées des longueurs des mêmes pendules.* Fig. 38.

DEMONSTRATION. Les pendules ſont mûs par les arcs *ED*, *ed* comme ſur deux ſuites de plans ſemblables & ſemblablement inclinez ; donc les tems des deſcentes par les arcs *ED*, *ed*, ſont entr'eux comme les racines quarrées des mêmes arcs (202. 203.): or les tems des montées par les arcs *DF*, *df*, ſont égaux aux tems des deſcentes par les arcs *ED*, *ed* (169. 198); donc ils ſont entr'eux comme les racines quarrées de *ED*, *ed* ; donc les tems entiers des vibrations ſont entr'eux comme les racines quarrées des arcs *ED*, *ed* leſquels étant ſemblables, ſont entr'eux comme les rayons *CD*, *cd*, qui ſervent à les décrire (13. *Géom.*), ou comme les longueurs des pendules ; donc les racines quarrées des longueurs *CD*, *cd*, ſont comme les racines quarrées des arcs *ED*, *ed* ; donc les tems des vibrations ſont dans la raiſon des racines quarrées des longueurs des pendules.

Donc les quarrez des tems des vibrations, ſont entr'eux comme les longueurs.

PROPOSITION VINGT-NEUVIE'ME.

218. *Si deux pendules de longueurs inégales battent pendant le même-tems, le nombre des vibrations du premier eſt au nombre des vibrations du ſecond, comme la racine quarrée de la longueur du ſecond eſt à la racine quarrée de la longueur du premier* ; c'eſt-à-dire, que les nombres des vibrations faites en même-tems, ſont réciproquement comme les racines quarrées des longueurs.

DEMONSTRATION. Plus le tems d'une vibration eſt long, plus le nombre dans un même-tems en eſt petit. Si le tems d'une vibration eſt double ou triple, pendant le même-tems, le pendule fera deux fois, trois fois moins de vibrations, en ſorte que le nombre de vibrations du premier pendule eſt au nombre de vibrations du ſecond, comme la durée des vibrations du ſecond eſt à la durée des vibrations du premier, c'eſt-à-dire, que les tems pendant leſquels deux pendules battent étant égaux, les nombres des vibrations ſont entr'eux réciproquement comme les durées de deux vibrations en particulier ; mais les tems des deux vibrations, ſont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs des pendules (217). Donc les nombres des vibrations de deux pendules, ſont réciproquement comme les racines quarrées de ces longueurs.

219. COROLLAIRE. Les longueurs de deux pendules ſont en raiſon doublée de la réciproque des nombres de vibrations faites en même-tems.

DU PENDULE LORSQU'IL DÉCRIT LA CYCLOÏDE.

220. Il n'y a que le pendule circulaire qui conſerve la même longueur pendant tout le mouvement. Si un pendule décrit une courbe differente de la ligne circulaire, il eſt néceſſaire qu'il s'accourciſſe & qu'il s'allonge en differens tems. Les accourciſſemens & les allongemens alternatifs qu'il faut donner à la longueur d'un pendule pour lui faire décrire une courbe, doivent être reglez ſur la proprieté de la courbe même; ſi le pendule décrit une ellipſe ou une parabole, il faudra l'accourcir & l'allonger autrement que pour lui faire décrire une cycloïde. La propriété ſinguliere que M. Huygens découvrit dans le pendule qui décrit la cycloïde, rendit ce pendule recommandable dans le tems. On a vû que ſi un corps décrit une cycloïde renverſée par la ſeule action de la peſanteur, il arrive au bas en même-tems, de quelque hauteur qu'il commence à deſcendre: ainſi tous les arcs d'une même cycloïde qu'un corps parcourt en deſcendant librement ſont décrits en même-tems, les arcs grands & petits que le corps décrit en montant avec la viteſſe acquiſe au bas de la deſcente, ſont auſſi parcourus en tems égaux; d'où l'on voit que ſi l'on trouve un moyen de faire décrire à un corps la cycloïde, en le ſuſpendant à un fil ou à une verge, l'on aura un pendule qui étant mû par la ſeule action de la peſanteur, fera toutes ſes vibrations iſochrones ou d'égale durée, ſoit qu'il décrive de grands ou des petits arcs. Or M. Huygens trouva que pour faire décrire à un pendule des arcs d'une cycloïde ACE, Fig. 39. il falloit la couper en deux parties égales au ſommet C, & joindre leurs extrêmitez A, E, qui ſont ſur la baſe ABE, comme on voit en S; de maniere que le point de ſuſpenſion S du pendule étant entre les deux demi-cycloïdes, le fil SD put ſe plier ſur les deux portions SA, SE, & en imiter parfaitement la courbure: pour lors l'autre extrêmité D du fil SD étant couchée ſur le point A, ſi le fil vient à ſe développer en demeurant toujours également tendu, ſon extrêmité D décrira la demi-cycloïde AC (6. de la cycloïde.), le fil venant enſuite à ſe courber ſur la convexité de l'autre demi-cycloïde SE en demeurant toujours également tendu, décrira par la même extrêmité D l'autre moitié CE de la cycloïde. Si enfin on ſuppoſe que le point D eſt peſant, en deſcendant par l'arc AC, il acquerra une viteſſe par laquelle il montera par l'arc CE en E (198.); deſcendant après par cet arc il acquerra une viteſſe égale à celle qu'il a perdue en

montant, & par laquelle il pourra remonter par l'arc CA ; & ainſi de ſuite ſans que le pendule s'arrête jamais. Or de quelque point H ou K que le pendule commence à deſcendre, le tems par HC ou KC étant égal au tems par AC(204.); il s'enſuit que les vibrations du pendule ſeront iſochrones ou d'égale durée.

221. Il eſt viſible que la longueur SD du pendule eſt égale à la longueur SA ou AC de la demi-cycloïde, & par conſéquent égale au double du diametre AM ou EG du cercle générateur.

AVANTAGES DU PENDULE QUI DÉCRIT LA CYCLOÏDE.

222. Après que M. Huygens eut trouvé qu'un corps qui deſcend par une cycloïde renverſée arrive au bas en même-tems, de quelque hauteur qu'il commence à deſcendre, & qu'il eut découvert le moyen de faire décrire à un pendule cette courbe, il penſa à rectifier le mouvement du pendule circulaire qu'il avoit appliqué aux horloges. Le mouvement de ce pendule eſt de lui-même inégal, c'eſt-à-dire, que les vibrations n'en ſont pas iſochrones ou d'égale durée, lorſque les arcs décrits ſont inégaux, ce qui fait que le mouvement de l'horloge n'eſt pas parfaitement égal, car la régularité d'une machine dépend de ce qui en modere le mouvement. Mais ſi le pendule qui régle une horloge fait toutes ſes vibrations d'une égale durée, la régularité de ſon mouvement s'étend ſur toutes les pieces de l'horloge, & leur mouvement devient par-là égal : or le pendule qui décrit la cycloïde, a cette propriété, qu'il fait toutes ſes vibrations grandes & petites en des tems égaux, c'eſt pourquoi ce pendule parut très propre à M. Huygens pour régler le mouvement des horloges. Il faut cependant convenir que l'exécution n'a pas tout-à-fait répondu aux vûes de l'inventeur, l'expérience ayant fait découvrir de plus grands défauts dans le pendule qui décrit la cycloïde que dans le pendule circulaire (on aura occaſion de remarquer quelques-uns de ces défauts dans le ſecond traité en parlant des horloges,) ce qui fait qu'on eſt revenu au pendule circulaire, & qu'il eſt le ſeul qui ſoit communément en uſage.

223. Si le pendule qui décrit la cycloïde n'a pas ſervi immédiatement & par lui-même à la pratique, on ne peut pas dire qu'il y ſoit inutile. 1°. On peut s'en ſervir comme de principe pour faire voir que le pendule circulaire a à peu de choſe près, le même avantage ſans en avoir les défauts ; c'eſt-à-dire, qu'un pendule circulaire qui décrit des arcs inégaux les décrit en des

tems égaux, ou ce qui revient au même, ſes vibrations ſont ſenſiblement iſochrones, pourvu que les arcs décrits ne ſoient pas grands lorſqu'ils ſont inégaux.

Car on peut appercevoir que les deux demi-cycloïdes AS, ES, ſont au point de ſuſpenſion S un angle, & que leur courbure en cet endroit eſt peu ſenſible, parce qu'elles y ſont continuées preſque en lignes droites à cauſe que le diametre EG & les cordes telles que EF qui ont ſervi à former cette courbure & auxquelles les petits côtez de la courbure ſont paralleles, ſont peu inclinez à la baſe GSM; de-là vient que le pendule peut s'écarter de part & d'autre du perpendicule SC ſans qu'on s'appercoive de ſon raccourciſſement; en ſorte que l'arc de cycloïde auprès du repos C ne differe pas ſenſiblement d'un arc circulaire qui ſeroit décrit avec un rayon de même longueur que SC. On peut donc regarder un pendule circulaire qui décrit des petits arcs comme un pendule qui décriroit des petits arcs de cycloïde: or un tel pendule feroit ſes vibrations quoiqu'inégales en étendue, égales en durée; donc le pendule circulaire qui décrit des arcs inégaux doit les décrire de même en des tems égaux, quoiqu'ils ſoient inégaux. Fig. 39.

224. Il y a des auteurs qui apportent pour preuve de cette propoſition, que les arcs lorſqu'ils ſont petits, ne different pas ſenſiblement de leurs cordes, & qu'on peut prendre indifferemment l'un pour l'autre; or on ſçait que les tems par les cordes d'un même cercle ſont égaux; donc les tems par leurs arcs ſont auſſi égaux lorſque ces arcs ſont petits.

225. Cette maniere de prouver eſt défectueuſe: car *quelque petit que ſoit un arc, le tems par cet arc eſt plus court que le tems par la corde du même arc.* Concevons que le pendule SC ſans s'accourcir décrive un petit arc de cercle qui ſe termine au repos C qui eſt le point le plus bas, qu'il y décrive auſſi un petit arc de cycloïde, ces deux arcs ſe confondront ſenſiblement (ainſi qu'on a remarqué & qu'on en convient) & plus ſenſiblement qu'un petit arc de cercle ne fait avec ſa corde; donc le tems par les deux arcs doit être égal. Or le tems par l'arc de la cycloïde eſt au tems par GE diametre du cercle générateur, comme la demi-circonférence eſt au diametre (206.204). Si on double le ſecond & le quatriéme terme de la proportion, on aura le tems par l'arc eſt au double du tems par GE comme la demi-circonférence eſt à deux diametres, ou comme le quart de la circonférence eſt au diametre: mais le double du tems par GE eſt égal au tems de la deſcente par le quadruple de GE (70); donc le tems par l'arc Fig. 39.

de cycloïde eſt au tems par le quadruple de GE comme le quart de la circonférence eſt au diametre ; de plus le tems par la corde du petit arc décrit eſt égal au tems par le quadruple de GE ou par le double de CS (186.) ; donc le tems par l'arc eſt au tems par la corde, comme le quart de la circonférence eſt au diametre ; c'eſt-à-dire, que le tems par le petit arc de cercle ou de cycloïde, eſt plus court que le tems par la corde du même arc, puiſque le quart de la circonférence eſt moindre que le diametre.

226. Il eſt bien vrai qu'un petit arc ne differe gueres de ſa corde, & que lorſqu'il ne s'agit que de leur grandeur, on peut prendre indifferemment l'un pour l'autre ; mais il n'en eſt pas de même lorſqu'il faut conſiderer le tems qu'un corps eſt à les parcourir par l'action de la peſanteur ; car la pente par l'arc eſt bien differente de la pente par la corde, & leur ſituation n'eſt pas certainement la même, c'eſt pourquoi de la ſeule égalité en longueur on n'en peut pas conclure l'égalité des tems.

227. 2°. M. Huygens s'eſt ſervi du pendule à cycloïde pour prouver que les corps peſans qui tombent librement dans l'air, parcourent pendant la premiere ſeconde de leur chûte 15 pieds 1 pouce.

Un pendule à ſecondes a (comme on ſçait) 3 pieds de Roy 8 lignes $\frac{1}{2}$, ce pendule décriroit une cycloïde dont l'axe ou le diametre de ſon cercle générateur auroit la moitié de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire 18 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$, (car la longueur du pendule à cycloïde eſt double du diametre du cercle générateur (221). Cela poſé, le tems de la chûte perpendiculaire par l'axe de la cycloïde ou par le diametre du cercle générateur eſt au tems par un arc de la cycloïde comme le diametre eſt à la demi-circonférence (206) : ſi on double le tems par l'arc, afin d'avoir le tems d'une vibration, & la demi-circonférence qui ſont le ſecond & le quatriéme terme de la propoſition, on aura le tems de la deſcente par le diametre du cercle générateur eſt au tems d'une vibration, comme le diametre eſt à la circonférence. Si on ſuppoſe que la circonférence eſt au diametre comme 355 eſt à 113 dans la proportion que l'on vient de faire, l'on a trois termes qui ſont connus, la circonférence, le diametre, & le tems d'une vibration qui eſt une ſeconde ou 60 tierces ; donc le tems de la deſcente par le diametre du cercle générateur pourra être connu en diſant 355. 113 :: 60 tierces. x = 19 tierces. $\frac{7}{71}$: ce quatriéme terme eſt le tems de la deſcente par l'axe de la cycloïde ou par le diametre du cercle générateur ; ce tems étant ainſi connu, il ne s'agit plus que de trouver l'eſpace qu'un corps parcourt en tous

bant librement pendant une ſeconde. Par la proportion qu'on vient de faire on connoît le tems de la deſcente par le diametre du cercle générateur, on ſçait que ce diametre eſt de 18 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$; c'eſt pourquoi ſi on dit le quarré de 19 tierces. $\frac{7}{71}$ eſt au quarré de 60 tierces. ou d'une ſeconde : ainſi 18 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$ eſt à un quatriéme terme, on aura l'eſpace que parcourt un corps qui tombe librement pendant la premiere ſeconde de la chûte (70), & l'opération faite, on trouve 15 pieds 1 pouce. Dans l'opération au lieu de $\frac{7}{71}$, on peut prendre $\frac{1}{10}$.

228. M. Huygens voulut éprouver ſi l'expérience lui donneroit la même quantité que le calcul : celle qu'il fit & qu'il répeta exactement pluſieurs fois, lui fit connoître que ſon raiſonnement & le calcul étoient en cela parfaitement d'accord avec les effets de la peſanteur. Cette expérience conſiſte à faire qu'un poids attaché à une bande de papier deſcende perpendiculairement ſuivant ſa direction naturelle le long d'un mur, pendant qu'un pendule qui eſt ſuſpendu au même mur fait une demi vibration. On fera faire cette demi vibration, ſi on a ſoin d'éloigner le pendule, du mur ſuivant une direction qui ſoit perpendiculaire à ſon plan ou à ſa ſurface : car ſi on laiſſe aller le pendule, il ira choquer le mur, & dans ſon mouvement il décrira la moitié de l'arc d'une vibration, puiſqu'il ne fera que deſcendre & aller au repos ou au point le plus bas de l'arc. Or ſi le pendule eſt placé de maniere qu'en frappant le mur il rencontre la bande de papier qui eſt tirée par le poids qui deſcend, l'empreinte qu'il fera ſur cette bande, donnera à connoître l'eſpace qu'à parcouru le poids qui deſcend pendant la demi vibration. Car on fait en ſorte que le poids & le pendule partent en même-tems. Si le pendule eſt d'une longueur convenable pour faire une demi-vibration en une ſeconde, on aura l'eſpace que le poids qui tombe a parcouru pendant une ſeconde. Si le pendule fait ſes vibrations en une ſeconde, on aura l'eſpace que le poids qui deſcend a parcouru en une demi ſeconde.

Problême XI.

229. *La longueur d'un pendule étant donnée avec le tems qu'il emploie à faire ſes vibrations, trouver la longueur d'un autre pendule qui faſſe les ſiennes dans un autre tems donné, par exemple de deux ſecondes.*

On ſuppoſe qu'un pendule de 3 pieds de Roy 8 lignes $\frac{1}{2}$ bat les ſecondes. Pour trouver la longueur d'un pendule qui batte en deux ſecondes, il faut dire 1 . 4 :: 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$. x ; c'eſt-à-dire, le quarré d'une ſeconde eſt au quarré de 2 ſecondes com-

me la longueur du pendule à secondes est à la longueur cherchée qu'on trouvera être de 12 pieds 2 pouces 10 lignes. Ce qui est évident par (203).

PROBLÊME XII.

230. *Trouver dans quel tems un pendule d'une longueur donnée, par exemple d'un pied, fait ses vibrations.* 1°. Il faut réduire 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ & 1 pied en lignes, & on aura 441 lignes & 144 lignes dont les racines quarrées sont 21 & 12. 2°. Dire 21. 12 :: 60 tierces x ; c'est-à-dire, que les tems des vibrations du pendule à secondes & dont la longueur est de trois pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ & du pendule d'un pied de long, sont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs, ce qui est évident par (203) l'opération faite, on trouve 34 tierces $\frac{2}{7}$.

PROBLÊME XIII.

231. *Connoissant le nombre de vibrations d'un pendule pendant un tems donné, trouver la longueur du pendule.*

Supposons que le pendule proposé fasse 30 vibrations en une minute, il faut dire 900 . 3600 :: 441 lignes. x. C'est-à-dire, que les longueurs des pendules étant entr'elles réciproquement comme les quarrez des nombres des vibrations qu'ils font en même-tems (219), il faut que comme le quarré de 30 qui est 900 est au quarré de 60 qui est 3600 : ainsi réciproquement la longueur du pendule qui fait 60 vibrations en une minute soit à la longueur de celui qui en fait 30 dans le même-tems. Cette longueur est de 12 pieds 3 pouces, ou mieux de 12 pieds 2 pouces 10 lignes.

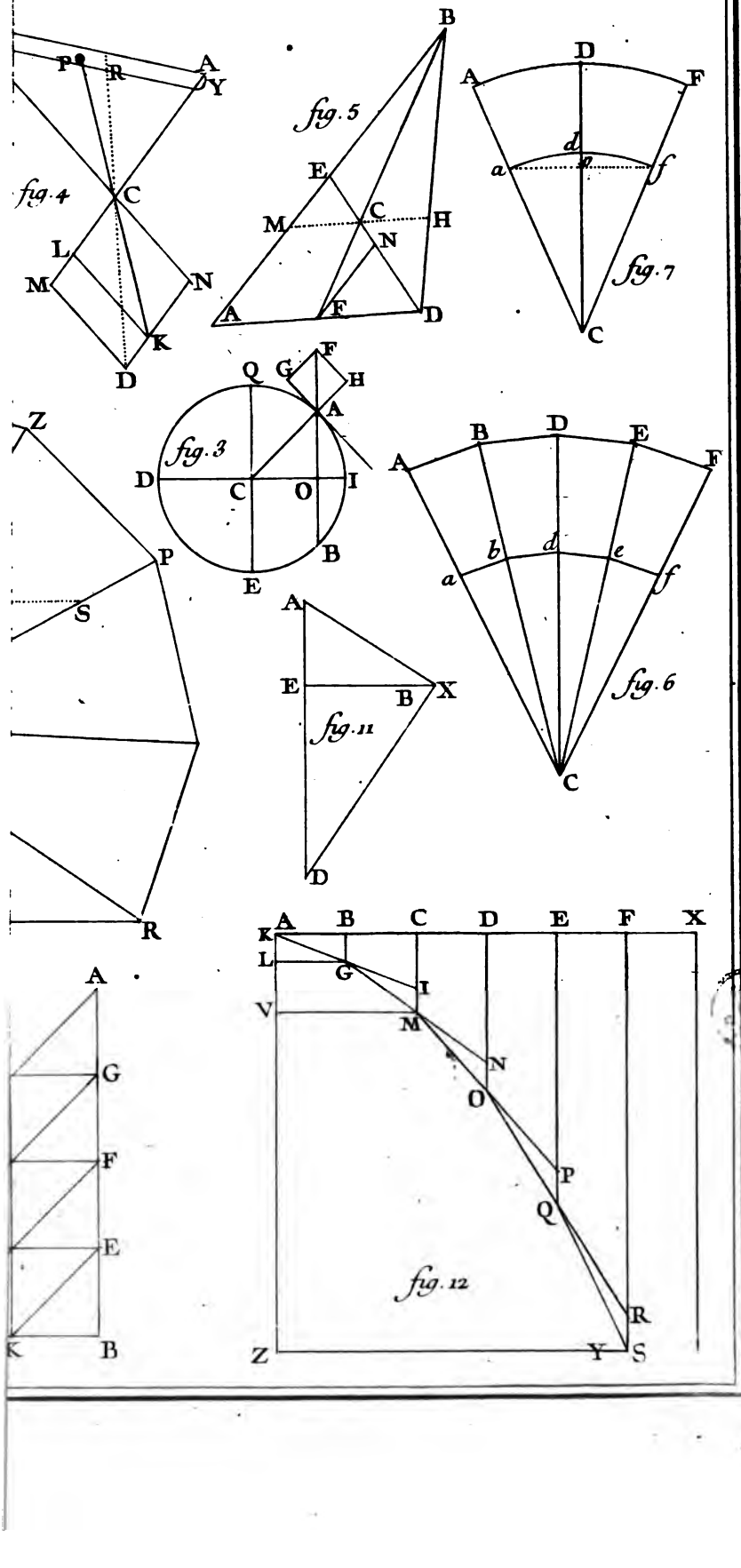
Par ce problême on peut trouver la hauteur d'un plancher ou de la voute d'une Eglise, en observant le nombre des petits balancemens ou oscillations que fait un lustre ou une lampe suspendue à la voute pendant une minute.

PROBLÊME XIV.

232. *Faire qu'un pendule en décrivant des arcs de cercle acquiere des vitesses qui soient entr'elles dans une raison donnée, dont l'une soit, par exemple, double ou triple.*

Fig. 40. Supposons que la vitesse cherchée doive être triple de la vitesse acquise par l'arc ED, il faut prendre une ligne GD triple de la corde ED, & la porter de D en G, la vitesse que le corps acquerra par l'arc GD, sera triple de la vitesse acquise par ED. Car les vitesses acquises par des arcs inégaux sont entr'elles comme les cordes de ces arcs (216).

Fin du second Livre.


P
R
A
Y
C
L
M
N
K
D
fig. 4
B
fig. 5
E
M
C
H
N
A
F
D
D
A
F
d
a
f
C
fig. 7
F
Q
G
H
A
fig. 3
D
C
O
I
B
E
Z
P
S
R
A
E
B
X
fig. 11
D
B
D
E
A
F
b
d
e
a
f
C
fig. 6
A
B
C
D
E
F
X
K
L
G
I
V
M
N
O
P
Q
R
Z
Y
S
fig. 12
A
G
F
E
K
B

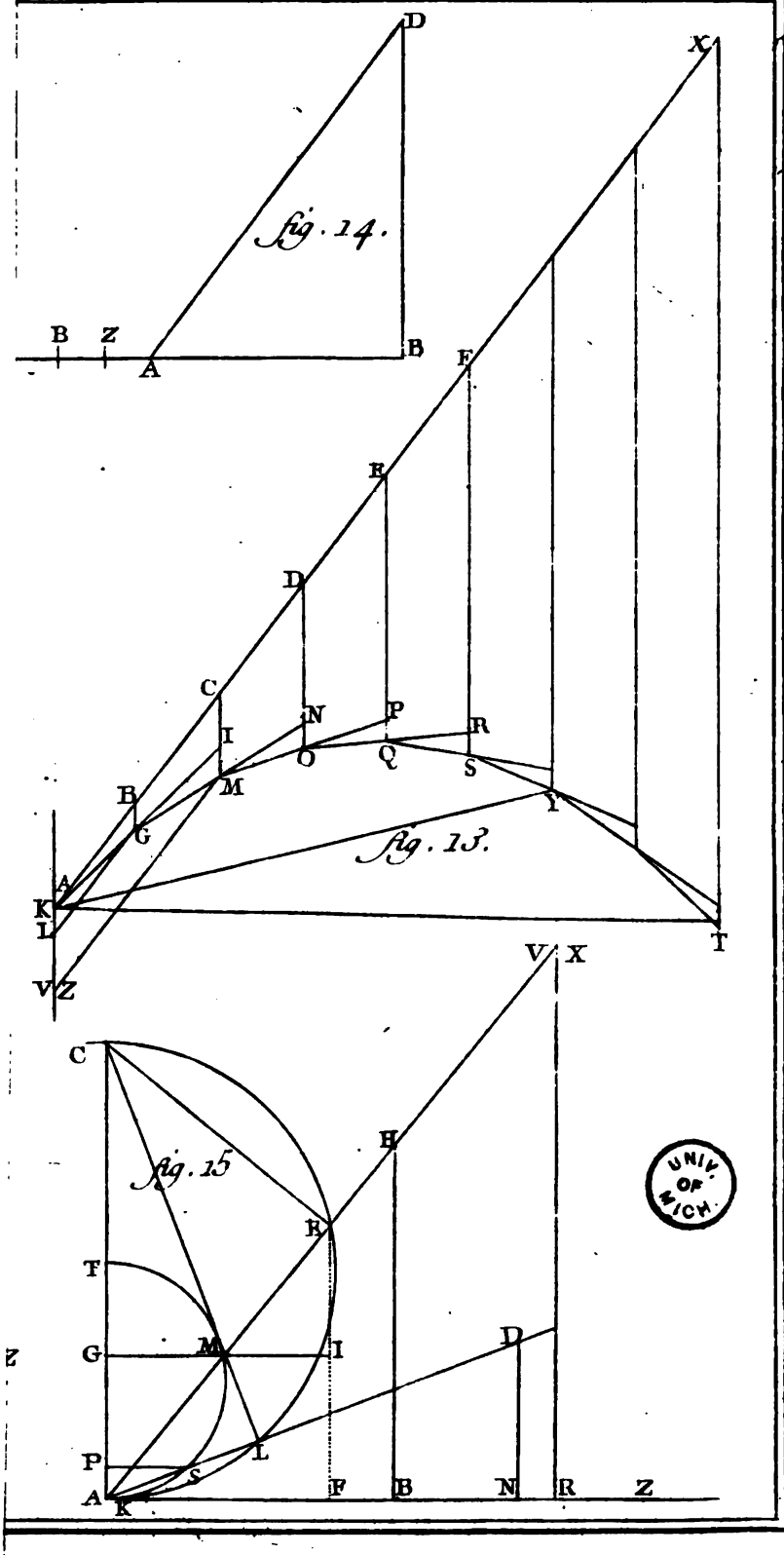
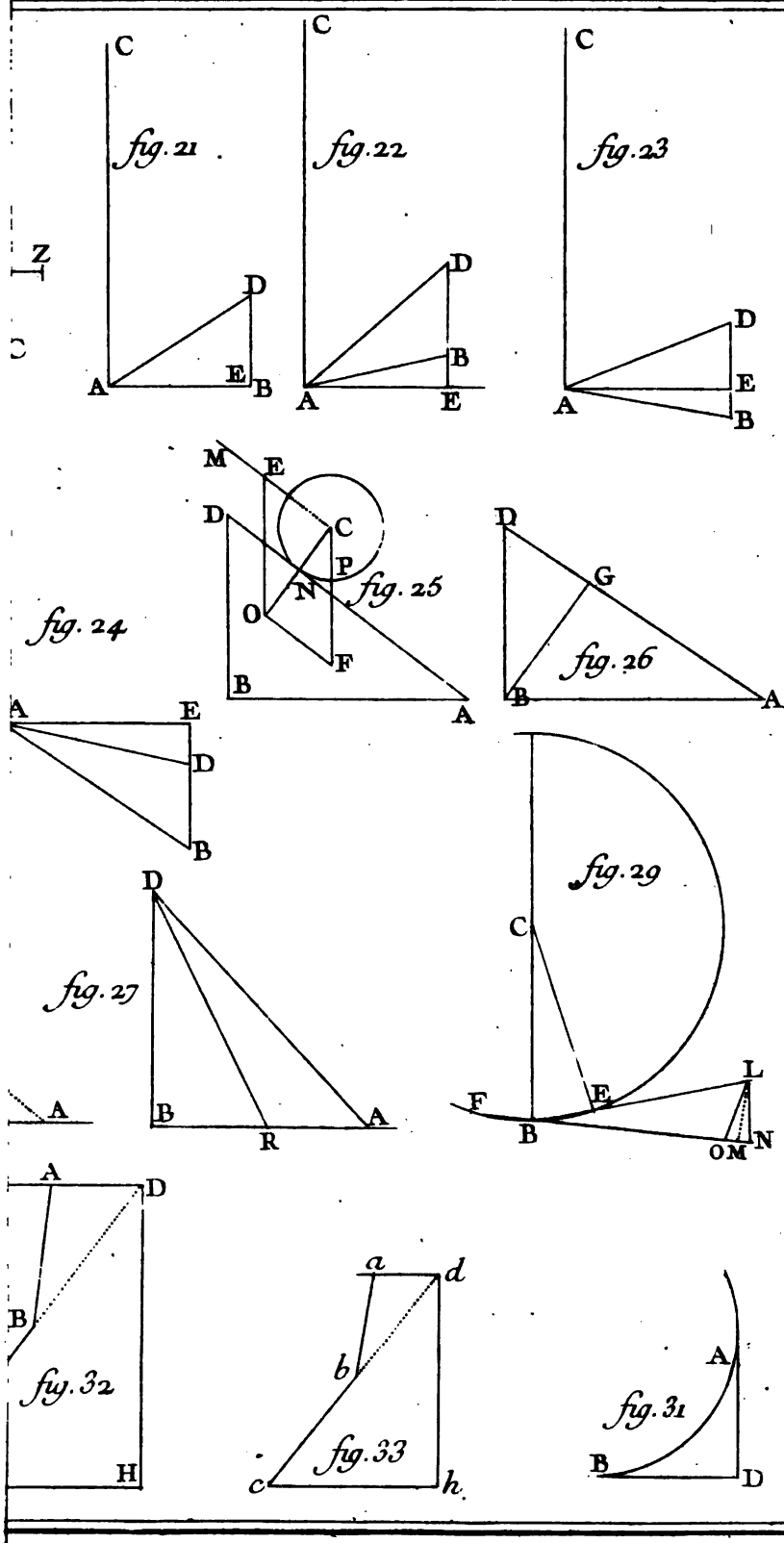


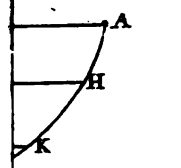
fig. 14.

fig. 13.

fig. 15

UNIV. OF MICH.


C
D
E
A
B
Z
fig. 21
fig. 22
fig. 23
M
P
N
O
F
G
fig. 24
fig. 25
fig. 26
fig. 27
fig. 29
L
R
fig. 32
fig. 33
fig. 31
a
b
c
d
h
H



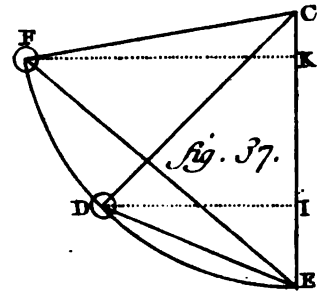
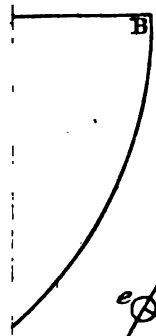


fig. 37.



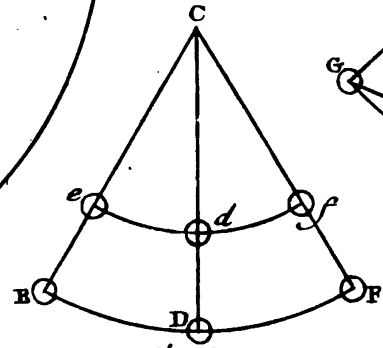


fig. 38.

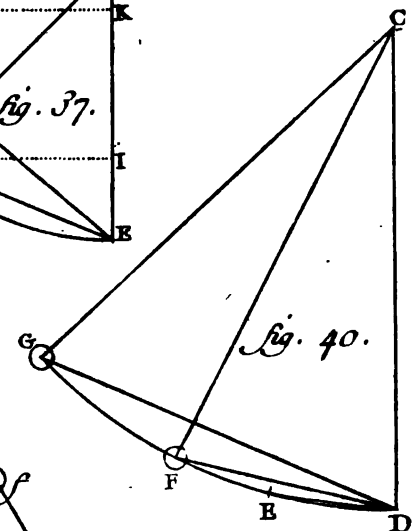
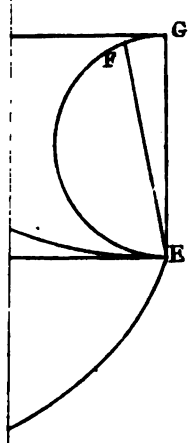


fig. 40.



PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Physique.

LIVRE TROISIE'ME.
DU CHOC OU DE LA PERCUSSION DES CORPS.

1. UN corps qui eſt mis en mouvement, qui paſſe d'un lieu en un autre lieu, peut mouvoir, & meut en effet les corps qui ſe trouvent ſur ſon paſſage. C'eſt l'expérience qui apprend cette vérité, & qui montre que le mouvement d'un corps eſt une cauſe qui produit un nouveau mouvement, ou du moins qu'un corps qui eſt mû eſt un principe d'où le mouvement ſe communique aux corps qu'il rencontre.

2. On n'entrera point ici dans l'examen des diverſes queſtions qu'on peut former ſur la cauſe efficiente, c'eſt-à-dire, qui produit vraiement le mouvement; il y en a certainement une, & on ne peut pas douter que l'auteur de la nature ne ſoit la cauſe premiere & générale de tous les mouvemens; mais de ſçavoir ſi les corps ſont de vraies cauſes, c'eſt ce qu'on n'entreprend point de diſcuter. L'expérience fait voir qu'un corps qui eſt en repos, ceſſe d'y être lorſqu'il eſt rencontré par un corps qui eſt mû; mais

que cela arrive seulement en vertu d'une loi établie, ou bien parce que dans les corps qui sont mûs, il y a une force agissante & capable de mouvoir, une force qui fasse une impression permanente & durable, qui soit elle-même une nouvelle force productrice du mouvement, c'est ce qu'on ne décide pas : les effets du choc n'en seront pas moins connus, & c'est tout ce qu'on se propose dans ce traité. La question présente est toute métaphysique, elle est du nombre de celles où la raison décide absolument : or lorsqu'on considere les corps en repos ou en mouvement, l'esprit ne découvre pas certainement avec évidence qu'il y a en eux quelque vertu ou puissance pour produire quoi que ce soit. Il paroît au contraire plus conformé à la droite raison de penser que Dieu seul produit le mouvement, & que le choc n'est que comme une occasion qui détermine cet être suprême à mouvoir les corps qui se trouvent sur le passage d'autres corps qui sont déja en mouvement.

3. Néanmoins quelque sentiment qu'on prenne sur ce point, soit qu'on avoue que les corps sont privez de toute action, soit qu'on leur attribue une vraie force ou puissance, il faut cependant reconnoître que la production du mouvement est l'effet d'une cause : or comme on est porté à croire qu'une force se trouve là où elle exerce son action, & où elle produit son effet, rien n'empêche que pour la clarté du discours, on ne considere cet force comme appliquée au corps qui choque, & comme faisant impression sur le corps choqué, laquelle demeure dans ce corps pendant tout le tems qu'il est mû ; & parce qu'un corps en mouvement lors même qu'il n'y a point de choc, est tout disposé à exercer sa force sur les corps qu'il peut rencontrer, on peut aussi considérer cette même force comme lui étant appliquée tout le tems qu'il est conservé dans le mouvement, sans qu'il soit pour cela nécessaire de sçavoir si cette force réside véritablement dans ce corps ; si elle est distinguée de l'action de la premiere cause, ou si elle n'en differe pas.

4. On divise ce troisiéme Livre en quatre Chapitres. Dans le premier on exposera les propriétez & les circonstances communes à tous les chocs ; dans le second on traitera du choc des corps sans ressort ; dans le troisiéme du choc des corps à ressort ; dans le quatriéme du choc qui produit la réflexion & la réfraction.

CHAPITRE PREMIER.

DANS LEQUEL ON EXPOSE LES PROPRIETEZ & les circonſtances communes à tous les chocs.

5. LEs corps ont des qualitez qui peuvent modifier & varier conſidérablement l'action qu'ils éxercent les uns ſur les autres. Ces qualitez ſont la dureté, la fluidité, la molleſſe, & l'élaſticité.

6. *Un corps dur* eſt celui qui ne change pas facilement de figure & qui réſiſte à l'effort qu'on fait pour le rompre & le diviſer. *Un corps fluide*, celui qui cede facilement au toucher & dont les parties ſe diviſent, & ſont mûes au moindre effort. *Les corps mous* ſont ceux qui changent facilement de figure ſans ſe rompre ou ſe diviſer, comme de la cire médiocrement échauffée.

7. *Un corps élaſtique ou à reſſort* eſt celui qui ayant changé de figure par l'action d'une force externe, ſe rétablit & reprend de lui-même ſa premiere figure lorſque la force qui le comprime, ceſſe de lui être appliquée, par exemple, un balon plein d'air.

8. *Un corps ſans reſſort* eſt celui qui ayant reçû une nouvelle figure par l'action d'une cauſe externe, la conſerve, quoique cette force ceſſe de lui être appliquée, par exemple, de la terre glaiſe imbibée d'eau.

9. REMARQUES. On remarquera 1°. que ces qualitez ne ſont pas quelque choſe d'abſolu, mais qu'elles ſont ſuſceptibles de divers degrez, puiſque les corps ſont plus ou moins durs, plus ou moins élaſtiques, plus ou moins fluides les uns que les autres. 2°. L'élaſticité eſt une qualité qui peut être commune aux corps durs, mous, & fluides; lors donc qu'on parle de corps élaſtiques ou à reſſort, & qu'on les conſidere ſous ce rapport commun, on ne diſtingue point les divers degrez de dureté, de molleſſe, ou de fluidité qui ſe trouve dans chacun, parce que l'élaſticité eſt une qualité qui compatit & s'allie indifferemment avec toutes les autres qualitez que l'on vient de nommer, quoique contraires les unes aux autres. Néanmoins comme pour l'ordinaire les corps mous ont peu ou point de reſſort, & qu'après avoir été comprimez ils conſervent la figure qu'ils ont reçûe; lorſqu'il s'agit des effets du choc où le reſſort doit influer, l'on nomme indifferemment *corps mous* tous les corps dont le reſſort n'eſt pas dans un degré aſſez ſenſible, (ce qui paroît lorſqu'après avoir été cho-

quez ou preſſez, ils ne ſe rétabliſſent pas en reprenant leur premiere figure ;) pour lors on ne diſtingue point entre les differens degrez de dureté & de molleſſe de ces corps, parce qu'étant deſtituez de reſſort, ſous ce rapport ils ſont tous compris ſous la même idée : c'eſt pourquoi en matiere de choc on peut ranger tous les corps en deux claſſes, les uns ſont appellez corps mous, ou corps ſans reſſort, & les autres corps à reſſort. 3°. Comme on ne connoît point de corps d'une dureté abſolue, on peut ſuppoſer que tous les corps dans le choc changent de figure ainſi que l'expérience montre que cela arrive : ceux qui ſont élaſtiques reprennent leur premiere figure ſi le reſſort eſt parfait ; ou ils ne la reprennent qu'en partie, ſi le reſſort eſt imparfait ; ou enfin ils conſervent celle qu'ils ont reçue, ſi le reſſort eſt inſenſible.

10. Ce changement de figure eſt ſenſible dans un grand nombre de corps ; mais les plus durs comme l'yvoire, le fer, &c. n'en ſont pas exemts ſuivant l'expérience de M. Mariotte rapportée dans ſon traité de la percuſſion, partie 1, propoſition 14. Si on enduit une enclume d'une couche légere de ſuif, qu'on y paſſe la main afin que l'enclume demeure ſeulement un peu ſalie ; qu'on laiſſe tomber ſur cet endroit de 4 pouces de haut une boule d'yvoire d'un pouce & demi de diametre, on verra ſur l'enclume une petite marque ronde d'environ une demi-ligne de diametre ; mais ſi on laiſſe tomber la boule de plus haut, la marque ſera plus large & paſſera même trois lignes de diametre ſi on pouſſe la boule avec force contre l'enclume, ce qui ne peut procéder que de ce que la boule s'applatit davantage par un grand choc, & marque par conſéquent l'empreinte d'un plus grand eſpace de ſa circonférence.

Dans le choc il y a à conſidérer 1°. la réſiſtance réciproque des corps ; 2°. la communication du mouvement ; 3°. la force du choc.

DE LA RÉSISTANCE RÉCIPROQUE DES CORPS DANS LE CHOC.

11. *La réſiſtance* eſt une diſpoſition actuelle qui fait qu'un corps étant pouſſé ou ſollicité à ſe mouvoir, ſe maintient & perſévere dans ſon état préſent, ou s'il le change, ce n'eſt que proportionnellement à la force qui le pouſſe ; ſi cette force eſt grande, le changement qui arrive au corps eſt conſidérable, c'eſt-à-dire, que le corps reçoit un grand mouvement ; ſi la force qui lui eſt appliquée eſt petite, le changement eſt moindre, c'eſt-

à-dire, que le corps reçoit une moindre viteſſe : or on fera voir bien-tôt que cette diſpoſition qui fait qu'un corps ne change ſon état que proportionnellement à la force qui lui eſt appliquée, eſt une eſpece de réſiſtance : c'eſt pourquoi on peut diſtinguer deux ſortes de réſiſtances, l'une *propre*, l'autre *impropre*.

12. La réſiſtance propre détruit, diminue ou empêche l'effet que la force motrice tend à produire ; telle eſt la réſiſtance de deux hommes qui ſe tirent ou qui ſe pouſſent en ſens contraires.

13. La réſiſtance impropre laiſſe produire à la force motrice tout l'effet qu'elle peut produire ; telle eſt la réſiſtance d'un corps qui eſt choqué lorſqu'il eſt en repos, ou lorſqu'étant en mouvement on fait effort pour lui donner une plus grande viteſſe. On a dit dans le premier Livre qu'un corps conſideré comme une portion de matiere, étoit indifferent ou indéterminé pour le repos ou le mouvement, qu'il étoit prêt à céder au moindre effort ; ce n'eſt pas à dire pour cela que la force motrice n'éprouve aucune réſiſtance, lorſqu'elle s'applique à un corps, & qu'il lui ſoit auſſi aiſé de mouvoir une grande qu'une petite maſſe en faiſant même abſtraction de l'effort de la peſanteur.

PROPOSITION PREMIERE.

14. *Un corps en repos qui eſt choqué ou pouſſé* 1°. *réſiſte à la force motrice.* 2°. *Cette réſiſtance n'eſt pas l'effet de la peſanteur.* 3°. *Elle n'eſt pas l'effet de l'air ou du fluide environnant.* 4°. *Elle eſt l'effet immédiat de la volonté très-libre de Dieu qui a établi la loi du choc.*

1°. La premiere partie de cette propoſition ſe prouve par l'expérience. M. Mariotte en rapporte deux qui montrent d'une maniere palpable la réalité de cette réſiſtance. On reconnoîtra, dit-il, la vérité de cette propoſition par l'expérience en frappant d'une même viteſſe avec la main deux corps ſuſpendus inégaux en peſanteur, car on ſentira moins de douleur par la rencontre du corps moins peſant : & ſi l'on ſuſpend une boule de terre molle, & qu'on la laiſſe aller avec une certaine viteſſe contre une boule de bois en repos ſuſpendue de même & qui ſoit deux fois plus peſante, on verra qu'elle la fera mouvoir plus lentement, & qu'elle s'applatira davantage par le choc, que lorſqu'elle en rencontrera une autre qui lui ſera égale en poids ; & ſi on la fait choquer contre une autre boule deux fois moins peſante qu'elle, elle s'applatira encore moins, mais elle la fera aller plus vîte, pourvu qu'elle la rencontre toujours directement

avec la même viteſſe. Voyez la propoſition cinquiéme partie premiere. Puiſque ſi la main eſt mûe avec la même viteſſe, elle a plus de peine à mouvoir un corps plus peſant qu'un corps qui l'eſt moins; & que ſi une boule de terre molle choque auſſi d'une égale viteſſe deux autres boules d'inégale peſanteur, elle s'applatit davantage à la rencontre de la boule qui eſt la plus peſante; c'eſt une preuve certaine qu'un corps qui eſt choqué ou pouſſé réſiſte à la force motrice.

2°. La réſiſtance dont il s'agit n'eſt pas l'effet de la peſanteur: car ſi les boules étoient poſées ſur un plan horizontal, la peſanteur n'étant point oppoſée au choc qui ſe fait ſuivant une direction parallele au plan, ne contribueroit en rien à la réſiſtance des boules choquées: or le fil qui tient les boules ſuſpendues, fait preciſément le même effet que le plan horizontal, qui eſt de ſoutenir tout l'effort de la peſanteur: d'ailleurs la direction de la boule qui choque à l'inſtant de l'impulſion eſt horizontale, & c'eſt à ce moment-là même que la boule qui eſt choquée réſiſte, & avant qu'elle monte par l'arc qu'elle décrit enſuite; la peſanteur n'eſt donc pas le principe de la réſiſtance que l'expérience fait découvrir dans les corps qui ſont choquez.

3°. Cette réſiſtance n'eſt pas non plus l'effet de l'air environnant. Il eſt vrai que l'air réſiſte & qu'il augmente par conſéquent la réſiſtance des corps; mais on ne peut pas dire qu'il en ſoit ſeul la cauſe ou le principe; car outre qu'on pourroit faire à l'égard de l'air la même queſtion que pour les corps fermes, ſçavoir d'où vient qu'il réſiſte lorſqu'il eſt choqué, vû qu'il eſt d'une ſubſtance ſi rare & ſi peu ſerrée, & qu'il eſt ſi aiſé de le diviſer & d'en ſéparer les parties, c'eſt que ſuivant la remarque de M. Mariotte dans le choc des boules ſuſpendues, une boule de plomb de deux livres réſiſte plus au mouvement d'une boule de terre molle, qu'une boule de bois d'une livre, quoique le volume de cette derniere étant plus grand, elle pouſſe plus d'air devant ſoi, & en entraîne plus après ſoi que l'autre. La réſiſtance dont il s'agit ici n'a donc pas pour principe l'air environnant.

4°. La réſiſtance que les corps font au mouvement, eſt l'effet immédiat de la volonté très-libre du Créateur, qui a établi la loi du choc.

Car 1°. cette réſiſtance eſt indépendante de l'action de la peſanteur, on ne peut pas non plus l'attribuer au fluide environnant comme à ſon vrai principe. 2°. Elle n'eſt pas l'effet d'une vraie force qui réſide dans les corps & qui leur ſoit comme inhé-

rente & naturelle, car outre que l'on ne conçoit pas bien comment il peut ſe faire qu'une telle force n'agiſſe qu'au moment du choc ; c'eſt que l'on ne voit pas non plus comment elle peut réſiſter en même-tems ſuivant pluſieurs directions, lorſqu'un corps eſt choqué à la fois par plus d'un côté ; ou encore comment cette force change de direction ſuivant le beſoin & ſuivant que la force motrice en change elle-même. Or puiſqu'au dehors & au dedans des corps, il n'y a rien qui puiſſe leur donner la réſiſtance que l'expérience y fait découvrir, il s'enſuit qu'elle ne peut être que l'effet immédiat de la volonté du Créateur, qui par un choix très-libre, a voulu que le choc ou l'impulſion fût un moyen pour communiquer du mouvement, & que la réſiſtance des corps pût occaſionner le choc : car ſans la réſiſtance le choc n'eſt pas bien intelligible : un corps ne s'applique à un autre, & ne le preſſe qu'autant que celui-ci réſiſte.

15. Il n'eſt pas néceſſaire de prouver la réalité de la réſiſtance propre, ni quel en eſt le principe, car chaque équilibre eſt un exemple de cette réſiſtance, & elle conſiſte ou n'eſt point differente de l'oppoſition mutuelle des forces qui agiſſent les unes contre les autres.

PROPOSITION SECONDE.

16. *Les deux ſortes de réſiſtances propre & impropre dont on vient de parler, ſont differentes ou ont des effets bien differens ſi on les conſidere en elles-mêmes ; mais par rapport à la force motrice, elles ont des effets entierement ſemblables.*

1°. La réſiſtance propre diminue, détruit ou empêche l'effet que la force motrice tend à produire, ce qui eſt évident par l'exemple de deux hommes qui ſe pouſſent en ſens contraires ; mais la réſiſtance impropre laiſſe produire à la force motrice tout l'effet qu'elle peut produire, & cet effet ſubſiſte tout entier dans le corps qui fait de la réſiſtance, comme il paroît par l'exemple d'un corps qui eſt choqué étant en repos ; car quoiqu'il réſiſte, il cede néanmoins au plus petit choc, & reçoit tout le mouvement que le choquant tend à lui imprimer.

2°. Si on conſidere l'une & l'autre réſiſtance par rapport à la force motrice, elles ont des effets entierement ſemblables ; la réſiſtance propre diminue le mouvement de la force motrice, & rend l'exercice de ſon action plus pénible & plus difficile : or la réſiſtance impropre a un effet tout ſemblable, car lorſqu'un corps qui eſt mû choque un corps en repos, il perd de ſon mouvement

comme l'on ſçait, & la réſiſtance qu'il trouve dans le choqué, eſt une vraie difficulté, un vrai obſtacle qu'il a à ſurmonter, en ſorte que le corps choqué met le même empêchement que ſi à l'inſtant du choc une force contraire le repouſſoit contre le choquant. En voici la preuve: qu'un corps qui eſt en repos ſoit tiré ou pouſſé, l'effet de ſa réſiſtance doit être le même. Conſiderons donc un cheval qui tire ſuivant une direction horizontale une pierre de taille attachée à une corde: au moment qu'il fait effort pour mouvoir la pierre, non-ſeulement ſa viteſſe eſt retardée, mais il éprouve la même difficulté que ſi la maſſe de la pierre étant détruite, il étoit retiré en arriere avec une effort égal à celui qu'il fait ſur la pierre, car la corde eſt bandée de même que ſi elle étoit tirée en ſens contraires par des forces oppoſées qui ſeroient appliquées à ſes extrêmitez; donc ſi la pierre au lieu d'être tirée eſt pouſſée ou choquée, l'obſtacle qu'elle fait eſt le même que ſi elle étoit pouſſée contre le corps qui la choque; donc la réſiſtance impropre a le même effet à l'égard de la force motrice que ſi cette réſiſtance détruiſoit abſolument ou en tout ou en partie la force motrice.

17. Il eſt évident que la force de traction, c'eſt-à-dire, la force que le cheval exerce ſur la pierre pour la mouvoir en la tirant, eſt également appliquée au cheval & à la pierre, mais en ſens contraires, & qu'elle détruit dans le cheval la quantité de mouvement qu'elle communique à la pierre. Donc pareillement lorſqu'un corps choque un autre corps en repos, la force du choc, c'eſt-à-dire, la force par laquelle le choquant s'applique au choqué eſt également appliquée à l'un & à l'autre, & elle fait des impreſſions égales ſur le choquant & le choqué, mais en ſens contraires.

18. *Cette force eſt moindre que la force du choquant, puiſque le choquant ne perd jamais tout ſon mouvement lorſqu'il choque un corps en repos, de même que le cheval ne communique jamais toute ſa force à la pierre, puiſqu'après avoir fait impreſſion ſur elle, il lui en reſte encore aſſez pour ſe mouvoir ſuivant ſa direction.* Cette propoſition ſera éclaircie & expliquée plus au long dans les articles ſuivans.

M. Neuton appelle *force d'inertie* la réſiſtance que les corps font au mouvement. Il lui attribue une réaction qui eſt égale à l'action que la force motrice exerce ſur le corps qu'elle meut. Si ces expreſſions ne ſignifient rien de plus que le fait que l'on vient d'expoſer, rien n'empêche qu'on n'en faſſe uſage; car lorſqu'un

corps

corps eſt tiré ou pouſſé, ſa réſiſtance eſt équivalente à une réaction; mais on ne peut pas dire que ce ſoit une véritable réaction, parce qu'elle ne détruit pas abſolument l'action de la force motrice, & qu'elle eſt ſeulement un moyen d'étendre cette action ſur le corps qui eſt tiré ou pouſſé, & de lui communiquer une partie de la même force.

De la communication du mouvement dans le choc.

19. Dieu étant le maître abſolu des loix de la communication du mouvement, auroit pû en établir de toutes differentes de celles que l'expérience a fait découvrir: d'où il ſuit qu'on ne peut pas les déduire de la ſeule idée que l'on a de la matiere & du mouvement. C'eſt-là ce qu'apperçurent ceux qui les premiers donnerent les régles réelles du choc, ou telles qu'elles s'obſervent dans l'univers. Ils aimerent mieux s'appuyer dans leurs recherches, ſur l'expérience, que ſe fonder ſur des hypotheſes arbitraires, jugeant qu'il y avoit plus de certitude à raiſonner ſur des obſervations exactes, que ſur de ſimples conjectures. L'eſprit de ſiſtême en cette matiere conſiſte à choiſir entre les faits obſervez ceux qui ſont les plus ſimples, & à en déduire méthodiquement ceux qui ſont compoſez; c'eſt ce qu'on va eſſayer de faire.

20. On prend pour principe 1°. que les corps dans le choc réſiſtent, ſçavoir le choqué au choquant. 2°. Que cette réſiſtance que M. Neuton appelle force d'inertie, ne détruit pas le mouvement, puiſqu'elle eſt un moyen de communication, & que c'eſt en réſiſtant que le choqué reçoit du mouvement du choquant. 3°. Les corps dans le choc changent de figure & ſont applatis. Ce fait peut être déduit de ce que les corps ſont compoſez de parties flexibles, & de ce que dans le choc ils ſe trouvent (à cauſe de la réſiſtance du choqué) dans le même état que ſi les deux corps ſe repouſſoient & étoient preſſez l'un contre l'autre.

Les corps dont il s'agit ici ſont mous & ſans reſſort ou à reſſort.

De la communication du mouvement dans le choc des corps mous ou ſans reſſort.

21. *Dans le choc des corps mous ſans reſſort, le mouvement ſe communique ſucceſſivement & dans un tems fini. On ſuppoſera dans la ſuite que les corps qui ſe choquent ſont de figure ſphérique.*

Si le corps A choque le corps B en repos, ils ſont applatis tous deux, c'eſt-à-dire, que les parties par leſquelles ils ſe touchent

pendant le choc s'approchent des centres des globes, & parcourent par rapport à ces centres un eſpace fini : ainſi le choc & par conſéquent la communication du mouvement dure pendant le tems que cet eſpace eſt parcouru par les parties affaiſſées ; mais cet eſpace qui eſt fini ainſi que l'expérience montre, n'eſt parcouru par une viteſſe finie que dans un tems fini ; donc la communication du mouvement ſe fait dans un tems fini ; & elle eſt par conſéquent ſucceſſive.

22. REMARQUE. Si les corps ſont abſolument durs, le mouvement ſe communique dans un inſtant au choqué : car comme M. de Molieres remarque, dès l'inſtant du choc, le centre du corps A qui choque ne peut aller plus vîte que le centre du choqué B, puiſque ces corps conſervent exactement leur figure ; donc dès l'inſtant du choc le corps B reçoit tout ſon mouvement.

PROPOSITION TROISIE'ME.

23. *Lorſque le corps* A *choque le corps* B *en repos, il perd néceſſairement de ſa viteſſe.*

Car par la force du choc les deux globes changent de figure, la partie antérieure du choquant s'approche du centre, ce qui arrive, ou bien parceque cette partie eſt mue vers le centre, ou bien parceque le centre eſt mû vers la partie enfoncée : ſi la premiere de ces deux hypotheſes avoit lieu, il eſt évident que pour lors il y auroit dans le corps choquant deux mouvemens contraires, quelques-unes de ſes parties retourneroient en arriere tandis que les autres continueroient à être mûes en avant ; il y auroit donc deux mouvemens contraires dans le même corps : or ces deux mouvemens contraires ne pouvant pas ſubſiſter long-tems enſemble, il ſeroit néceſſaire que le mouvement de toute la maſſe fût retardé. Mais il eſt viſible que c'eſt la ſeconde des deux hypotheſes qui a lieu, c'eſt-à-dire, que c'eſt le centre de la boule qui eſt mû vers la partie enfoncée : or cela ne peut arriver ainſi, que la partie enfoncée ne ſoit retardée, puiſque ſi elle étoit mûe avec la même viteſſe qu'auparavant elle parcourroit en avant le même eſpace que le centre, & elle s'en trouveroit également éloignée ; donc puiſque le corps qui choque eſt retardé dans une de ſes parties, il s'enſuit que la maſſe entiere eſt auſſi retardée & qu'elle perd du mouvement.

On peut encore prouver cette propoſition par les principes énoncez dans l'article 20 : car puiſque le corps qui choque eſt applati, cela n'arrive que parce qu'il trouve de la réſiſtance dans

le choqué : or cette réſiſtance a le même effet ſur le choquant que ſi à l'inſtant du choc celui-ci étoit tiré ou pouſſé en arriere comme il a été prouvé au nombre ſecond de l'article 16 ; mais ſi le choquant étoit pouſſé ou tiré en arriere, il eſt viſible que ſa viteſſe ſeroit retardée, & qu'il perdroit de ſon mouvement ; donc lorſqu'un corps en choque un autre en repos, il perd de ſon mouvement.

24. *Tant que le corps* A *ira plus vîte que le corps* B, *il ne ceſſera de perdre de ſa viteſſe.*

Car le choc continuera pendant tout le tems que le corps A ira plus vîte : or pendant tout le tems du choc ſa partie antérieure ne diſcontinuera point d'être retardée & de trouver une nouvelle réſiſtance ; car en ce que le corps B qui eſt choqué va moins vîte, il eſt à cet égard & par rapport au choc comme s'il étoit en repos ; donc tandis que le corps A ira plus vîte que le corps B, il perdra de ſa viteſſe.

25. *Le corps* B *reçoit tout le mouvement que le corps* A *perd dans le choc.*

Car pendant tout le tems du choc le corps B réſiſte au corps A, & cette réſiſtance fait que la force du choc s'applique également au choqué & au choquant, comme il a été prouvé dans l'article 17 ; d'où il ſuit que les deux corps en reçoivent la même impreſſion, mais en ſens contraires ; donc ſi rien ne s'oppoſe à la force du choc, elle doit produire dans le corps B la même quantité de mouvement qu'elle détruit dans le corps A : or la réſiſtance du corps B ne s'oppoſe point à ſon mouvement, puiſqu'au contraire elle eſt un moyen établi pour mettre le corps B en état d'en recevoir ; donc le corps B reçoit tout le mouvement que le corps A perd dans le choc.

26. *Si les centres des corps* A *&* B *ſont mûs ſur la même ligne ſuivant la même direction, & que le corps* A *aille plus vîte, en ſorte qu'il rencontre enfin le corps* B, *il perdra de ſon mouvement, & le corps* B *recevra tout ce qu'il en perdra.*

Car en ce que le corps B va moins vîte il réſiſte au corps A, ils ſeront donc applatis l'un & l'autre, & la force du choc détruira une partie du mouvement du corps A, puiſque la réſiſtance du corps B conſume une partie de ſa force de même que s'il étoit choqué en repos ; mais la même force du choc communiquera au corps B tout le mouvement qu'elle détruit dans le corps A, puiſque rien ne s'y oppoſe : car le mouvement du corps B avant le choc n'eſt point contraire à celui qu'il reçoit de la force

du choc. Donc dans le cas préſent lê corps B reçoit tout le mouvement que perd le corps A qui choque.

27. *Si les centres des corps A & B ſont mûs ſur la même ligne ſuivant des directions oppoſées : 1°. Le plus foible perdra ſon mouvement, & le plus fort une quantité égale à celle du plus foible. 2°. Le plus fort choquera le plus foible avec la difference des mouvemens de même que s'il le rencontroit en repos.*

1°. Lorſque les corps ſe rencontreront ils ſeront applatis par la force du choc ; donc les parties antérieures des deux globes ſeront retardées, tandis que les centres s'approcheront l'un de l'autre ; donc chaque mobile perdra de ſa viteſſe de même que s'il choquoit un corps en repos, (car dans ce cas le choquant perd de ſa viteſſe, par ce que le mouvement de ſa partie antérieure eſt retardé par l'obſtacle que lui oppoſe le corps qui eſt choqué ;) or il eſt évident que l'un & l'autre mobile ne diſcontinuera point de perdre de ſa viteſſe juſqu'à ce que celle du plus foible ſoit entierement détruite ; mais d'ailleurs les réſiſtances réciproques des mobiles ſont égales, comme il paroît par larticle 17, & qu'on peut concevoir aiſément ſi l'on imagine que les deux mobiles ſont attachez à une corde, & qu'ils vont en ſens contraires, car la corde ſera également tendue dans toute ſa longueur, quoique les quantitez de mouvement ſoient inégales. Donc les mobiles recevant des impreſſions égales en ſens contraires, il s'enſuit que le plus fort perdra une quantité de mouvement égale à celle du plus foible avant le choc.

2°. Puiſqu'il reſte au plus fort une quantité de mouvement qui eſt égale à la difference des deux quantitez avant le choc, & que d'ailleurs le plus foible après avoir perdu toute ſa viteſſe, doit être regardé comme étant en repos, il s'enſuit que le plus fort le choquera avec cette difference, de même que s'il l'eut d'abord rencontré en repos.

28. D'où il ſuit que dans ce ſecond choc le plus foible recevra tout le mouvement que le plus fort y perdra.

29. *Lorſqu'un corps en choque un autre, il ne perd de ſon mouvement qu'autant qu'il eſt néceſſaire, pour que les deux corps aillent après le choc d'une égale viteſſe.*

Car le choqué reçoit ſa viteſſe ſucceſſivement & par degrez ; donc tant qu'il ira moins vîte que le choquant, il ne diſcontinuera point d'être choqué & de recevoir de nouveaux degrez de viteſſe ; mais auſſi dès qu'il ira également vîte, il ceſſera d'être choqué, & par conſéquent ſa viteſſe ne ſera plus augmentée ;

donc le choquant ne perd de ſon mouvement qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour que les deux corps aillent après le choc d'une égale viteſſe.

En effet on ne peut pas dire que le choqué va après le choc moins vîte que le choquant, car il en ſeroit encore choqué & en recevroit encore du mouvement, ce qui eſt contre l'hypotheſe : on ne peut pas dire non plus qu'après le choc, le choqué va plus vîte que le choquant. Car ſi le choqué va plus vîte que le choquant, il y a eu un inſtant où les deux corps alloient d'une viteſſe égale ; ce n'eſt donc qu'après cet inſtant que le choqué a reçu l'exces dont ſa viteſſe ſurpaſſe celle du choquant ; donc le choquant n'allant pas plus vîte que le choqué, lui auroit communiqué de ſon mouvement, ce qui eſt contre la loi établie ſuivant laquelle un corps qui ne va pas plus vîte, ne pouvant pas choquer, ne peut pas non plus communiquer de mouvement. Donc après l'inſtant où les deux corps ſont ſuppoſez aller également vîte, la viteſſe du choqué n'étant plus augmentée, il s'enſuit qu'après le choc, il n'ira pas plus vîte, il n'ira pas non plus moins vîte ; il ira donc auſſi vîte que le choquant ; le choquant ne perdra donc de ſon mouvement qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour que les deux corps aillent après le choc d'une égale viteſſe.

On peut dire encore que le choquant ne perd de ſon mouvement qu'autant qu'il faut pour écarter l'obſtacle qu'il rencontre ſur ſa route : or cet obſtacle eſt ſuffiſamment ôté, s'il reçoit une viteſſe par laquelle il aille auſſi vîte après le choc, que le corps qui choque ; donc le choquant & le choqué après le choc iront d'une égale viteſſe, & le choquant n'aura perdu de ſon mouvement que la quantité néceſſaire pour établir cette égalité de viteſſe.

De la communication du mouvement dans le choc des corps à reſſort.

30. Le reſſort eſt de deux ſortes, *parfait* & *imparfait* : le reſſort parfait eſt celui qui ſe comprime avec une force égale à celle qui lui eſt appliquée, & qui ſe rétablit de même avec une force égale à la compreſſion. Le reſſort eſt imparfait, s'il ſe comprime, & ſe rétablit avec une force moindre que celle qui lui eſt appliquée. On ſuppoſe ici que les corps ſont à reſſort parfait.

31. La communication du mouvement dans le choc des corps

à reſſort, ſe fait préciſément de la même maniere que dans le choc des corps mous ſans reſſort; il y a cependant cette difference, que dans les corps mous ſans reſſort après avoir été comprimez, les parties demeurent affaiſſées ſans ſe rétablir; au lieu que les corps à reſſort auſſi-tôt que la compreſſion ceſſe, reprennent leur premiere figure, parce que le reſſort eſt une force qui réagit autant que la compreſſion a agi, & qui réleve la partie enfoncée.

32. On ne voit pas bien d'abord comment il peut ſe faire que le corps qui choque communique au choqué tout le mouvement qu'il perd, c'eſt-à-dire, dans la même meſure & ſuivant la même proportion que ſi le choc étoit entre des corps mous & ſans reſſort. La raiſon d'en douter eſt fondée ſur ce que le reſſort ſe roidit à meſure qu'on le réduit à occuper un moindre eſpace, & il acquiert une force de plus en plus grande par laquelle il réagit contre la force qui le comprime, ce qui ne peut ſe faire ſans perte de la part de la force qui aſſujettit le reſſort: d'où il ſuivroit que tout le mouvement perdu par le choquant ne ſeroit pas communiqué au choqué de même que dans le choc des corps mous. Il faut donc faire voir en détail que cette communication n'eſt point empêchée par la réaction du reſſort, & que le choqué reçoit de la force du choc la même quantité de mouvement que s'il n'y avoit aucun reſſort.

33. Lorſqu'un corps à reſſort choque ou qu'il eſt choqué, l'expérience fait voir qu'il eſt applati; or on peut faire deux hypotheſes à l'égard de cet applatiſſement. On peut ſuppoſer qu'il n'y a que les parties qui reçoivent immédiatement le choc, qui ſont enfoncées, ou bien ſuppoſer que la force du choc ſe diſtribue de maniere que non-ſeulement les parties par leſquelles le choquant & le choqué ſont appliquez l'un à l'autre, & ſur leſquelles la force du choc porte immédiatement, ſont dérangées, mais encore que pluſieurs autres ſont déplacées tant celles qui ſont aux extrêmités oppoſées que celles qui ſont à droite & à gauche: ſi c'eſt, par exemple, une boule à reſſort qui ſoit choquée, on peut penſer qu'elle eſt applatie non ſeulement dans ſa partie poſtérieure, mais auſſi dans ſa partie antérieure, & que tandis que ces parties s'approchent du centre, les parties latérales s'en éloignent, en ſorte que la force du choc faſſe prendre à la boule la figure d'un ſphéroide applati: or l'expérience montre que c'eſt la ſeconde hypotheſe qui a lieu dans le choc des corps à reſſort.

34. L'expérience a été faite par M. Mariotte, & elle eſt rapportée dans ſon traité de la percuſſion partie premiere, propoſition 27. Si on ſuſpend un cerceau de fil de fer ou de bois neuf comme le cercle ABCD, en ſorte que les diametres AHC, BHD ſoient ſur un plan horizontal à peu près, & qu'on le frappe fortement avec un bâton ou autrement, au point D pour le faire avancer horizontalement ſelon la direction de la ligne DGHEBF, le point B ne s'avancera pas en même-tems que le point choqué D, mais il ira en arriere du côté de D comme en E avant que d'aller en F; car ſi l'on ſuſpend une bale de quelque matiere légere comme de bois, à deux ou trois lignes du point B, entre B & E au dedans du cercle, lorſqu'on frappera fermement le point D pour pouſſer le cerceau vers F, la petite bale viendra en arriere avec une grande force du coté de D, ce qui n'arriveroit pas ſi le point B ne s'étoit approché du point E par le choc. D'où il ſuit que le point B ne s'avance pas en même-tems que le point choqué D, mais qu'il va en arriere du côté de D avant que d'aller en F. Le même effet arriveroit ſi l'eſpace vuide étoit rempli par d'autres cerceaux concentriques; d'où l'on peut conclure que lorſqu'une boule à reſſort eſt choquée, elle s'applatit par ſa partie poſtérieure & antérieure, en ſorte qu'elle prend la figure d'un ſphéroide applati. Fig. 1.

35. On peut même prouver par le raiſonnement qu'une boule à reſſort doit prendre par le choc la figure d'un ſphéroide applati. Car l'arc ADC en perdant de ſa courbure par la force du choc, a ſes parties plus ſerrées vers le milieu D que vers ſes extrêmitez A & C; il doit donc arriver que ces parties faſſent effort ſur les parties voiſines qui ſont à droite & à gauche de ce point, & celles-ci ſur d'autres plus proches des points A & C, & cette force aidée du reſſort, doit ſe tranſmettre juſqu'aux extrêmitez du diametre AC. Lors donc que la boule ADCB eſt choquée, elle ſe trouve dans le même état que ſi deux forces appliquées aux points A & C faiſoient effort pour les écarter du centre H: or, il eſt évident que ſi les points A, C s'éloignent de ce centre en M & L, il eſt néceſſaire que les parties en D & B diamétralement oppoſées s'en approchent, & par conſéquent que la boule ſoit applatie.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

36. *Dans le choc les corps à reſſort parfait ne ſont pas ſimplement applatis, ſçavoir le choquant dans ſa partie antérieure, & le choqué dans ſa partie poſtérieure.*

Fig. 2. DEMONSTRATION. Car ſi le changement de figure produit par le choc, ne conſiſte que dans un ſimple applatiſſement des parties par leſquelles le choquant & le choqué ſe touchent pendant le choc, de maniere que ces parties ſoient ſeules déplacées, pour lors le reſſort eſt comme placé entre deux, & il s'appuie d'un côté ſur le choquant, & de l'autre ſur le choqué : or dans cette hypotheſe pendant le tems que le choc dure à chaque fois que le reſſort eſt comprimé par le choquant, il doit ſe rétablir, puiſqu'il ne trouve du côté du choqué que la réſiſtance provenant de la maſſe, laquelle il peut ſurmonter ; donc le reſſort doit ſe comprimer & ſe détendre alternativement pendant la durée du choc ; mais puiſque le reſſort réagit également ſur le choquant & ſur le choqué, il s'enſuit que ſi à chaque fois qu'il ſe détend il communique un degré de viteſſe au choqué, il en ôte un au choquant : ainſi le choquant perdroit de ſa viteſſe, & le choqué en acquerroit tant par la force du choc, que par la détente alternative du reſſort, juſqu'à ce que la viteſſe du choquant fût devenue égale à celle du choqué : ſuppoſons donc que la viteſſe du choquant ne ſurpaſſe plus la viteſſe du choqué que d'un degré, le reſſort ſera comprimé pour la derniere fois par ce degré ; & en ſe rétabliſſant il augmentera un peu la viteſſe du choqué, & il diminuera un peu celle du choquant ; de ſorte que les viteſſes ne differeront que de fort peu & comme d'un degré infiniment petit ; le choquant & le choqué ſeroient donc mûs après le choc d'un même côté avec une viteſſe ſenſiblement égale, & ne ſe ſépareroient point, & le choquant ne ſeroit jamais réfléchi ou renvoyé en arriere après le choc : or toutes ces conſéquences ſont contraires à ce qui arrive dans le choc des corps à reſſort ; donc l'hypotheſe dont elles ſont déduites, n'a pas lieu dans la nature ; donc les corps à reſſort parfait ne ſont pas ſimplement applatis, ſçavoir le choquant dans la partie antérieure, & le choqué dans ſa partie poſtérieure, ſuivant la premiere des deux hypotheſes que l'on vient de faire.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

37. *Si dans le choc les boules* A *&* B *à reſſort parfait s'applatiſſent de maniere que les parties extrêmes de l'une & de l'autre qui ſont ſituées ſur la ligne de direction du choc, s'approchent dans chacune du centre, en ſorte que les boules prennent la figure d'un ſphéroïde applati.* 1°. *Durant la compreſſion le reſſort ne détruira dans le choquant aucune partie de ſon mouvement.* 2°. *Le reſſort*

ſort ſera comprimé juſqu'à ce que les deux corps ſoient mûs dans le même ſens d'une égale viteſſe, comme ſi le choc étoit entre des corps mous ſans reſſort. 3°. *Dans le choc des corps à reſſort il faut diſtinguer deux tems, le tems pendant lequel le corps ſe comprime, & celui où il ſe rétablit.*

DEMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE. Si les boules A & B à reſſort parfait n'étoient applaties que dans l'endroit où elles ſe touchent pendant le choc, le reſſort ſeroit comprimé & ſe rétabliroit alternativement en augmentant la viteſſe du corps B & en retardant celle du corps A, comme on vient de l'expoſer dans la propoſition précédente : ainſi le corps A qui choque, perdroit de ſon mouvement tant par la force du choc, que par la réaction du reſſort qui ſe rétabliroit à chaque fois qu'il auroit été comprimé ; mais ſi les boules ſont auſſi applaties par leurs parties extrêmes D, F, les efforts directement oppoſez par leſquels elles s'approcheront des centres & de l'endroit du contact, tiendront le reſſort aſſujetti pendant tout le tems qu'il ſera comprimé : car pendant que la compreſſion ſe fera, les parties extrêmes D, F s'approcheront : or il eſt évident que pendant tout le tems que ce mouvement aura lieu, le reſſort ſera retenu, de maniere qu'il ne pourra ſe rétablir, ni ôter par conſéquent au corps A qui choque, aucune partie de ſon mouvement, parce qu'auſſi-tôt que le reſſort ſe comprime dans l'endroit où le choc ſe fait, & par où les boules ſe touchent, il ſe comprime auſſi vers les parties extrêmes D, F en ſens contraire des parties du contact. Donc pendant le tems que le reſſort des boules eſt comprimé par la force du choc, il ne détruit ni ne communique aucun mouvement, comme cela arriveroit s'il ne ſe comprimoit dans chaque boule que dans l'endroit du contact. Fig. 3.

Il eſt évident que les efforts par leſquels les parties extrêmes D, F s'approchent des centres A & B, ſont préciſément les mêmes que ceux qui ſont appliquez aux parties du contact, & ſur leſquelles la force du choc porte immédiatement, car lorſque les parties du contact ſont pouſſées dans l'une & l'autre boule vers les centres A & B, les parties extrêmes D, F ſont auſſi-tôt déterminées à s'en approcher de même, parce que les unes étant liées aux autres, ſi les unes ſont déplacées, les autres le ſont en même-tems, pourvu que les liens qui les uniſſent ne ſoient pas rompus, ce qui n'arrive pas aux parties des corps à reſſort parfait. En ſorte que le reſſort ſe bande en même-tems dans toutes les parties qui ſont comprimées d'une maniere à peu

près ſemblable à ce qui arrive à une corde qui eſt tirée par les deux bouts, & dont les parties s'allongent toutes, & ſe bandent ſuivant la longueur de la corde avec une force égale à celle qui eſt appliquée aux deux bouts.

DEMONSTRATION DE LA SECONDE PARTIE. Je dis en ſecond lieu que le reſſort ne ceſſera d'être comprimé, que lorſque la boule B aura reçu une viteſſe égale à celle qui reſte à la boule A qui choque. C'eſt ce qu'on peut prouver en cette maniere. Tant que la viteſſe reſpective avec laquelle les deux boules s'approchent, ſera d'une grandeur finie, quelque petite qu'elle ſoit, la force du choc ſera aſſez grande pour comprimer le reſſort; car un reſſort qui eſt bandé étant une force ſans mouvement, eſt infiniment inférieure à une force en mouvement, & il eſt comparable à cet égard à une force accélératrice telle qu'eſt la peſanteur, laquelle ne peut donner une viteſſe finie que dans un tems fini; un reſſort bandé ne peut donc pas réſiſter à une force d'une grandeur finie qui lui eſt appliquée juſqu'au point de la détruire ſans ſe comprimer; donc tant que la viteſſe reſpective avec laquelle les boules A & B s'approchent, ſera finie, le reſſort ſera comprimé; il ne ceſſera donc de ſe bander que lorſque la viteſſe reſpective ſera infiniment petite: mais pour lors les viteſſes que les boules ont dans le même ſens ſont égales, puiſqu'elles ne different que d'une partie infiniment petite. Donc le reſſort ne ceſſe d'être comprimé par la force du choc que lorſque les boules A & B ont des viteſſes égales dans le même ſens.

DEMONSTRATION DE LA TROISIÉME PARTIE. Sçavoir que dans le choc des corps à reſſort parfait, il faut diſtinguer deux tems, le tems pendant lequel le reſſort ſe comprime, & celui pendant lequel il ſe rétablit. Cette troiſiéme partie ſuit évidemment des deux précedentes, car puiſque durant tout le tems que la compreſſion dure, le reſſort eſt retenu ſans pouvoir s'échapper tant ſoit peu, & que d'ailleurs il n'y a aucun inſtant où il ne ſoit contraint de ſe comprimer juſqu'à ce que les corps aient des viteſſes égales dans le même ſens, il s'enſuit que le tems de la reſtitution du reſſort, eſt diſtingué du tems de la compreſſion, & que l'un ne commence que lorſque l'autre finit. Donc, &c.

38. Dans la propoſition on a ſuppoſé que le corps B eſt choqué en repos: il eſt évident que ſi ce corps eſt mû dans le ſens du corps A, mais plus lentement, en ſorte que le corps A puiſſe l'attraper, ou bien que les corps aillent l'un contre l'autre, la propoſition eſt également vraie dans ſes trois parties, c'eſt-à-dire,

que le reſſort durant le tems de la compreſſion, ne peut diminuer ni augmenter par ſa réaction le mouvement des corps, & qu'il eſt ſans ceſſe comprimé juſqu'au moment que la viteſſe reſpective eſt infiniment petite; qu'ainſi dans le tems de la compreſſion du reſſort, la percuſſion ſe fait quant à l'effet du choc & la communication du mouvement, de même que ſi les corps étoient mous & ſans reſſort, puiſque durant tout ce tems la force élaſtique étant détenue comme captive ne peut repouſſer les corps.

39. D'où il ſuit que durant le tems de la compreſſion les corps doivent recevoir ou perdre la même quantité de mouvement que s'ils étoient ſans reſſort.

40. Remarques. 1°. On a ſuppoſé dans la preuve de la premiere partie de la propoſition, qu'auſſi-tôt que les parties par leſquelles les boules ſe touchent lors du choc étoient comprimées, la force qui leur eſt appliquée étoit tranſmiſe à l'autre extrémité dans l'une & l'autre boule, & que les unes ne pouvoient être preſſées ſans que les autres ne le fuſſent en même-tems, comme il arrive aux parties d'une corde qui étant tirée par les deux bouts, reçoit à la fois une égale tenſion dans toute ſa longueur. Si on dit que la percuſſion en tant qu'elle rapproche de l'endroit du contact les parties extrêmes des corps qui ſe choquent, eſt un effet ſucceſſif, & qu'il n'eſt point ſemblable à la tenſion que reçoit une corde qui eſt tirée par les deux bouts; qu'ainſi les parties du contact étant comprimées les premieres, leur reſſort réagit, & peut ſe détendre avant que les parties qui ſont à l'autre extrêmité puiſſent par un effort contraire réprimer cette réaction. On répond que cette ſuppoſition n'eſt point conforme à l'expérience de M. Mariotte ſuivant laquelle, & les parties qui reçoivent le coup & celles qui ſont à l'extrêmité oppoſée, s'approchent à la fois du centre du cerceau avant même que le cerceau ſoit mû ſuivant la direction du coup, comme le prouve le mouvement de la petite boule ſuſpendue, par lequel elle s'approche auſſi du même centre, y étant pouſſée par les parties qui rentrent par la force du choc en dedans du cerceau.

41. Il ſemble qu'en parlant de la force du choc, l'on ait attribué à cette force deux effets égaux entr'eux & à elle-même : ces efforts conſiſtent l'un à détruire dans le choquant une quantité de mouvement, & l'autre à la communiquer au choqué; mais on ne l'a fait que conformément à la loi établie & d'après l'expérience : ainſi quand même on ne pourroit pas donner de raiſon de cete double attribution, il n'en ſeroit pas moins certain que

la force qui lors du choc s'applique au choquant & au choqué produit dans l'un & l'autre corps des effets qui la repréſentent parfaitement & qui lui ſont égaux. Cependant ſi on fait attention que la force du choc en tant qu'elle s'applique au choquant, ſe détruit peu à peu, & que c'eſt en ſe détruiſant qu'elle ſe reproduit dans le choqué, on verra qu'à proprement parler, le mouvement détruit dans le choquant & le mouvement reproduit dans le choqué, ne ſont qu'un ſeul & même effet; ou ſi l'on veut on peut regarder l'un de ces effets, ſçavoir, le mouvement détruit dans le choquant comme la cauſe qui produit en ſe détruiſant, le mouvement dans le choqué, ce qui revient aux idées ordinaires. La même difficulté a lieu pour les corps à reſſort, & elle paroît même plus grande, parce que la force du choc eſt employée non-ſeulement à produire du mouvement dans des ſens oppoſez, mais encore à bander le reſſort; il paroîtroit donc qu'une même force auroit deux emplois differens; la difficulté ſeroit effectivement grande, ſi la compreſſion du reſſort étoit un effet different de l'applatiſſement ou de l'enfoncement des parties; mais la même force qui comprime le reſſort cauſe l'applatiſſement: ainſi les parties qui ſont immédiatement ſous le choc, reçoivent dabord en ſe comprimant le mouvement, & parce que le reſſort eſt tenu aſſujetti pendant tout le tems du choc, comme il a été expliqué, la réaction ne détruit pas ce mouvement imprimé aux parties enfoncées; il ſe tranſmet donc à la maſſe comme dans les corps mous ſans reſſort: ainſi la force du choc qui paroît d'abord avoir pluſieurs emplois differens, n'en a effectivement qu'un, qu'on peut enviſager ſous differens rapports.

DE LA FORCE DU CHOC.

42. La force du choc eſt l'impreſſion que deux corps reçoivent dans leur mutuelle rencontre; cette impreſſion eſt égale pour l'un & l'autre corps, & elle eſt ſans doute proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle détruit dans l'un, & qu'elle produit dans l'autre, ou bien qu'elle y produit & détruit tout enſemble.

43. Dans le choc de deux corps il y en a un qui communique du mouvement ſans en recevoir, & l'autre qui en reçoit ou en perd, ou bien qui en perd & en reçoit dans un même choc; par exemple, dans le cas où les corps vont directement l'un contre l'autre. Si l'on nomme *choquant* celui des deux corps qui perd toujours du mouvement ſans en jamais recevoir; & *choqué* celui qui en reçoit ou bien qui en perd; la force du choc ſera propor-

tionnelle à la quantité de mouvement que le choquant perd dans le choc ; de ſorte que dans la comparaiſon d'un choc à un autre ſi la quantité de mouvement perdue par le choquant eſt égale ou la même, la force du choc ſera auſſi la même ; ſi cette quantité eſt differente, la force du choc ſera inégale ou ne ſera pas la même.

44. Pour juger de la force du choc, il faut avoir égard à la viteſſe reſpective, & aux directions des mobiles. C'eſt pourquoi il faut diſtinguer deux ſortes de chocs, le choc direct, & le choc oblique. Le choc eſt direct lorſque les centres ſont mûs ſur la même ligne ; le choc eſt oblique lorſque les centres des boules ſont mûs ſur des lignes differentes.

DE LA FORCE DU CHOC DIRECT.

PROPOSITION SIXIE'ME.

45. *Dans le choc direct la ſomme des maſſes eſt à celle du choqué, comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant perd dans le choc.*

La propoſition a trois cas : ou l'un des corps eſt en repos, ou ils vont d'un même côté, ou bien ils ſont mûs l'un contre l'autre. On ſuppoſera dans les trois cas que la boule A eſt le corps choquant, & la boule B le choqué. La propoſition eſt pour les corps mous ſans reſſort, & pour les corps à reſſort conſiderez dans le premier tems qui eſt celui de la compreſſion, car dans ce premier tems la communication du mouvement ſe fait de même que ſi les corps étoient deſtituez de toute élaſticité.

Demonstration du premier cas. Soit nommée (V) la viteſſe du corps A, qui eſt la même que la viteſſe reſpective, (v) la viteſſe que le corps A garde après le choc ; $(V - v)$ ſera la viteſſe perdue dans le choc. Cela poſé, les corps A & B après le choc ſont mûs d'une viteſſe égale ; donc le corps B ſera mû avec la viteſſe exprimée par (v), & Bv ſera la quantité de mouvement que ce corps recevra dans le choc, & AV étant la quantité de mouvement du corps A avant le choc, & Av celle qui lui reſte après le choc, $AV - Av$ ſera la quantité qu'il en perd dans le choc : or cette quantité eſt égale à celle que le corps B reçoit (25.) ; donc $AV - Av = BV$; donc $A . B :: V . V - v$, & $A + B . B :: v + V - v . V - v$, & en effaçant les quantitez qui ſe détruiſent dans le troiſiéme terme, $A + B . B :: V . V - v$; c'eſt-à-dire, la ſomme des maſſes eſt

au choqué B, comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant perd dans le choc.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS, lorſque les corps ſont mûs ſuivant la même direction. Dans ce cas la viteſſe reſpective eſt égale à la difference des viteſſes propres, & le choquant n'atteint le choqué qu'avec cette différence, en ſorte que l'impreſſion qu'il en reçoit eſt la même que ſi étant en repos, le choquant n'étoit mû qu'avec la difference des viteſſes. Cela étant, ſi on nomme, comme dans le cas précedent (V) la viteſſe reſpective, (v) la partie de cette viteſſe que le choquant conſerve après le choc; ($V - v$) ſera la viteſſe que le choquant perd dans le choc, & l'on aura encore $A + B . B :: V . V - v$.

DEMONSTRATION DU TROISIÉME CAS, lorſque les corps ſont mûs ſuivant des directions oppoſées. Dans ce cas la viteſſe reſpective eſt égale à la ſomme des viteſſes propres. Si l'on nomme V la viteſſe du choquant, v la viteſſe qui lui reſte après le choc, (AV) ſera ſa quantité de mouvement avant le choc, & ($AV - Av$) celle qu'il perd dans le choc, (car Av eſt ſa quantité de mouvement après le choc,) & $V - v$ ſera la viteſſe qu'il perd dans le choc. Si l'on nomme v la viteſſe du corps B, (Bv) ſera ſa quantité de mouvement avant le choc, & Bv exprime celle qu'il aura après le choc, car ſa viteſſe après le choc eſt égale à celle du corps A après le choc. Les viteſſes propres étant V & v, la viteſſe reſpective ſera ($V + v$). Cela poſé, lorſque les corps ſe rencontreront 1°. le corps B perdra ſa viteſſe v. 2°. Il recevra la viteſſe v: ainſi le choc détruira 1°. ſa quantité de mouvement (Bv). 2°. Il recevra la quantité exprimée par Bv. Donc $Bv + Bv$ exprime l'impreſſion que le corps B reçoit dans le choc, le corps A reçoit auſſi la même impreſſion, laquelle eſt exprimée par $AV - Av$. Donc $AV - Av = Bv + Bv$; d'où l'on déduit $A . B :: v + v . V - v$, & $A + B . B :: v + v + V - v . V - v$. Si dans le troiſiéme terme on efface la quantité v qui s'y trouve avec des ſignes contraires, on aura $A + B . B :: v + V . V - v$; c'eſt-à-dire, la ſomme des maſſes eſt au choqué B, comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant perd dans le choc.

46. Dans le choc direct tant que la viteſſe reſpective demeure la même, & que les corps ſont auſſi les mêmes, la force du choc eſt la même. C'eſt-à-dire, que les corps en reçoivent la même impreſſion qu'elles que ſoient les viteſſes propres, ſoit qu'il n'y en ait qu'un qui ſe meuve, ſoit qu'ils ſe meuvent tous deux, ſoit qu'ils aillent ſuivant la même direction ou en ſens contraires.

Car ſi la viteſſe reſpective demeure la même, & que les maſſes ne changent point, les trois premiers termes des proportions précedentes ſeront les mêmes; donc le quatriéme terme ſera auſſi le même. Or ce quatriéme terme exprime la viteſſe que le choquant perd dans le choc; donc tant que la viteſſe reſpective eſt la même, le choquant perd la même viteſſe quelles que ſoient les viteſſes propres avant le choc, la maſſe étant ſuppoſée la même; par conſéquent l'impreſſion reçue dans le choc eſt auſſi la même.

47. Il eſt évident que ſi la viteſſe reſpective augmente ou diminue, la force du choc ſera plus ou moins grande, & qu'elle ſera proportionnelle à cette viteſſe : car les deux premiers termes de la proportion étant les mêmes, ſi la viteſſe reſpective qui eſt le troiſiéme, augmente ou diminue la viteſſe perdue par le choquant qui eſt le quatriéme terme, augmentera ou diminuera dans la même raiſon.

DE LA FORCE DU CHOC OBLIQUE.

48. Dans le choc oblique il faut avoir encore égard à la viteſſe reſpective avec laquelle les corps ou leurs centres s'approchent. Dans le choc oblique l'un des corps eſt en repos ou ils ſont tous deux en mouvement. On peut encore ſuppoſer que le corps qui choque rencontre un plan, & que ce plan eſt en repos ou en mouvement.

Plan d'incidence eſt la ſurface plane que le corps qui choque rencontre à l'inſtant du choc. Dans le choc oblique de deux globes, le plan d'incidence eſt répréſenté par la tangente qui paſſe par le point commun d'attouchement lorſqu'ils ſe rencontrent. *Angle d'incidence* eſt celui qui eſt formé par la direction du choquant & le plan d'incidence.

Lorſqu'un corps choque obliquement un plan, il ne le choque pas avec autant de force que s'il le rencontroit directement, car la direction pourroit être ſi oblique qu'il ne fît que l'effleurer. Entre le choc perpendiculaire qui eſt le plus grand de tous, & le choc le plus oblique qui ne differe pas ſenſiblement du mouvement parallele au plan : il y a donc une infinité de directions plus ou moins obliques ſuivant leſquelles le plan ſera choqué avec plus ou moins de force.

49. Lors donc qu'un corps choque obliquement, il faut diſtinguer deux efforts, l'un par lequel il preſſe le plan, l'autre qui n'y fait aucune impreſſion. Le premier de ces efforts doit être per-

pendiculaire au même plan ; car s'il étoit oblique, le plan ne ſeroit pas preſſé par tout cet effort. Le ſecond doit être parallele ; car ſi ſa direction étoit oblique, il feroit quelque impreſſion ſur le plan.

PROPOSITION SEPTIE'ME.

Fig. 4. 50. *La force du choc perpendiculaire eſt à la force du choc oblique, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence.*

DEMONSTRATION. Suppoſons que le corps A étant mû ſuivant la direction GD avec une viteſſe exprimée par la même GD rencontre directement le plan ZX & obliquement le plan RS, la force avec laquelle il choquera le plan ZX eſt à la force avec laquelle il frappe le plan RS, comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle GDR. Il faut faire le rectangle BDCG. La force avec laquelle il choque le plan ZX eſt à la force avec laquelle il choque le plan RS, comme GD eſt à GC ou BD : on en a donné la preuve dans le premier Livre I. (173. 177). Or GD eſt à GC comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle GDC. Donc, &c.

Voici une autre maniere de prouver la même propoſition. Puiſque le corps A ne choque ou ne fait impreſſion ſur les plans ZX, RS que par ſon mouvement ou ſa viteſſe, ces impreſſions ſont entr'elles comme les viteſſes avec leſquelles il s'approche des mêmes plans : or ces viteſſes ſont entr'elles comme GD & GC, car lorſque le tems eſt le même, les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus : or il eſt viſible que tandis que le centre du corps A parcourt GD perpendiculaire au plan ZX, il parcourt à l'égard du plan RS un eſpace égal à la perpendiculaire GC ou BD ; donc les viteſſes avec leſquelles le corps A s'approche des plans ZX, RS, & conſéquemment les impreſſions qu'il fait ſur ces plans, ſont entr'elles comme GD & GC, c'eſt-à-dire, comme le ſinus total & le ſinus d'incidence ſont entr'eux.

51. Le rapport de la force du choc direct au choc oblique eſt le même, ſoit que les plans ZX, RS ſoient choquez étant en repos ou en mouvement, pourvû que la direction GD faſſe avec ces plans les mêmes angles. Mais la force de chaque choc conſideré en particulier ſera differente ſelon que le plan ſera choqué étant en repos ou en mouvement. La viteſſe du corps A demeurant la même, ſi le plan eſt choqué étant en repos, la force du choc ſera plus grande que ſi le plan eſt choqué étant en mouvement, & qu'il fuie le corps A. Cette force ſera encore plus grande, ſi le plan eſt mû & qu'il aille au devant du corps.

Car

Car la force du choc augmente ou diminue ſelon que la viteſſe reſpective ou la viteſſe avec laquelle le corps & le plan s'approchent, eſt plus ou moins grande : or lorſque le plan eſt choqué étant en repos, la viteſſe reſpective eſt plus grande que lorſqu'il eſt choqué étant en mouvement & qu'il fuit le choquant, la viteſſe propre du corps A demeurant la même ; & lorſque le plan prévient le choquant, la viteſſe reſpective eſt encore plus grande que lorſqu'il eſt choqué en repos.

52. Lorſque deux corps ſe choquent, le plan d'incidence eſt commun aux deux, & il les accompagne ; on va néanmoins le conſidérer comme étant attaché au corps B. Fig. 5. 6. 7. 8. 9.

1°. On ſuppoſe que la ligne CH qui touche le corps B au point C, répréſente le plan d'incidence, la ſituation de ce plan étant ainſi ſuppoſée, il eſt néceſſaire que le corps A choque ou rencontre le corps B au point C, puiſque le plan d'incidence & le corps B n'ont d'autre point commun que ce point. 2°. Si du centre du corps A on mene AH perpendiculaire au plan CH, le corps A ne peut choquer ou toucher le corps B au moment de leur rencontre, que par le point D où la perpendiculaire AH rencontre la ſurface de la boule A ; car quelles que ſoient les directions & les viteſſes propres des corps A & B, il eſt certain que toutes les parties de ces corps, & du plan CH étant mûes parallelement à elles-mêmes, ce plan garde toujours la même ſituation à l'égard du corps A & des points de ſa ſurface ; donc pendant tout le tems du mouvement la ligne AH qui paſſe par le point D demeurera perpendiculaire au plan CH, autrement ce plan ne garderoit pas la même ſituation à l'égard du corps A & de ſes parties : or puiſqu'un globe ne touche un plan qu'en un point, lequel eſt ſitué ſur le rayon ou diametre qui eſt perpendiculaire au plan d'incidence, il s'enſuit que AH étant toujours perpendiculaire au plan CH pendant tout le tems du mouvement avant le choc, la boule A rencontrera ce plan par le point D extrêmité du rayon AD qui fait partie de la perpendiculaire AH. Donc au moment de la rencontre réciproque des corps A & B, ils ſe toucheront par les points C, D, quelles que ſoient d'ailleurs leurs directions & leurs viteſſes propres. 3°. La direction de la viteſſe reſpective eſt ſuivant la perpendiculaire au plan d'incidence CH, c'eſt-à-dire, que cette viteſſe eſt dirigée ſuivant AH. Car quelles que ſoient les directions propres des corps A & B ou du plan d'incidence CH, il eſt évident que l'eſpace que le corps A & le plan CH parcourent pour s'ap-

procher l'un de l'autre ou ſe fuir, eſt ſuivant la perpendiculaire AH, puiſqu'un corps ne s'approche ou ne s'éloigne d'un plan que ſuivant la perpendiculaire au même plan. 4°. L'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective juſqu'au moment du choc eſt égal à l'intervalle DH qui eſt entre le plan d'incidence & le point D par lequel le corps A choque ce plan. Car 1°. ſi le corps B ou le plan CH eſt en repos, ou s'il eſt mû vers le corps A, il eſt évident que la ſomme des eſpaces parcourus par la viteſſe reſpective, eſt égale à DH qui eſt tout l'eſpace que le corps A & le plan CH parcourent pour s'approcher. 2°. Si le corps B & le plan CH fuient le corps A, l'eſpace parcouru par la viteſſe reſpective ſera encore DH : car le ſurplus de l'eſpace que le corps A parcourt ſuivant AH, ne l'avance point pour attraper le corps B ou le plan CH, puiſque cet eſpace ne differe point du chemin que le plan d'incidence fait ſuivant la même AH pour fuir au devant du corps A. 5°. La conſtruction demeurant la même, ſi l'on ſuppoſe que les corps A & B, ou les points D, C ſont mûs par leurs mouvemens propres ſuivant les directions DG, CG avec des viteſſes exprimées par ces lignes, il eſt évident qu'ils ſe rencontreront en G par les points D, C, & que ſi du point G on mene RS parallele à CH, la ligne RS répréſentera la ſituation du plan d'incidence à l'inſtant du choc : car pendant que les points D, C décrivent les lignes DG, CG, le plan CH eſt mû parallelement à lui-même. Ces choſes étant conçues de la maniere qu'on vient de les expoſer, on peut établir la propoſition ſuivante touchant la force du choc oblique.

PROPOSITION HUITIE'ME.

53. *La force du choc oblique des corps* A *&* B *eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, à la viteſſe par laquelle les corps* A *&* B, *ou le plan d'incidence* CH *s'approchent avant le choc.*

DEMONSTRATION. Il faut du point D mener DI perpendiculaire au rayon AD de la boule A, cette ligne répréſentera la ſurface par laquelle la boule A s'applique à la boule B ou au plan d'incidence CH à l'inſtant que le choc commence. Cela poſé, il eſt évident que les directions propres des corps A & B, ou des points D, C étant ſuivant DG, CG. 1°. Le corps A ou le point D eſt mû obliquement à l'égard du plan CH ; ainſi ce corps avance & ſuivant la parallele & ſuivant la perpendiculaire au plan : la viteſſe propre étant exprimée par DG, la viteſſe paral-

lele eſt néceſſairement répréſentée par EG, & la viteſſe perpendiculaire par DE. 2°. La direction CG du point C, ou du plan CH, étant oblique à l'égard de la ſurface DI que ce plan doit rencontrer lors du choc, il eſt évident que le point C ou le plan CH avance de même & ſuivant la parallele & ſuivant la perpendiculaire à la ſurface DI, la viteſſe parallele eſt exprimée par FG, & la viteſſe perpendiculaire par CF : il eſt certain que les viteſſes paralleles au plan CH ou à la ſurface DI, ne contribuent en rien au choc, puiſque par ces viteſſes les plans CH & DI ne ſont que gliſſer l'un ſur l'autre ; il reſte donc qu'ils ſe choquent ou qu'ils s'appliquent l'un à l'autre par leurs viteſſes perpendiculaires : or ces viteſſes ne ſont pas toujours employées en entier à faire le choc, cet emploi total & ſans réſerve, n'a lieu que dans les cas ou la viteſſe perpendiculaire du plan CH eſt nulle. Comme lorſque Fig. 5. le corps B eſt choqué étant en repos, ou bien que la direction CG Fig. 6. eſt perpendiculaire à DH, ou encore lorſque les viteſſes perpendiculaires Fig. 7. ſont dirigées en ſens contraires ; mais dans les cas où les viteſſes perpendiculaires ſont dans le même ſens comme dans les Fig. 8. & 9 : il eſt évident que le corps A n'attrape le corps B ou le plan CH que par la difference de ces viteſſes ; ainſi dans tous les cas que l'on vient d'expoſer la force du choc eſt produite par la ſomme ou la difference des viteſſes perpendiculaires, (en ſuppoſant que les maſſes dans tous ces differens cas ſont les mêmes ;) mais la viteſſe reſpective qui eſt exprimée par DH, eſt dans tous ces cas égale ou à la ſomme ou à la difference des mêmes viteſſes perpendiculaires. Donc la force du choc oblique eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective.

54. Il eſt évident que dans le cas de la Fig. 9, les viteſſes perpendiculaires du corps A & du plan CH étant égales & dans le même ſens, *Il n'y a point de choc lorſque le corps A vient à rencontrer par le point* D *le corps* B *au point* C. Ce qui eſt encore évident, ſi on fait attention que durant tout le tems qui précede, la rencontre mutuelle des corps A & B qui doit ſe faire au point G, le corps A touche toujours le plan CH par le point D, & qu'ainſi ſa viteſſe reſpective par laquelle il s'approche du plan, eſt nulle ; par conſéquent il ne doit point y avoir de choc.

55. Il eſt auſſi évident que dans le choc oblique comme dans le choc direct, *tant que la viteſſe reſpective eſt la même, & les maſſes auſſi les mêmes, la force du choc ne change point quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes propres & les directions des corps* A & B.

CHAPITRE SECOND.

DU CHOC DES CORPS SANS RESSORT, où l'on expoſe les loix que ces corps ſuivent dans le choc.

56. DAns les loix du choc on détermine les quantitez de mouvement, les viteſſes & les directions que les corps prennent dans le choc. On donnera d'abord les regles du choc direct, enſuite les regles du choc oblique.

DES LOIX DU CHOC DIRECT DES CORPS SANS RESSORT.

On peut déterminer ces loix en nombres ou Géométriquement.

LOIX DU CHOC DES CORPS SANS RESSORT, EXPRIMÉES EN NOMBRES.

57. Le choc a trois cas généraux : le premier eſt quand un des corps eſt en repos : le ſecond lorſque les deux corps ſont mus en même ſens, & ſur la même ligne : le troiſiéme enfin lorſqu'ils ont des déterminations oppoſées.

PREMIER CAS ; lorſque l'un des corps eſt en repos.

58. Si le corps A choque le corps B en repos, *on aura la viteſſe des deux corps après le choc, en diviſant la quantité de mouvement du choquant par la ſomme des maſſes, & le quotient fera connoître la viteſſe de l'un & l'autre corps.*

Car les corps A & B après le choc vont d'une égale viteſſe, comme s'ils ne faiſoient qu'un même corps(29.), de plus le mouvement que le choquant perd dans le choc paſſe au choqué, en ſorte qu'il y en a la même quantité après qu'avant le choc (25.) : or lorſque la quantité de mouvement & la maſſe ſont connues, on a la viteſſe en diviſant cette quantité par la maſſe (*Liv.* I. 100. *n.* 2.) ; donc lorſque le corps A choque le corps B en repos, on a la viteſſe commune en diviſant le mouvement du corps A avant le choc, par la ſomme des maſſes.

Exemple. Suppoſons que le corps A ait 2 de maſſe & 14 de viteſſe ; & que le corps B ait 5 de maſſe. La quantité de mouvement avant le choc ſera exprimée par 28 produit de 14 & de 2. Si on diviſe ce produit par 7 qui eſt la ſomme des maſſes, le quotient 4 fera connoître que les corps A & B iront après le choc avec une viteſſe commune de 4 degrez.

59. On peut avoir d'une autre maniere la viteſſe cherchée. Il faut rappeller ce qui a été dit (45.), *Que dans le choc de deux*

corps, la ſomme des maſſes eſt à celle du choqué comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le choquant perd dans le choc. Dans l'hypotheſe preſente la ſomme des maſſes étant 7, & la viteſſe reſpective 14, l'on a 7 . 14 :: 5 . $x = \frac{14 \times 5}{7} = 10$; c'eſt-à-dire, que le corps A perd dans le choc 10 degrez de viteſſe; donc il lui en reſte 4; mais le corps B eſt mû après le choc avec une viteſſe égale à celle qui reſte au corps A; donc en retranchant de la viteſſe du corps A avant le choc la viteſſe qu'il y perd, on a la viteſſe commune des deux corps apres le choc.

60. La viteſſe commune étant trouvée, on aura la quantité de mouvement de chaque corps, ſi on multiple les maſſes de chacun par cette viteſſe.

61. On peut avoir encore la même quantité *en diviſant le mouvement du corps* A *avant le choc proportionnellement aux maſſes.* Or pour faire cette diviſion il faut dire, la ſomme des maſſes eſt à l'une d'elles, comme la quantité de mouvement avant le choc, eſt à celle que reçoit la maſſe qui entre dans la proportion. Il eſt évident que l'opération fait trouver la quantité de mouvement cherchée; car lorſque les viteſſes ſont égales, les quantitez de mouvement ſont comme les maſſes (*Liv.* I. 91).

62. Quant à la direction des corps après le choc, il eſt évident qu'ils ſont mûs ſuivant la direction du choquant.

63. Corollaire. Puiſque pour avoir la quantité de mouvement de l'un & de l'autre corps après le choc, il faut diviſer le mouvement du choquant avant le choc proportionnellement aux maſſes, il eſt évident que plus la maſſe du choqué B ſera grande, plus le choquant perdra de ſon mouvement; que ſi cete maſſe eſt infiniment grande par rapport à celle du choquant, celui-ci ne conſervera qu'une quantité de mouvement infiniment petite par rapport à celle qu'il communiquera au choqué, d'où l'on voit qu'après le choc le choquant ſera dans un repos ſenſible; mais puiſque la viteſſe du choqué eſt la même que celle du choquant après le choc, il s'enſuit que le choqué ſera auſſi dans un repos ſenſible.

64. D'où l'on voit que ſi un fort petit corps en choque un grand, il ne doit pas le déplacer ſenſiblement: car ſi la viteſſe du choquant eſt médiocre, la quantité de mouvement qu'il a, étant diſtribuée proportionnellement aux maſſes, la portion qu'il en conſervera ſera fort petite, & par conſéquent ſa viteſſe auſſi: or comme la viteſſe du choqué eſt égale à celle que le choquant

conſerve après le choc, il s'enſuit que le choqué ne ſera pas ſenſiblement déplacé. Que ſi la viteſſe du choquant eſt fort grande, & d'autant plus grande que ſa maſſe eſt petite, il ne déplacera pas encore le choqué, mais il le rompra plutôt ; car comme le mouvement ne ſe communique que ſucceſſivement, & que les parties qui reçoivent immédiatement le choc, ſont les premieres ébranlées, il eſt viſible qu'avant que le mouvement du choquant ait été diſtribué à toute la maſſe, elles ſeront enfoncées : ainſi le choquant vient plutôt à bout de rompre le choqué que de le mouvoir. C'eſt-là ce qui arrive lorſqu'on tire un mouſquet ou le canon contre un mur ou un autre corps d'une grandeur conſidérable. Lors donc qu'on veut mouvoir un corps par le choc, il faut proportionner la maſſe du choquant à celle du choqué.

Second cas : lorſque le choquant & le choqué vont d'un même côté.

65. On ſuppoſe que le corps B qui précede va moins vîte que le corps A, & qu'il peut en être attrapé.

66. *Pour avoir la viteſſe de l'un & de l'autre corps après le choc, il faut diviſer la ſomme des mouvements avant le choc, par la ſomme des maſſes, & le quotient exprimera la viteſſe commune après le choc.*.

Dans ce cas comme dans le précedent, la viteſſe après le choc eſt la même ; donc ſi on trouve la viteſſe des deux maſſes conſiderées comme un même corps, on aura la viteſſe de l'un & de l'autre : or tout le mouvement que le choquant perd dans le choc, paſſe au choqué, & il le conſerve, en ſorte que la ſomme des mouvemens après le choc, eſt la même dans les deux corps, qu'avant : de plus on trouve la viteſſe d'un corps en diviſant ſa quantité de mouvement par la maſſe ; donc en diviſant la ſomme des mouvemens avant le choc, par la ſomme des maſſes, on aura la viteſſe commune après le choc.

Exemple. Suppoſons que les maſſes des corps A & B ſoient, la premiere (2), & la ſeconde (3) ; la viteſſe de la premiere (7), & la viteſſe de la ſeconde 2, les quantitez de mouvement ſeront 14 & 6, produits des maſſes & des viteſſes, la ſomme des mouvemens avant le choc ſera donc 20. Si on diviſe cette ſomme par la ſomme des maſſes qui eſt 5, le quotient 4 ſera la viteſſe commune des corps après le choc.

67. On peut encore trouver la même viteſſe d'une autre maniere par la proportion. *La ſomme des maſſes eſt à celle du choqué B, comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant perd.*

dans le choc (45), la ſomme des maſſes étant 5, celle du choqué B 3, & la viteſſe reſpective qui eſt égale à la difference des viteſſes (*Liv.* I. 27.), étant 5, l'on aura 5 . 3 :: 5 . *x*. Il eſt évident que le quatriéme terme de cette proportion eſt 3 ; donc le corps A qui choque perd 3 degrez de viteſſe ; donc il lui en reſte 4 ; mais le corps B eſt mû avec une viteſſe égale à celle qui reſte au corps A (29.) ; donc la viteſſe commune après le choc eſt exprimée par 4.

68. La viteſſe commune étant trouvée, on aura la quantité de mouvement de chaque corps, en multipliant les maſſes par cette viteſſe.

69. On peut encore trouver le mouvement de l'un & l'autre corps après le choc, par une proportion ſemblable à celle dont on s'eſt ſervi dans le cas qui précede, en diviſant la ſomme des mouvemens proportionnellement aux maſſes.

70. Il eſt évident que les directions des corps après le choc ſont les mêmes qu'avant le choc.

Troisième cas : lorſque les corps ſont mûs ſuivant des directions oppoſées.

71. Ce cas général en renferme deux particuliers, car il peut arriver que les quantitez de mouvement des mobiles ſoient égales ou inégales.

Premier cas particulier : lorſque deux corps ſe choquent directement avec des quantitez de mouvement égales.

72. Lorſque deux corps ont des quantitez égales de mouvement, les viteſſes ſont en raiſon réciproque des maſſes. (*Liv.* I. 95.) Cela poſé,

73. Si deux corps ſe choquent directement avec des quantitez de mouvement égales, ou, ce qui revient au même, s'ils ſe choquent avec des viteſſes qui ſoient en raiſon réciproque des maſſes, après le choc ils ſeront en repos.

Car lorſque deux corps vont directement l'un contre l'autre, la force du choc détruit dans les deux des quantitez de mouvement égales à celle du plus foible, ou de l'un des deux quand l'un a autant de force que l'autre : or dans le cas préſent ces quantitez ſont ſuppoſées égales ; donc elles ſont détruites ; & les deux corps s'arrêtant ainſi l'un l'autre par des forces égales, demeurent en repos.

Second cas particulier : lorſque deux corps ſe choquent directement avec des quantitez de mouvement inégales.

74. *On aura la viteſſe commune après le choc en diviſant la dif-*

ference des mouvemens avant le choc par la ſomme des maſſes.

Car puiſque les corps ſont mûs en ſens contraires, la force du choc qui agit également ſur le plus fort & le plus foible (17.), détruit dans l'un & dans l'autre des quantitez égales de mouvement à celle du plus foible ; donc après le choc il ne reſte que la difference des mouvemens avant le choc, la ſomme des maſſes eſt donc mûe après le choc avec cette difference ; donc ſi on diviſe la difference des mouvemens avant le choc, on aura la viteſſe commune des deux corps après le choc.

Exemple. Suppoſons que les maſſes des corps A & B ſoient 2 & 3, & les viteſſes 13 & 2 les quantitez de mouvement ſeront 26 & 6, & leur difference ſera 20 ; ſi on diviſe 20 par la ſomme des maſſes qui eſt 5, le quotient 4 fera connoître que les corps ſeront mûs après le choc avec une viteſſe de 4 degrez.

75. On peut encore trouver la viteſſe commune après le choc par la même opération dont on s'eſt ſervi dans les deux premiers cas par la proportion, *La ſomme des maſſes & au choqué* B, *comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant* A *perd dans le choc.* La ſomme des maſſes étant 5 celle du choqué B 3, la viteſſe reſpective qui dans le cas dont il s'agit, eſt égale à la ſomme des viteſſes, étant 15 (*Liv.* I. 26.), on aura $5 . 3 :: 15 . x = \frac{3 \times 15}{5} = 9$; c'eſt-à-dire, que le corps A perdra dans le choc 9 degrez de viteſſe, il lui en reſtera donc 4 : or la viteſſe du corps B après le choc eſt la même que celle du corps A ; donc par l'opération preſcrite on trouve la viteſſe commune après le choc.

76. La viteſſe commune étant trouvée, *ſi on multiplie les maſſes par cette viteſſe, on aura la quantité de mouvement de chaque corps après le choc.*

77. On aura encore cette quantité en diviſant la difference des mouvemens avant le choc proportionnellement aux maſſes, comme on a fait dans les deux premiers cas.

78. Il eſt évident que le corps B ſera contraint par la force du choc de changer de direction, & de ſe mouvoir ſuivant celle du corps A.

79. Les regles que l'on vient de donner ſont pour les corps mous ſans reſſort : il reſteroit à donner les loix du choc des corps parfaitement durs, mais on ne convient point des principes ſur leſquels il faut les établir. Auſſi eſt-il rare de voir que les eſprits ſe réuniſſent ſur les points de phyſique où l'expérience manque abſolument. Les loix du choc tiennent de la nature des faits, elles ne ſont pas eſſentiellement telles ; la métaphyſique peut bien

bien en découvrir la poſſibilité ; mais leur réalité demeure cachée, ſi elle ne ſe déclare par l'expérience. Or puiſque l'on ne connoît point de corps abſolument durs que l'on puiſſe éprouver, ou il faut omettre de parler des loix du choc de cette ſorte de corps ; ou, ſi on le fait, il faut que ce ſoit par analogie avec ceux que l'on connoît. Lorſqu'on fait choquer des corps, on trouve que le plus ou moins de dureté n'apporte aucun changement aux loix qu'on vient d'expoſer ; & ſi l'on y remarque quelque difference, on s'apperçoit que c'eſt le reſſort qui la cauſe : ainſi il eſt plus que vraiſemblable que s'il y a dans l'univers des corps parfaitement durs, ils ſuivent dans le choc les loix des corps mous ſans reſſort.

MANIERE DE DÉTERMINER GÉOMÉTRIQUEMENT LA VITESSE commune avec laquelle les corps A *&* B *ſont mûs après le choc.*

80. On va déterminer les trois cas par une ſeule regle ; la Figure 10 ſervira pour le premier, la 11e pour le ſecond, & la 12e pour le troiſiéme. On ſuppoſe que les corps A & B partent en même-tems des points E, F, & qu'ils ſe rencontrent en C, les viteſſes propres des mobiles ſeront exprimées EC, FC qui ſont les eſpaces parcourus en même-tems, & la viteſſe reſpective ſera exprimée par EF. Cela poſé, ſi on fait la proportion, *La ſomme des maſſes* A + B *eſt au choqué* B, *comme la viteſſe reſpective exprimée par* EF *eſt à une autre ligne telle que* ED, elle exprimera la viteſſe que le choquant A perd dans le choc (45.), c'eſt pourquoi ſi de la viteſſe propre du corps A exprimée par EC, on retranche ED, le reſte DC ſera la viteſſe reſtante avec laquelle le corps A & conſéquemment le corps B ſeront mûs après le choc ; en ſorte que les mobiles parcourront enſemble un eſpace égal à DC dans un tems égal à celui auquel ils ont parcouru avant le choc, ſçavoir A, EC, & le corps B, FC. Fig. 10. 11. 12.

81. Si on diviſe la ligne EF en deux parties au point D telles que ED répréſente le corps B, & DF le corps A, en ſorte que l'on ait la maſſe du corps A eſt à celle du corps B, comme DF eſt à DE, c'eſt-à-dire, A . B :: DF . DE, le point D eſt appellé *centre commun de gravité* des corps A & B. Ce point eſt ainſi appellé, parce que ſi l'on conçoit que la ligne EF eſt une verge inflexible, & que les corps A & B ſoient deux corps peſants, ils ſeroient en équilibre ſur le levier EF ſoutenu par ſon point D, comme on fera voir dans le Livre ſuivant. La ligne EF diviſée de la maniere qu'on vient de dire, eſt dite diviſée dans la raiſon réciproque des maſſes.

82. *Dans le choc des corps* A *&* B, *la ligne* ED *qui exprime la viteſſe que le corps* A *perd, détermine par ſon extrémité* D, *le centre commun de gravité des corps* A *&* B.

Car l'on a A + B B :: EF . ED (45), ſi des antécedens on retranche les conſéquens, & qu'on compare les reſtes aux mêmes conſéquens, on aura A . B :: DF . ED ; c'eſt-à-dire qu'on aura la proportion exprimée dans la définition qu'on vient de donner ; donc le point D eſt le centre commun de gravité des corps A & B.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

83. *Dans le choc des corps* A *&* B *ſans reſſort, le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.*

Fig. 10. 11. 12. DEMONSTRATION. Par l'hypotheſe le centre commun de gravité eſt au point D, & le choc ſe fait au point C ; donc la viteſſe de ce centre avant le choc eſt exprimée par DC ; la viteſſe du corps A avant le choc eſt exprimée par EC ; d'ailleurs ce qu'il perd de cette viteſſe eſt exprimé par ED, en ſorte que la viteſſe commune des deux corps après le choc, eſt exprimée par DC ; donc la viteſſe du centre commun de gravité D, qui après le choc va avec la même viteſſe que la ſomme des maſſes, eſt auſſi exprimée par DC ; donc ce centre eſt mû avec la même viteſſe avant & aprés le choc.

84. *Dans le choc des trois corps* A, B, G, *le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.* On ſuppoſe que les trois corps ſe choquent en même-tems au point C.

Fig. 13. Si l'on diviſe EF dans la raiſon réciproque des maſſes A & B, au point D, ce point ſera le centre commun de gravité des corps A & B ; & ſi l'on diviſe DI au point H dans la raiſon réciproque de la ſomme des corps A + B & G, le point H ſera le centre commun de gravité des corps A + B ſuppoſez placez en D & du corps G ; & par conſéquent le point H eſt le centre commun de gravité des trois corps A, B, G ; donc HC exprime la viteſſe de ce centre avant le choc. Cela poſé, que les corps A, B, G ſe choquent dans un ſeul & même inſtant au point C, ou que l'on conçoive que le corps A choque dabord le corps B au point C dans un premier inſtant, & qu'enſuite le choc ſe fait entre les corps A + B réunis en une même maſſe, & le corps G, la viteſſe des trois corps, après le choc ſera la même dans l'une & l'autre hypotheſe ; car la quantité de mouvement après le choc, ſera égale à la ſomme des mouvemens avant le choc, ſi les trois corps

vont d'un même côté ; ou à la différence des mêmes mouvemens, si deux corps vont d'un même côté, & l'autre dans un sens opposé, soit que les corps se choquent dans un même instant, soit que le choc se fasse dans deux instans ; par conséquent la vitesse du centre commun de gravité après le choc sera la même dans l'une & l'autre hypothèse. Or si le corps A choquoit d'abord le corps B en C, il perdroit la vitesse ED, & la vitesse commune après le choc seroit exprimée par DG. Mais puisque le choc est entre les corps A + B & G, & que le point H est le centre commun de gravité des corps A + B qui ne font qu'une masse mûe avec la vitesse DC, & du corps G, il s'ensuit que cette masse perdra la vitesse DH (45. 82) ; donc les trois corps après le choc, & par conséquent leur centre commun de gravité, seront mûs avec la vitesse HC que ce centre avoit avant le choc.

Le raisonnement que l'on vient de faire peut s'appliquer au choc direct de tant de corps que l'on voudra supposer, quelles que soient leurs directions contraires ou non. D'où il suit que si plusieurs corps sans ressort se choquent directement, quel qu'en soit le nombre, le centre commun de gravité est mû avec la même vitesse avant & après le choc.

DES LOIX DU CHOC OBLIQUE DES CORPS SANS RESSORT.

85. Dans le choc oblique des corps, la vitesse absolue de chacun se résout en deux autres, dont l'une est parallèle au plan d'incidence, & l'autre est perpendiculaire au même plan ; c'est par la vitesse perpendiculaire que les corps se choquent, & qui seule reçoit quelque altération, car pour ce qui est de la vitesse parallele, elle demeure la même. Dans le choc oblique comme dans le choc direct, il faut avoir égard à la vitesse respective ; cette vitesse résulte des vitesses perpendiculaires ; lorsque l'un des corps est en repos, la vitesse respective est égale à la vitesse perpendiculaire du choquant ; lorsque les vitesses perpendiculaires sont suivant des sens opposez, la vitesse respective est égale à la somme des mêmes vitesses perpendiculaires ; mais si ces vitesses sont dans le même sens, la vitesse respective est seulement égale à leur différence.

PROPOSITION DIXIE'ME.

86. *Si les corps* A *&* B *sont mûs suivant des lignes* AC, BC *avec des vitesses exprimées par ces lignes qui sont les diagonales des rectangles* EG, LH, *ou bien que le corps* A *rencontre le corps* B *en repos au point* C, *je dis que si on divise* GH *au point* D *dans la rai-*

ſon réciproque des maſſes, DC *exprimera la viteſſe perpendiculaire que ces corps prennent dans le choc.*

Fig. 14. 15. 16. DEMONSTRATION. Il eſt évident que le choc ſe fera au point C, & qu'à l'inſtant que les corps ſe rencontreront, la viteſſe propre de chacun ſera décompoſée en deux autres, l'une parallele au plan d'incidence RS, & l'autre perpendiculaire au même plan, les viteſſes paralleles ſont exprimées par EC, LC, les viteſſes perpendiculaires par GC, HC; il eſt auſſi évident que GH eſt la viteſſe reſpective avec laquelle les deux corps A & B s'approchent, & parce que GH eſt diviſée au point D dans la raiſon réciproque des maſſes, ſi les corps étoient placez en G & H, le point D ſeroit leur centre commun de gravité (81.): or puiſque la force du choc eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective (53), quelles què ſoient les viteſſes propres des corps, il s'enſuit que le choc ſe fera en C de la même maniere que ſi les corps étoient placez en G & H, & qu'ils fuſſent mûs avec les ſeules viteſſes perpendiculaires GC, HC; pour lors le corps A perdroit de ſa viteſſe perpendiculaire, une partie exprimée par GD; donc DC exprimeroit la viteſſe commune après le choc; mais puiſque les viteſſes paralleles EC, LC, ne changent rien dans la force du choc, il s'enſuit que les corps A & B étant mûs ſuivant les directions obliques AC, BC, & que le corps B étant choqué en repos au point C, le corps A perdra auſſi la viteſſe GD, & que la viteſſe commune après le choc ſera DC.

87. Si l'on prolonge GC en Q, en ſorte que CQ ſoit égale à DC, que l'on prolonge RS en M pour former les rectangles QM, QS après avoir pris CM égale à CE, & CS égale à LC; je dis *qu'après le choc les corps ſeront mûs, ſçavoir le corps* A *ſuivant la diagonale* CN *du parallelogramme* QM, *& le corps* B *ſuivant la diagonale* CI *du rectangle* QS, *avec des viteſſes exprimées par ces diagonales.*

Dans l'inſtant du choc les corps prennent la viteſſe commune DC, les viteſſes EC, LC ne ſont point alterées par la force du choc, & les corps les conſervent dans leur entier; donc à l'inſtant du choc, les corps A & B ſont pouſſez ſuivant CM, CS & CQ avec des efforts exprimez par ces lignes; donc ils décriront les diagonales CN, CI avec des viteſſes proportionnelles aux mêmes diagonales, par la propriété des mouvemens compoſez.

PROPOSITION ONZIE'ME.

88. *Dans le choc oblique des corps ſans reſſort, le centre com-*

mun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.

Demonstration. Il faut mener la ligne AB, & tirer par le point D, DZ parallele au plan d'incidence RS qui rencontre AB au point P, duquel il faut mener PCO qui rencontre QN au point O, & prolonger BL qui rencontre DZ en K. Fig. 14. 15. 16.

Puiſque GH eſt diviſé au point D dans la raiſon réciproque des maſſes, il s'enſuit que ſi les corps étoient placez aux points G, H, le point D ſeroit le centre commun de gravité. Or AB eſt diviſé dans la même raiſon au point P par la parallele DZ (7. *Géom.*); donc le point P eſt le centre commun de gravité des corps A & B; donc la viteſſe de ce centre avant le choc eſt exprimée par PC; & parce que les triangles CPD, COQ ſont égaux en tout, il s'enſuit que ſi ce centre ſe trouve au point O lorſque les corps A & B arrivent aux points I, N, la viteſſe de ce centre après le choc étant exprimée par CO égale à PC, elle ſera la même avant & après le choc. Or lorſque les corps A & B arrivent aux points I, N, le centre commun de gravité eſt au point O. Car puiſque CS ou QI = LC ou DK, il s'enſuit que ZK = IN, & puiſque OQ = PD, ON = ZP; donc ſi KZ eſt diviſée au point P dans la raiſon réciproque des maſſes, IN ſera auſſi diviſée dans la même raiſon au point O qui ſera par conſéquent le centre de gravité. Or les triangles ſemblables APZ, BPK, font voir que de même que AB eſt diviſée au point P dans la raiſon réciproque des maſſes, KZ eſt auſſi diviſée au point P dans la même raiſon; donc IN eſt diviſée au point O dans la raiſon réciproque des maſſes placées aux points N, I; donc le centre de gravité des corps A & B eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.

89. Puiſque le centre commun de gravité des corps A & B eſt mû de P en C & de C en O, il s'enſuit qu'il eſt mû en ligne droite avant & après le choc. On a ſuppoſé aux corps qui ſe choquent des directions & des viteſſes à volonté; mais s'ils étoient mûs avec des viteſſes qui fuſſent données ſuivant des directions pareillement données, il faudroit auparavant déterminer par ce qui a été dit dans le premier Livre des mouvemens relatifs, ſi le choc eſt poſſible ou non, c'eſt-à-dire, ſi le choc doit avoir lieu ou non & trouver enſuite par les mêmes regles la ſituation du plan d'incidence au moment du choc: on ne s'arrête pas à donner des exemples du choc & de la rencontre mutuelle des corps dans cette hypotheſe, parce qu'on eſpere reprendre le même ſujet dans le ſecond Traité où l'on appliquera les principes des mouvemens

relatifs à des ſujets réels qui ſeront curieux & même intéreſſants, les éclipſes de Soleil, de Lune & autres points d'aſtronomie ou les mouvemens relatifs ont lieu, les diverſes machines qui ſont mûes par le choc d'un fluide, telles ſont les moulins à eau & à vent, &c.

CHAPITRE TROISIE'ME.

DU CHOC DES CORPS A RESSORT, où l'on expoſe les loix que ces corps ſuivent dans le choc, & les circonſtances communes à tous les chocs des corps à reſſort parfait.

90. DANS le choc des corps à reſſort parfait, il faut diſtinguer deux tems; le tems de la compreſſion, & le tems de la reſtitution du reſſort.

91. Tant que le choquant preſſe le choqué avec une viteſſe finie, le reſſort ſe comprime, & il ne peut ſe développer comme il a été expliqué (37). Le reſſort ne peut donc commencer à ſe rétablir que lorſque la compreſſion finit. On nommera encore ici choquant celui des deux corps qui perd du mouvement par la force du choc ſans en jamais recevoir, & choqué celui qui en reçoit comme étant plus foible.

92. *Le reſſort parfait ſe comprime avec une force égale à celle que le choquant perd durant la compreſſion.*

Car pendant que le reſſort ſe comprime il eſt aſſujetti, de maniere qu'il ne peut réagir contre le choquant ni lui ôter aucune partie de ſon mouvement, en ſorte que le choquant ne perd de ſa force ou de ſon mouvement qu'à cauſe de la réſiſtance que le choqué lui oppoſe, ce qui fait qu'il s'applique au choqué par toute la force qu'il perd durant le premier tems qui eſt celui de la compreſſion; donc le reſſort parfait qui ſe comprime avec une force égale à celle qui lui eſt appliquée, doit ſe comprimer avec une force égale à celle que le choquant perd dans le choc.

93. *Le reſſort ſe comprime dans le choquant, & le choqué avec une force égale à celle que le choquant perd durant le choc ou la compreſſion.*

Si le choqué étoit parfaitement dur, le reſſort du choquant ſe comprimeroit avec une force égale à celle qu'il perd dans le tems de la compreſſion; car le reſſort étant retenu durant le choc, ainſi qu'on a remarqué pluſieurs fois, toute la force que le choquant perd ſeroit employée à comprimer le reſſort; mais puiſque le choqué eſt élaſtique, & que d'ailleurs la force du choc eſt éga-

lement appliquée au choqué & au choquant (17.), il s'enſuit que le reſſort eſt également comprimé dans l'un & l'autre corps; il eſt donc comprimé avec une force égale à celle que le choquant perd dans le choc ou dans le tems de la compreſſion.

PROPOSITION ONZIE'ME.

94. *Si lorſque le reſſort ſe rétablit, le choquant & le choqué ne ſe touchoient point, qu'il y eût un intervalle entre deux, le reſſort ne communiqueroit en ſe reſtituant aucun mouvement, ou plutôt il n'augmenteroit ni ne diminueroit le mouvement que les corps prennent en vertu du choc.*

Demonstration. Concevons qu'un reſſort contourné en ſpirale ou en façon de tire-bourre, étant comprimé eſt ſuſpendu par un fil dans ſon milieu, & qu'après avoir été comprimé, il ceſſe de l'être, en ſorte qu'il puiſſe s'étendre librement par ſes deux extrémitez à droite & à gauche; il eſt viſible que la moitié du reſſort ſe débandera vers la droite, & l'autre moitié vers la gauche; il y aura donc dans le reſſort deux mouvemens contraires qui ſe détruiront ſans que le milieu du reſſort ni le fil qui le tient ſuſpendu puiſſent changer de place: ainſi le corps du reſſort, c'eſt-à-dire, les deux parties enſemble ne ſeront mûes ni en avant ni en arriere. Or puiſque le reſſort des corps ſe comprime de la même maniere dans le choc, (car durant ce tems le reſſort eſt retenu dans l'un & l'autre corps par ſes deux extrémitez); il faut dire que ſi les deux corps ne ſe touchoient point, qu'il y eût une intervalle entre deux, lorſque le reſſort ſe rétablit, une moitié de chaque corps ſeroit mûe par ſon reſſort en avant, & l'autre moitié en arriere; la reſtitution du reſſort ne communiqueroit donc aucun mouvement aux maſſes, & les mouvemens contraires ſe détruiſant, les corps ſeroient mûs après le choc avec la viteſſe qu'ils auroient priſe en vertu du choc. Fig. 17.

PROPOSITION DOUZIE'ME.

95. *Si lorſque le reſſort ſe rétablit les corps ſe touchent, ils reçoivent l'un & l'autre une quantité de mouvement égale à celle que le choquant a perdue dans le choc.*

Demonstration. Concevons encore que le reſſort qu'on a ſuppoſé ſuſpendu par un fil dans ſon milieu, rencontre lorſqu'il commence à ſe rétablir, un point fixe par une de ſes extrémitez, il ne pourra s'étendre que d'un côté; toute la force qu'il a ſera donc déterminée à le mouvoir de ce côté-là; le reſſort s'élance- Fig. 18.

ra donc avec une force égale à celle de la compreſſion. Par l'hypotheſe lorſque le reſſort après le choc commence à ſe détendre, les corps ſe touchent & ſe ſervent mutuellement d'appui ; le reſſort de chaque corps trouve donc un point fixe au moyen duquel il eſt déterminé à ne pouſſer le corps que d'un côté ; il doit donc donner au corps une quantité de mouvement égale à celle qui a été employée à le comprimer : or cette quantité eſt égale à celle que le choquant a perdue dans le choc ou durant la compreſſion ; donc le reſſort communique à l'un & à l'autre corps une quantité de mouvement égale à celle que le choquant à perdue dans le choc.

PROPOSITION TREZIE'ME.

96. *Pendant le tems que le reſſort ſe rétablit, les corps ſe touchent, & la partie du contact eſt un point fixe pour le reſſort de l'un & l'autre corps.*

DEMONSTRATION. Lorſque la compreſſion finit & que le reſſort commence à ſe rétablir, la partie poſtérieure du choqué tend à ſe mouvoir en arriere, & la partie antérieure du choquant tend à ſe mouvoir en avant, & cela pendant le tems de la reſtitution du reſſort ; la partie du contact eſt donc pouſſée en ſens contraires pendant le tems de la reſtitution ; donc les corps doivent demeurer appliquez l'un à l'autre pendant le même tems ; mais parce que le reſſort eſt également comprimé dans le choquant & le choqué, il s'enſuit que la partie du contact eſt également pouſſée en avant & en arriere ; donc pendant le rétabliſſement, elle ſert de point fixe au reſſort de l'un & l'autre corps.

97. *D'où il ſuit que le reſſort communique au choquant & au choqué des quantitez de mouvement égales à celles que le choquant a perdue dans le choc.*

98. On remarquera que les efforts contraires par leſquels la partie du contact eſt pouſſée également en ſens contraires, ne changent rien aux mouvemens que les corps ont pris dans le choc ; car ces efforts ſe contrebalancent, & ils n'ont d'autre effet que de tenir les corps appliquez l'un à l'autre pendant que le reſſort ſe rétablit.

99. *Le mouvement que le reſſort communique au choquant eſt contraire au mouvement primitif* Car pendant que le reſſort ſe rétablit, la partie antérieure du choquant eſt retenue de maniere qu'elle ne peut pas s'étendre & s'élargir ſuivant la direction du même choquant, le reſſort s'élance donc en arriere, & communique

nique en conſéquence au choquant un mouvement contraire au mouvement primitif.

100. *D'où il ſuit qu'après le choc il ne doit reſter dans le choquant que la difference des mouvemens qu'il auroit eus après le choc s'il eût été ſans reſſort, & du mouvement que le reſſort lui donne.*

101. *Si le choqué eſt en repos lorſque le choquant l'attrape, ou s'il eſt mû dans le même ſens, la quantité de mouvement qu'il reçoit tant par la force du choc que de la force de reſſort, eſt égale au double de celle que le choquant perd dans le choc ou égale au double de celle que le reſſort lui communique.*

Les quantitez de mouvement que le choqué reçoit tant de la force du choc que de la force de reſſort ſont égales l'une & l'autre à celle que la force du choc détruit dans le choquant (25.26. 97.), & cette derniere quantité eſt elle-même égale à celle que le choquant reçoit du reſſort; donc les quantitez de mouvement que le choqué reçoit tant de la force du choc que de la force de reſſort, ſont priſes enſemble égales au double du mouvement que le choquant perd par la force du choc, ou au double de ce que le reſſort lui en donne. Il eſt évident que ces deux quantitez que le choqué reçoit ſont dans le même ſens.

102. *Si les corps ſe choquent en allant l'un contre l'autre, la quantité de mouvement que le choqué, c'eſt-à-dire, le plus foible reçoit tant de la force du choc que de la force du reſſort, eſt égale à la difference de celle que le même choqué perd dans le choc, & du double de celle que le choquant y perd auſſi, ou du double de celle que le reſſort lui communique.*

Si le choqué étoit en repos, ou qu'il fût mû dans le ſens du choquant, la quantité de mouvement qu'il recevroit, ſeroit égale au double de celle que le choquant perd dans le choc, ou égale au double de celle que le reſſort lui communique; mais parce que le mouvement que le choqué a avant le choc, eſt contraire à cette quantité, il s'enſuit qu'après le choc il ne ſera mû qu'avec la difference des deux quantitez.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

103. *Dans le choc des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective ſe partage en vertu du reſſort, aux corps en raiſon renverſée des maſſes quelles que ſoient les viteſſes propres & les directions des corps avant le choc.*

Demonstration. Tant que la viteſſe reſpective eſt la même, la force du choc eſt la même, & le reſſort eſt également comprimé (46.); donc ſi les maſſes ſont les mêmes, elles re-

çoivent du reſſort la même viteſſe, quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes & les directions avant le choc. Donc ſi dans un cas la viteſſe reſpective ſe partage en raiſon renverſée des maſſes, la même choſe doit arriver dans tous les autres cas. Suppoſons que le choquant rencontre le choqué en repos, la viteſſe reſpective ſera égale à la viteſſe propre du choquant avant le choc. Cela poſé, le reſſort ſe comprime avec une force égale à celle que le choquant perd dans le choc; donc le reſſort en ſe rétabliſſant, communique au choquant & au choqué des quantitez de mouvement égales à celle que le choquant a perdu; donc les viteſſes que le reſſort communique ſont en raiſon réciproque des maſſes (*Liv.* I. 65.) il reſte donc que ces viteſſes priſes enſemble ſoient égales à la viteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, à la viteſſe du choquant avant le choc. C'eſt ce qu'on prouve en cette maniere. Comme la force du reſſort eſt égale à la force du choc, la viteſſe que le choquant reçoit du reſſort, eſt égale à celle qu'il perd par la force du choc; pareillement la viteſſe que le reſſort donne au choqué, eſt égale à celle qu'il reçoit de la force du choc, & celle-ci eſt égale à celle qui eſt commune, ou que le choquant conſerve dans le choc; donc les viteſſes que le reſſort donne aux maſſes ſont égales, l'une à celle que le choquant perd dans le choc, & l'autre à celle qu'il garde qui eſt la même que la viteſſe commune; mais ces deux viteſſes priſes enſemble, ſont égales à la viteſſe reſpective. Donc la viteſſe reſpective eſt égale aux viteſſes priſes enſemble que le reſſort donne aux maſſes, & par conſéquent le reſſort partage aux corps la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes.

Des loix du choc direct des corps a reſſort parfait.

104. Les corps à reſſort ſont mûs après le choc avec des viteſſes qui réſultent de celle qu'ils prennent par la force du choc, & de celle que le reſſort leur donne. La premiere viteſſe eſt appellée *commune*, la ſeconde viteſſe eſt une partie *de la viteſſe reſpective*; la viteſſe de reſſort eſt quelquefois contraire à la viteſſe commune, de ſorte qu'après le choc chaque corps n'eſt mû qu'avec leur difference; mais lorſque la viteſſe de reſſort eſt dans le même ſens que la viteſſe commune, la viteſſe après le choc eſt égale à leur ſomme: par la viteſſe commune les corps vont de compagnie après le choc comme s'ils ne faiſoient qu'une maſſe; mais par la viteſſe de reſſort après le choc ils ſe ſéparent. Si l'on nomme, comme ci-devant, choquant, celui des corps qui dans le choc communique du mouvement ſans en recevoir, & choqué celui qui en reçoit ſans en donner; la viteſſe de reſ-

ſort dans le choquant eſt contraire à la viteſſe commune, & dans le choqué la viteſſe du reſſort ſe réunit avec la viteſſe commune pour faire une viteſſe qui eſt après le choc, égale à leur ſomme. Au moyen de ces obſervations & des principes précedens, on peut donner une regle générale pour les corps à reſſort parfait.

105. *Regle générale pour déterminer les viteſſes & les directions des corps à reſſort parfait dans le choc direct.*

1°. Il faut chercher la viteſſe commune par les regles du Chapitre précedent, c'eſt-à-dire, trouver la viteſſe avec laquelle les corps ſeroient mûs enſemble après le choc, s'ils étoient ſans reſſort.

2°. Il faut diviſer la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes, & l'on aura la viteſſe de reſſort.

3°. La difference de la viteſſe commune & de la viteſſe de reſſort, ſera la viteſſe du choquant après le choc; mais le choqué ſera mû après le choc avec leur ſomme.

4°. A l'égard des directions, il eſt viſible que le choqué doit aller ſuivant la direction du choquant avant le choc, & que le choquant lui-même doit continuer après le choc de ſe mouvoir ſuivant ſa premiere direction, ſi la viteſſe commune eſt plus grande que la viteſſe de reſſort; mais il doit retourner en arriere ſi la viteſſe commune eſt plus grande.

5°. Si l'on nomme A le choquant & B le choqué, il faut, pour plus de facilité, marquer la viteſſe commune du ſigne +, ce qui ſignifie que cette viteſſe eſt dans le même ſens pour l'un & l'autre corps: il faut auſſi marquer la viteſſe de reſſort du choqué B du même ſigne +; mais il faut marquer du ſigne — la viteſſe de reſſort du choquant, ce qui ſignifie que cette viteſſe étant contraire à la viteſſe commune, il n'en doit reſter que la difference. Tous les articles de la regle ſont évidens par ce qui précede.

106. *Application de la regle aux trois cas généraux du choc direct.*

Premier cas, où l'on ſuppoſe que le corps A choque le corps B en repos. Les maſſes du choquant & du choqué ſont 3 & 5; la viteſſe du choquant qui dans le cas préſent eſt la même que la viteſſe reſpective, eſt de 16 degrez. Cela poſé,

1°. *On aura la viteſſe commune en cherchant d'abord celle que le choquant perd dans le choc:* car cette viteſſe étant retranchée de la viteſſe propre du choquant, le reſtant ſera la viteſſe commune. Pour trouver cette viteſſe, il faut dire, *La ſomme des maſſes eſt à celle du choqué* B *comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le choquant perd dans le choc:* c'eſt-à-dire, $3+5 . 5 :: 16 . x = \frac{16 \times 5}{3+5} = 10$. Le quotient 10 étant retranché de la viteſſe 16,

le reſte 6 fait connoître que ſi les corps étoient ſans reſſort, ils ſeroient mûs enſemble avec une viteſſe de 6 degrez. Il faut marquer cette viteſſe du ſigne + en cette maniere.

A + 6	B+6
A — 10	B+6
A — 4	B+12

2°. *Il faut chercher la viteſſe de reſſort en diviſant la viteſſe reſpective* 16 *dans la raiſon réciproque des maſſes :* par cette proportion, *la ſomme des maſſes eſt au choqué* B *comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le choquant* A *reçoit :* c'eſt-à-dire, $3+5 : 5 :: 16 . x = \frac{16 \times 5}{3+5} = 10$. Ainſi le choquant reçoit 10 degrez de viteſſe de la force de reſſort ; cette viteſſe étant retranchée de la viteſſe reſpective 16, le reſte 6 eſt la viteſſe que le reſſort donne au corps B, car le reſſort partage la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes. Cela fait, il faut marquer 10 du ſigne de —, & 6 du ſigne de + comme on voit au deſſous du réſultat de l'opération précedente, & la difference des deux premiers nombres 6, & 10 fera connoître que le corps A retourne en arriere avec 4 degrez de viteſſe, & la ſomme des deux derniers 6+6 fait voir que le corps B eſt mû ſuivant la direction du choquant avant le choc avec 12 degrez de viteſſe.

On remarquera que l'opération par laquelle on détermine la viteſſe que le reſſort donne au choquant, eſt la même que celle par laquelle on détermine la viteſſe qu'il perd dans le choc ; ce qui doit être ainſi, puiſque la viteſſe qu'il perd par la force du choc eſt égale à la viteſſe que le reſſort lui donne. C'eſt pourquoi on peut s'épargner la peine de faire une ſeconde proportion. Car ſi après avoir trouvé la viteſſe commune par la premiere opération, on écrit pour le choquant A au-deſſous de la viteſſe commune, la viteſſe qu'il perd dans le choc, avec le ſigne de — ; & après avoir ſouſtrait de la viteſſe reſpective, la viteſſe que le choquant perd dans le choc, on écrive pour le choqué B, le reſtant au-deſſous de la viteſſe commune avec le ſigne +, on aura par-là, tant la viteſſe commune que la viteſſe de reſſort ; c'eſt pourquoi la difference des deux viteſſes ſera celle avec laquelle le choquant eſt mû après le choc, & leur ſomme compoſera la viteſſe du choqué B.

Cette remarque a lieu pour les trois cas généraux.

107. COROLLAIRES. 1°. *Si les corps* A *&* B *ont des maſſes égales, le choquant* A *demeurera en repos, & le choqué* B *prendra la viteſſe du choquant avant le choc.* Car par la force du choc le corps A perd la moitié de ſa viteſſe ; donc la viteſſe de reſ-

ſort qui eſt égale à la viteſſe perdue par la force du choc, eſt auſſi égale à la viteſſe commune; ces viteſſes étant en ſens oppoſez, il s'enſuit que le choquant reſtera en repos après le choc, & le choqué B prendra toute ſa viteſſe : car la viteſſe commune & celle de reſſort dans le cas préſent ſont égales pour le corps B, & elles ſont en même ſens, de plus elles ſont égales priſes enſemble à la viteſſe du choquant avant le choc; donc le choqué B ſera mû après le choc avec une viteſſe égale à celle du choquant avant le choc.

108. 2°. *Si le choquant eſt plus grand que le choqué, après le choc il ſera mû ſuivant ſa premiere direction.* Car la viteſſe qu'il perd dans le choc eſt moindre que la viteſſe commune : la raiſon eſt que comme la maſſe du choqué B eſt moindre que la moitié de la ſomme des maſſes, auſſi la viteſſe que le choquant perd dans le choc eſt moindre que la moitié de la viteſſe reſpective (45.); donc la viteſſe commune qui eſt égale au reſtant, eſt plus grande que la viteſſe que le choquant perd par la force du choc, & par conſéquent plus grande que la viteſſe de reſſort qui eſt elle-même égale à celle que le choquant perd dans le choc. Mais la viteſſe du choquant après le choc, eſt égale à la difference de la viteſſe commune & de la viteſſe de reſſort; donc le choquant ſera mû après le choc ſuivant la direction de la viteſſe commune, c'eſt-à-dire, ſuivant ſa premiere direction.

109. 3°. *Mais ſi le choquant eſt moindre que le choqué, comme dans l'exemple propoſé, après le choc, il retournera en arriere.* Car pour lors la viteſſe qu'il perd dans le choc, ou celle que le reſſort lui donne eſt plus grande que la viteſſe commune : ainſi le choquant retournera en arriere avec la difference de ces viteſſes.

110. 4°. *Si le choquant eſt infiniment petit par rapport au choqué, il ſera réfléchi avec toute la viteſſe qu'il avoit avant le choc.* Car la viteſſe commune ſera infiniment petite, c'eſt-à-dire que le choquant perdra ſenſiblement toute la viteſſe qu'il avoit avant le choc (45.); mais la viteſſe qu'il reçoit du reſſort eſt égale à celle qu'il perd dans le choc (97.); donc le choquant retournera en arriere avec toute la viteſſe qu'il avoit avant le choc.

111. *Second cas : lorſque les corps ſont mûs ſuivant la même direction, & que le corps* A *attrape le corps* B.

On ſuppoſe que le corps A a 3 de maſſe & 22 degrez de viteſſe; le corps B 5 de maſſe & 6 de viteſſe. La viteſſe reſpective eſt 16, on trouvera par la proportion indiquée dans le

premier cas qui précede que le corps A perd 10 degrez de viteſſe par la force du choc ; donc il lui en reſte 12 qui eſt la viteſſe commune ;

A + 12 ——— B + 12
A — 10 ——— B + 6
A + 2 ——— B + 18

donc la viteſſe que le reſſort donne au corps A étant égale à celle qu'il perd dans le choc, elle ſera de 10 degrez qu'il faut écrire ſous la viteſſe commune avec le ſigne de —, & parce que la viteſſe reſpective eſt diſtribuée au choquant & au choqué dans la raiſon renverſée des maſſes, ſi de 16 on retranche 10, le reſte 6 eſt la viteſſe que le reſſort donne au choqué B, qu'il faut écrire ſous la viteſſe commune ; & l'opération finie on ſçaura que le choquant ſera mû après le choc ſuivant ſa premiere direction avec 2 degrez de viteſſe, & que le corps B en aura 18.

112. Dans ce ſecond cas il peut arriver que la viteſſe de reſſort ſoit plus grande ou moindre que la viteſſe commune, lors même que le choquant eſt moindre que le choqué, il peut donc arriver que le choquant retourne en arriere ou qu'il ſoit mû après le choc ſuivant ſa premiere direction. Mais ſi le choquant eſt plus grand ou même égal au choqué, il ſera mû après le choc ſuivant ſa premiere direction. Car la viteſſe reſpective étant moindre que la viteſſe propre du choquant, la viteſſe perdue par la force du choc ſera tout au plus la moitié de la viteſſe reſpective ; donc la viteſſe de reſſort qui eſt égale à la viteſſe perdue, ſera moindre que la moitié de la viteſſe du choquant avant le choc ; donc le choquant ſera mû ſuivant ſa premiere direction.

113. *Troisiéme cas : lorſque les corps ſe choquent en allant l'un contre l'autre.*

Ce troiſiéme cas général a deux cas particuliers ou les corps ſe choquent avec des quantitez de mouvement égales ou inégales.

114. *Premier cas particulier : les corps après le choc retournent en arriere avec leurs premieres viteſſes.*

La viteſſe reſpective eſt égale à la ſomme des viteſſes propres avant le choc. Cela poſé, par l'hypotheſe les quantitez de mouvement ſont égales ; donc les viteſſes ſont en raiſon reciproque des maſſes : or le reſſort partage auſſi la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes ; donc le reſſort donne aux corps des viteſſes égales à celles qu'ils avoient avant le choc leſquelles étant entierement détruites par la force du choc, il s'enſuit que les corps conſerveront toute la viteſſe que le reſſort leur donne ; donc ils ſeront mûs en arriere, ou ſeront réfléchis avec des viteſſes égales à celles qu'ils avoient avant le choc.

115. *Second cas particulier : lorſque les corps vont directement l'un contre l'autre avec des quantitez de mouvement inégales.*

On trouvera la viteſſe de chaque corps après le choc de la même maniere que pour les deux premiers cas généraux. Suppoſons que les maſſes du choquant & du choqué ſoient 3 & 5, leurs viteſſes avant le choc 12 & 4, la viteſſe reſpective eſt 16, on trouvera que la viteſſe que le choquant perd dans le choc eſt de 10 degrez, laquelle étant ôtée de ſa viteſſe 12, le reſte 2 fait connoître que les corps ſeroient mûs enſemble avec la viteſſe commune de 2 degrez, s'ils étoient ſans reſſort. Il faut donc marquer cette viteſſe du ſigne de +, il faut auſſi marquer au-deſſous de la viteſſe commune, la viteſſe 10 que le corps A perd dans le choc avec le ſigne de —, parce qu'elle eſt égale à la viteſſe de reſſort ; & après avoir retranché 10 degrez de la viteſſe reſpective 16, marquer le reſtant 6 avec le ſigne de + pour la viteſſe de reſſort du corps B, & l'on trouvera que les corps A, B retournent chacun en arriere avec 8 degrez de viteſſes.

A + 2 ——— B + 2
A — 10 ——— B + 6
A — 8 ——— B + 8

116. *Cas particuliers du choc des corps à reſſort parfait.*

1°. *Si les corps* A *&* B *égaux ſe choquent directement en ſens oppoſez, ils ſeront réfléchis en faiſant échange de leurs viteſſes avant le choc.*

Lorſque les corps *A* & *B* ſe choquent 1°. le corps *B* qui eſt le choqué perd ſa viteſſe, & en la perdant il en détruit une égale dans le corps *A*, car les maſſes ſont égales. 2°. Le corps *A* communique au corps *B* la moitié de celle qui lui reſte, par la raiſon que les maſſes ſont égales. C'eſt pourquoi ſi on nomme *V* la viteſſe que le corps *B* perd d'abord, *v* la viteſſe qu'il reçoit enſuite du corps *A*, l'on aura $V + 2v$ qui eſt la viteſſe du corps *A* avant le choc, & $V + v$ celle qu'il perd dans le choc, & *v* la viteſſe commune. La viteſſe reſpective dans le caspréſent eſt égale à la ſomme des viteſſes propres avant le choc, elle eſt donc égale à $V + V + 2v$ ou à $2V + 2v$. Or parce que les maſſes ſont égales, le reſſort la partage également ; la viteſſe de reſſort pour le choquant eſt donc $— V — v$, & pour le choqué $+ V + v$, les viteſſes après

$A + v$ ——— $B + v$
$A — V — v$ ——— $B + V + v$
$A — V$ ——— $B + V + 2v$

le choc ſont donc $-V$, & $+V+2v$. C'eſt-à-dire, que les corps ſont réfléchis en faiſant échange de leurs viteſſes avant le choc.

117. 2°. *Si les corps A & B ſe choquent directement en ſens oppoſez avec des viteſſes égales, que le choquant* A *ſoit triple du choqué* B, *après le choc il demeurera en repos, & le choqué* B *ſera mû avec la ſomme des viteſſes avant le choc.*

Si l'on nomme V la viteſſe de l'un ou de l'autre corps avant le choc, $2V$ ſera la viteſſe reſpective. Donc ſi l'on dit $3+1 . 1 :: 2V . x$ on aura $x = \frac{2V}{3+1}$ ou $\frac{V}{2}$ qui eſt la viteſſe que le choquant perd dans le choc: or puiſqu'il perd $\frac{V}{2}$ ou $\frac{1}{2}V$, il conſerve l'autre moitié de ſa viteſſe; donc la viteſſe commune eſt $\frac{1}{2}V$, la viteſſe de reſſort donne au corps A la viteſſe $\frac{1}{2}V$ qu'il perd dans le choc qu'il faut marquer du ſigne — ſous la viteſſe commune, & le corps B prend par la force du reſſort l'autre partie de la viteſſe reſpective, c'eſt-à-dire $+V+\frac{1}{2}V$ qu'il faut marquer du ſigne +. Après avoir pris la difference de la viteſſe commune & de reſſort pour le corps A, & la ſomme pour le choqué B, on trouve que le corps A perd toute ſa viteſſe & que le corps B eſt mû avec la ſomme des viteſſes propres avant le choc.

$$\begin{array}{ll} A+\frac{1}{2}V & B+\frac{1}{2}V \\ -\frac{1}{2}V & B+V+\frac{1}{2}V \\ \hline A^{\circ} & B+2V \end{array}$$

PROPOSITION QUINZIE'ME.

118. *Dans le choc direct des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.*

Demonstration. Lorſque deux corps ſont mûs en des ſens oppoſez, la viteſſe reſpective eſt égale à la ſomme des viteſſes propres; & ſi l'on imprime à l'un & à l'autre une égale viteſſe en même ſens, ce qui ſe fait en diminuant la viteſſe propre de l'un, d'autant qu'on augmente celle de l'autre, la viteſſe reſpective ſera encore la même; car en tant que deux corps vont également vîte dans le même ſens, ils gardent entr'eux la même diſtance, & ne s'approchent ni ne s'éloignent l'un de l'autre. Cela poſé, les viteſſes des corps à reſſort après le choc ſont compoſées de la viteſſe commune & de la viteſſe du reſſort; le reſſort partage la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes, ces viteſſes étant en ſens contraires ſi les corps étoient mûs

après

après le choc avec la seule viteſſe de reſſort, ils s'éloigneroient avec une viteſſe égale à la viteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, à la viteſſe par laquelle ils ſe ſont approchez l'un de l'autre avant le choc; mais puiſque par la viteſſe commune les corps vont également vîte dans le même ſens, il s'enſuit que par cette viteſſe ils gardent la même diſtance & qu'ils ſont dans un repos reſpectif; donc la viteſſe commune ne change point la viteſſe reſpective. Donc cette viteſſe eſt la même avant & après le choc.

MANIERE DE DÉTERMINER GÉOMÉTRIQUEMENT LES VITESSES des corps à reſſort parfait & après le choc.

119. Si les corps A & C ſont mûs ſuivant les directions AC, BC, (le corps B dans le premier des trois cas généraux n'eſt pas mû,) & que partant en même-tems des points E, F, ils ſe rencontrent en C; pour avoir les viteſſes & les directions des corps après le choc, 1°. Il faut faire la proportion A + B . B :: EF . ED. 2°. Il faut prendre CG qui ſoit égale à la difference de CD à ED, prendre auſſi CH qui ſoit égale à CD + DF. *Je dis que les corps après le choc arriveront en même-tems aux points* G, H, *& que* CG *eſt la viteſſe du corps* A *&* CH *la viteſſe du corps* B. Fig. 19. 20. 21.

1°. Puiſque les corps ſe rencontrent au point C, EC, FC expriment les viteſſes propres des mobiles avant le choc; donc EF qui eſt égale à la ſomme ou à la difference des viteſſes propres exprime la viteſſe reſpective; donc ED qu'on vient de trouver par la proportion exprime la viteſſe que le corps A perd dans le choc (45.); donc DC eſt la viteſſe qui lui reſte, & par conſéquent la viteſſe commune. 2°. Il eſt viſible que la force de reſſort donne au corps A une viteſſe égale à celle qu'il perd par la force du choc; donc elle eſt exprimée par ED; donc CG difference de ED à DC qui expriment la viteſſe de reſſort & la viteſſe commune, eſt la viteſſe avec laquelle le corps A eſt mû après le choc. 3°. Puiſque le reſſort donne au corps A la viteſſe exprimée par ED, le corps B en reçoit la viteſſe exprimée par DF, car le reſſort partage aux corps la viteſſe reſpective EF ou ED + DF dans la raiſon réciproque des maſſes. Si à la viteſſe commune DC, on ajoute la viteſſe de reſſort, on aura DC + DF ou CH qui exprimera la viteſſe du corps B après le choc. Donc le corps A arrivera en G dans le tems que le corps B arrivera en H.

120. Si la viteſſe que le corps A perd dans le choc étoit moindre que la viteſſe commune DC, ce corps continueroit à ſe mouvoir après le choc ſuivant ſa premiere direction, & l'on déterm-

neroit de la même maniere les viteſſes & les directions des mobiles après le choc.

121. On peut remarquer ici ce qu'on a déja prouvé *que la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.* Car dans le tems que les corps parcourent avant le choc EF par la viteſſe reſpective, ils parcourent après le choc CG + GH en s'éloignant l'un de l'autre : or CG = ED — DG & CH = DF + DC ; donc CG + CH = ED — DC + DF + DC, ou CG + GH = ED + DF = EF, c'eſt-à-dire, qu'en des tems égaux les mobiles parcourent des eſpaces égaux pour s'approcher & enſuite pour s'éloigner ; donc la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.

122. *Le centre commun de gravité des mobiles* A, B *eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.*

Puiſque le corps A perd dans le choc la viteſſe ED, il s'enſuit que le point D eſt le centre commun de gravité (82.) ; donc DC eſt la viteſſe de ce centre avant le choc. Or je dis que ſi on prend CI = CD, le centre commun de gravité arrivera en I pendant le tems que les mobiles iront en G & H, c'eſt-à-dire, dans un tems égal à celui pendant lequel le centre commun de gravité eſt allé de D en C. Il faut prouver que GI = ED ; ce qui eſt évident : car ED — DC = GC (120) ; donc ED = GC + DC, ou ED = GC + CI, parce que CI = DC ; donc GI = ED. Donc puiſque le centre commun de gravité eſt au point D lorſque les corps ſont en E & F, il s'enſuit que lorſqu'ils ſe trouvent aux points G, H, ce centre eſt au point I, puiſque GH = EF, & que GI = ED.

123. *Du choc direct des corps a reſſort lorſqu'ils ſont pluſieurs de ſuite poſez ſur une même ligne droite.*

Fig. 22. Pluſieurs boules d'yvoire égales étant poſées ſur un plan horizontal, de maniere qu'une ligne droite enfile les centres de toutes, & qu'elles ſe touchent, l'expérience fait voir que ſi la boule *b* va choquer la boule *c*, la derniere ſçavoir *g* ſe détache de la file, & les autres demeurent en repos. Si deux boules *a*, *b* l'une à la ſuite de l'autre vont choquer enſemble la boule *c*, les deux dernieres de la file ſçavoir *f*, *g* ſe détacheront & les autres demeureront en repos. S'il y avoit trois boules qui choquaſſent à la fois la boule *c*, il s'en détacheroit trois, & les autres demeureroient en repos.

124. Cet effet peut s'expliquer par les principes que l'on vient

d'établir. Suppoſons que les boules c, d, f, g ne ſe touchent point ; ſi la boule b va choquer la boule c, après le choc la boule c ſera mûe avec une viteſſe égale à celle de la boule b, & la boule b demeurera en repos ; je ſuppoſe que les deux boules ſont égales & à reſſort parfait, la boule c ira enſuite choquer la boule d avec la viteſſe qu'elle a reçûe, & elle la perdra toute en la communiquant à la boule d, la boule f recevra après toute la viteſſe de la boule d qui après le choc demeurera en repos, enfin la boule f après avoir choqué la boule g demeurera en repos comme les précedentes, & la ſeule boule g ſera mûe avec la viteſſe de la boule b qui a commencé le choc. Il paroît donc que s'il y avoit quelque intervalle entre les boules après le choc, il n'y auroit que la derniere qui ſeroit mûe, & que les autres demeureroient en repos : or quoique les boules ſe touchent, le même effet doit arriver ; c'eſt-à-dire, que le choc doit ſe faire de même que ſi les boules étoient ſéparées les unes des autres ; car lorſque la boule b choque la boule c, la boule c s'applatit par ſa partie antérieure & ſa partie poſtérieure, elle ſe ſépare donc de la boule d, & le choc ſe fait entre les boules b & c de même que ſi elles étoient ſeules ; donc la boule c recevra toute la viteſſe de la boule b qui après le choc demeurera en repos. La boule d étant choquée par la boule c ſe comprimera auſſi par ſa partie antérieure & ſa partie poſtérieure, & elle ſe ſéparera de la boule f, par là elle recevra toute la viteſſe de la boule c, qui après le choc demeurera en repos, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere g qui prendra la viteſſe de la boule f, & continuera de ſe mouvoir avec cette viteſſe, & les autres boules demeureront en repos.

125. Si les boules a & b vont choquer enſemble la boule c ; quoiqu'il ſemble d'abord qu'il n'y ait qu'un choc comme ſi les les deux boules ne faiſoient qu'une maſſe, il y en a néanmoins deux qui ſe font en deux tems differens : la boule b choque d'abord la boule c comme ſi elle étoit ſeule, & ſans que la boule (a) y ait aucune part ; enſuite la boule (a) choque la boule (b), & la boule b une ſeconde fois la boule c, en ſorte que la file des boules eſt choquée deux fois : cela étant, il doit ſe détacher deux boules, autant que la boule c eſt choquée de fois. Or il y a deux choc diſtinguez & qui ſe font en des tems differens ; car lorſque la boule b choque la boule c, elle ſe ſépare par ſa partie poſtérieure de la boule a, & le choc ſe fait enrre les boules b & c de même que ſi elles étoient ſeules ; la boule (a) qui n'a

encore rien perdu de ſon mouvement rencontre donc la boule *b* en repos auprès de la boule *c*, & lui communique toute ſa viteſſe comme cela doit arriver dans le choc des corps à reſſort parfait, lorſqu'ils ſont égaux. La boule *b* choque donc une ſeconde fois la boule *c*, d'où l'on voit que la boule *c* eſt choquée autant de fois qu'il y a d'autres boules qui s'approchent d'elle à la fois ; par conſéquent puiſqu'il ſe détache une boule lorſque la boule *c* eſt choquée une fois, il doit ſe détacher deux boules lorſqu'elle eſt choquée deux fois, il doit s'en détacher trois lorſqu'elle eſt choquée trois fois, &c.

126. Trois corps *a*, *b*, *c*, inégaux en maſſes ont leurs centres ſur la même ligne droite, le corps *a* eſt plus grand que le corps *b*, & le corps *b* plus grand que le corps *c* ; *Je dis que s'ils ſont à reſſort parfait, que le corps* a *choque le corps* b *en repos, & enſuite le corps* b *le corps* c *pareillement en repos, le corps* c *recevra une plus grande viteſſe que s'il étoit choqué immédiatement par le corps* a.

La viteſſe du corps *a* étant exprimée par 1, ſa quantité de mouvement ſera $1a \times 1$; & ſi on la diviſe par la ſomme des maſſes $a + b$ l'on aura la viteſſe commune après le choc ; laquelle étant doublée, ce ſera la viteſſe que le corps *b* reçoit tant de la force du choc que de la force de reſſort ; cette viteſſe eſt donc $\frac{2a}{a+b}$; & ſi l'on la multiplie par la maſſe *b*, l'on aura la quantité de mouvement qui meut le corps *b*. Cette quantité eſt donc $\frac{2ab}{a+b}$. Si on diviſe cette quantité par la ſomme des maſſes $b + c$, l'on aura la viteſſe commune après que la boule *b* aura choqué la boule *c* ; cette viteſſe eſt donc $\frac{2ab}{ab+bb+ac+bc}$. Si l'on diviſe la quantité de mouvement $a \times 1$ par la ſomme des maſſes $a + c$, l'on aura la viteſſe commune après que le corps (*a*) aura choqué le corps *c*. Cette viteſſe eſt donc $\frac{a \times 1}{a+c}$, & ſi l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $2b$, l'on aura $\frac{a \times 1}{a+c} = \frac{2ab}{2ab+2bc}$; les viteſſes que le corps *c* reçoit de la force du choc étant rencontré par les corps *b* & *a* ſont donc entr'elles comme les fractions $\frac{2ab}{ab+bb+ac+bc}$ & $\frac{2ab}{2ab+2bc}$: ſi on double les numérateurs, on aura les viteſſes totales qui renferment celles du reſſort ; les numérateurs étant les mêmes, elles ſont entr'elles réciproquement comme les dénominateurs ; donc les viteſſes que le corps *c* reçoit des corps *b* & *a* ſont entr'elles comme les quantitez $2ab + 2bc$ & $ab + bb + ac + bc$. Or je dis que la premiere quantité eſt plus grande que la ſeconde. Qu'on retranche de part & d'autre $ab + bc$, les reſtes ſeront $ab + bc$ & $bb + ac$: or le premier reſte eſt plus grand que

le ſecond, puiſque ſi on retranche le ſecond du premier, le nouveau reſte $ab + bc - bb - ac$ eſt encore poſitif, ce qui paroît en ce que ce dernier reſte eſt le produit de $a - b$ & de $b - c$ qui ſont deux quantitez poſitives, puiſque $a > b$ & $b > c$. Donc la viteſſe que le corps c reçoit du corps (a) par l'interpoſition du corps b, eſt plus grande que celle qu'il reçoit étant choqué immédiatement par le corps a.

127. Si le choc commençoit par le moindre corps, la même choſe arriveroit ; & ſi on fait pour le corps c ſuppoſé en mouvement, le même calcul qu'on vient de faire pour le corps a, on trouvera que la viteſſe que le corps a reçoit du corps b & celle qu'il reçoit immédiatement du corps c ſont encore entr'elles comme $2ab + 2bc$ & $ab + bc + bb + ac$. D'où il ſuit que le corps a reçoit plus de mouvement du corps c par la médiation du corps b, que s'il étoit immédiatement choqué par le corps c.

128. *La viteſſe que le corps* c *reçoit du corps moyen* b *eſt la plus grande qu'il eſt poſſible lorſque ce corps eſt moyen proportionnel géométrique entre les corps* a *&* c. *Tout autre corps moyen* d *plus grand ou moindre que* b, *lui communiqueroit une viteſſe moindre.*

Les viteſſes que le corps c reçoit de l'interpoſé b, & du choc immédiat du corps a, ſont entr'elles comme $2ab + 2bc$ & $ab + bc + bb + ac$, & parce que $ac = bb$, elles ſont entr'elles comme $2ab + 2bc$ & $ab + bc + 2bb$. Les viteſſes que le corps c reçoit de l'interpoſé d & du choc immediat du corps (a) ſont entr'elles comme $2ad + 2dc$ & $ad + dc + dd + ac$. L'on a donc les deux rapports $\frac{2ab+2bc}{ab+bc+2bb}$ & $\frac{2ad+2dc}{ad+dc+dd+ac}$ qui ſont les rapports des viteſſes que le corps c reçoit des interpoſez b & d, à la viteſſe que le corps c reçoit du choc immédiat du corps a. Si le premier rapport eſt plus grand que le ſecond, il s'enſuit que la viteſſe que le corps c reçoit du corps b eſt plus grande que celle qu'il reçoit du corps d. Il faut diviſer les deux termes du premier rapport par b, & ceux du ſecond par d, ce qui ne change point leur valeur: après l'opération l'on aura $\frac{2a+2c}{a+c+2b}$ & $\frac{2a+2c}{a+c+d+\frac{ac}{d}}$, ces rapports ayant un même antécedent, ils ſont entr'eux réciproquement comme les conſéquents, ils ſont donc entr'eux comme $a + c + d + \frac{ac}{d}$ & $a + c + 2b$. Ou bien après avoir ôté la fraction & avoir mis au lieu de ac ſon égale bb, comme $ad + dc + dd + bb$ & $ad + dc + 2bd$, les deux rapports précedens ſont donc entr'eux comme ces deux dernieres quantitez. Si la premiere eſt plus grande que la ſeconde après avoir retranché de part & d'autre la grandeur $ad + dc$, le premier reſte $dd + bb$ de-

vra être plus grand que le ſecond, & le premier rapport encore plus grand que le ſecond. Or $dd + bb > 2bd$. Cela eſt ainſi ſi $dd + bb - 2bd$ eſt une grandeur poſitive ſoit que l'on ſuppoſe $d > b$ ou $b > d$: or il eſt évident que $dd + bb - 2bd$ eſt une grandeur poſitive, car c'eſt le quarré de $b - d$ ou de $d - b$: donc ſoit que l'on ſuppoſe que l'interpoſé d eſt plus grand ou moindre que le corps moyen géométrique b, ſi l'on compare la viteſſe que le corps b communique au corps c, & celle que le corps a lui donne immédiatement, que l'on compare de même la viteſſe que le corps d plus grand ou plus petit que b communique au corps c, à celle que le même corps reçoit du choc immédiat du corps a, le premier rapport eſt plus grand que le ſecond ; donc la viteſſe que le corps c reçoit du corps moyen, eſt la plus grande qu'il eſt poſſible lorſque ce corps eſt moyen proportionnel géométrique entre a & c.

129. On prouvera par un raiſonnement & des opérations ſemblables que ſi le choc commence par le corps c & qu'il ſe termine au corps a, la viteſſe que ce corps reçoit du corps interpoſé, eſt la plus grande qu'il eſt poſſible lorſque ce corps eſt moyen proportionnel géométrique entre a & c. On prouve ordinairement cette propoſition en employant le calcul des infiniment petits, ou bien par la regle des plus grandes & des plus petites quantitez. Mais l'on vient de voir que cette preuve ſe préſente comme d'elle-même ſans avoir recours à ces moyens.

130. Si entre les corps a & c on place d'autres corps moyens proportionnels géométriques, *La viteſſe que le dernier* c *ou* a *recevra ſera d'autant plus grande qu'il y aura plus de corps interpoſez, & cette viteſſe ſera la plus grande poſſible* ; en ſorte que ſi l'on y plaçoit des corps plus grands ou plus petits que ces corps moyens proportionnels, la viteſſe iroit à la vérité en augmentant, mais elle ne ſeroit pas la plus grande poſſible.

131. Si l'on a pluſieurs corps ($a.na.n^2a.n^3a$, &c.) ils ſont en progreſſion géométrique, & l'expoſant de la progreſſion eſt n. Le ſecond contient le premier n de fois, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il eſt marqué par n, le troiſiéme contient auſſi le ſecond na, n de fois, ils ſont donc en progreſſion géométrique : or ſi on ſuppoſe que le premier choque le ſecond na, & que le ſecond choque le troiſiéme, &c. les viteſſes que les choquez recoivent tant de la force du choc que de la force de reſſort, ſont auſſi en progreſſion géométrique. Ainſi ſi la viteſſe du premier eſt 1, celle du ſecond ſera $\frac{2}{n+1}$; celle du troiſiéme ſera $\frac{4}{n+1 \times n+1}$; celle du

quatriéme ſera $\frac{8}{n+1 \times n+1 \times n+1}$ comme il eſt aiſé de le prouver en faiſant les opérations preſcrites pour trouver la viteſſe avec laquelle un corps à reſſort eſt mû après le choc : or il eſt évident que les grandeurs $1 \cdot \frac{2}{n+1} \cdot \frac{4}{n+1 \times n+1}$ &c. ſont en progreſſion géométrique, puiſque le quarré d'un des termes moyens eſt égal au produit de deux termes également diſtans. L'on voit que les numérateurs de ces fractions ſont le nombre 2 & les puiſſances de ſuite de ce nombre, & les dénominateurs $n+1$, & les puiſſances de ſuite de cette même grandeur, en ſorte que pour avoir un terme de la progreſſion, il faut élever $\frac{2}{n+1}$ au degré marqué par le nombre qui déſigne le rang du terme cherché, après l'avoir diminué de l'unité : ſi c'eſt, par exemple, le centiéme terme que l'on cherche, il faut élever $\frac{2}{n+1}$ à la 99e puiſſance.

Si on veut avoir le rapport de la viteſſe que le corps (a) communique au centiéme corps $n^{99}a$ en le choquant immédiatement, à la viteſſe qu'il lui donne par l'entremiſe des corps moyens. 1°. Il faut diviſer la quantité de mouvement $a \times 1$ par la ſomme des maſſes $a+n^{99}a$, doubler le quotient, & l'on aura $\frac{2a \times 1}{a+n^{99}a} = \frac{2}{1+n^{99}}$ qui exprime la viteſſe cherchée. 2°. La viteſſe que le centiéme corps reçoit par l'entremiſe des corps moyens étant $\frac{2^{99}}{n+1^{99}}$, le rapport cherché ſera le même que celui qui eſt entre les fractions $\frac{2}{1+n^{99}}$ & $\frac{2^{99}}{n+1^{99}}$. M. Huygens trouve que ſi l'expoſant n eſt égal à 2, en ſorte que les corps augmentent en raiſon double, ces viteſſes ſont entr'elles comme 1 eſt à 1.677000000000. Si le choc commence par le grand corps n^{99} le rapport de la viteſſe que le dernier corps qui eſt le moindre de tous recevra du choc immédiat, à la viteſſe qu'il reçoit étant choqué par l'entremiſe des corps interpoſez, n'eſt point different de celui qu'on vient de trouver. Les viteſſes conſiderées en elles-mêmes ſont néanmoins differentes des précédentes, car lorſque le mouvement commence par le grand corps, les viteſſes que le dernier corps reçoit tant dans le choc immmédiat, que par le choc des corps interpoſez

ſont plus grandes que la viteſſe primitive du choquant ; au lieu que ſi le mouvement commence par le petit corps, l'une & l'autre viteſſe ſont moindres que la viteſſe primitive du corps qui choque le premier. On ſuppoſe que la viteſſe reſpective ou la viteſſe du choquant eſt la même avant le choc.

Suppoſant encore que l'expoſant *n* de la progreſſion eſt égal à 2, M. Huygens trouve que ſi le mouvement commence par le grand corps, ſa viteſſe avant le choc eſt à celle qu'il communique au dernier corps (*a*) par le choc des corps interpoſez comme 1. eſt à 1476000000.

Du choc oblique des corps a reſſort parfait.

132. Dans le choc oblique la viteſſe de chaque mobile eſt décompoſée, & en même-tems que leur force preſſe le plan d'incidence ſuivant la perpendiculaire à ce plan, elle pouſſe encore les corps ſuivant la parallele au même plan. L'effort parallele ne reçoit aucun changement, aucune altération ; mais l'effort perpendiculaire ſuit la même loi que ſi le choc étoit direct.

133. Si les corps A, B à reſſort parfait ſont mus ſuivant les directions AC, BC obliques au plan d'incidence RS avec des viteſſes exprimées par AC, BC qui ſont les diagonales des rectangles EG, LH ; *Je dis que ſi on diviſe* GH *au point* D *dans la raiſon réciproque des maſſes, en ſorte que* A. B :: DH. DG. 1°. GD *exprime la partie de la viteſſe perpendiculaire que le choquant* A *perd dans le choc.* 2°. DC *exprime le reſte de cette viteſſe, & par conſéquent la viteſſe commune avec laquelle les corps ſeroient mûs de compagnie s'ils étoient ſans reſſort, & que le choc fut direct.* 3°. DH + DC *exprime la viteſſe perpendiculaire que le choqué* B *prend tant par la force du choc que de la force du reſſort.* 4°. CP *difference de* GD *à* DC *eſt la viteſſe perpendiculaire du corps* A *après le choc.*

Fig. 23. 24. 25.

La figure 23 eſt pour le cas où l'un des corps, par exemple, le corps B eſt choqué en repos : la figure 24 pour le cas où les corps vont d'un même côté, & la figure 25 pour celui où ils vont l'un contre l'autre. 1°. Il eſt évident que GH exprime la viteſſe reſpective avec laquelle les corps s'approchent du plan d'incidence RS, laquelle étant perpendiculaire à ce plan, doit faire toute la force du choc ; car les viteſſes AC, BC, obliques au plan d'incidence ſont décompoſées à l'inſtant du choc en deux efforts, l'un perpendiculaire & l'autre parallele au plan RS, les efforts paralleles ſont répréſentez par CE, CL, & les efforts perpendiculaires par GC, HC. Les efforts paralleles

ne

ne contribuent en rien à la force du choc ; il reſte donc que cette force provienne toute des efforts perpendiculaires GC, HC, dont la ſomme ou la difference exprime la viteſſe reſpective (la ſomme, ſi les corps vont l'un vers l'autre) (la difference, ſi l'un des corps fuit devant l'autre). Cela étant, le choquant A doit perdre la viteſſe exprimée par GD ; car ſi le choc étoit direct, en ſorte que les corps partiſſent en même-tems des points G, H, le corps A perdroit de ſa viteſſe GC, la partie GD, puiſque la viteſſe reſpective GH eſt diviſée dans la raiſon réciproque des maſſes (82.) ; mais puiſque les efforts paralleles ne ſervent ni à augmenter ni à diminuer la force du choc, il s'enſuit que les corps doivent recevoir la même impreſſion que s'ils ſe mouvoient directement ſur GH ; & par conſéquent 1°. le corps A doit perdre par la force du choc une partie de ſa viteſſe perpendiculaire exprimée par GD. 2°. Puiſque GC eſt la viteſſe perpendiculaire du corps A, il eſt viſible que DC eſt le reſte de cette viteſſe, & qu'elle exprime la viteſſe commune : car la viteſſe commune eſt dans tous les cas égale à la difference de la viteſſe propre du choquant à la partie qu'il en perd dans le choc (29). D'où il ſuit que le corps B après avoir perdu par la force du choc ſa viteſſe perpendiculaire HC (ſuppoſé qu'il doive la perdre) ſa viteſſe en vertu du choc eſt exprimée par DC. 3°. Le reſſort partage la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes (103.) : or par l'hypotheſe GH qui exprime cette viteſſe eſt diviſée au point D dans cette raiſon ; donc le corps B recevra tant de la force du choc que de la force de reſſort la viteſſe perpendiculaire exprimée par DC + DH. 4°. La viteſſe de reſſort étant pour le corps A contraire à la viteſſe commune, il s'enſuit que ce corps ne conſervera après le choc que la difference de GD à CD exprimée ſelon l'hypotheſe par CP.

134. Corollaire. *Il ſuit de-là que ſi on prolonge* EC *en* M *que l'on prenne* CM = CE *&* CS = CL, *qu'on prenne auſſi ſur le prolongement de* GC, CF = DC + DH, *qu'on forme les rectangles* PM, FS, *les diagonales* CN, CI, *feront connoître les routes que les corps ſuivent après le choc, & les viteſſes avec leſquelles ils ſont mûs.*

PROPOSITION SEZIE'ME.

135. *Dans le choc oblique des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.* Fig. 23. 24. 25.

DEMONSTRATION. Les corps A & B parcourent l'eſpace AB avant le choc pour s'approcher. Or puiſqu'ils arrivent aux points N, I, dans le même-tems qu'ils ſont allez en C pour ſe choquer, il s'enſuit qu'après le choc ils parcourent l'eſpace NI pour s'éloigner l'un de l'autre dans un tems égal à celui qu'ils ont employé pour s'approcher & parcourir l'eſpace AB ; ces eſpaces étant parcourus en même-tems, ils ſont entr'eux comme les viteſſes, & les viteſſes comme les eſpaces ; c'eſt pourquoi ſi les eſpaces AB, NI ſont égaux, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc. Or je démontre ainſi que ces eſpaces ſont égaux. CF = DH + DC. Si on retranche de part & d'autre CP, on aura PF = DH + DC — CP : or CP = DC — DG, ou DG = DC — CP ; donc ſi au lieu de DC — CP on prend ſon égale DG, on aura PF = DH + DG ; de plus AG = CM ou PN & BH = CS = FI ; donc le trapeze ABHG eſt égal en tout au trapeze PFIN : (dans la figure 24 ce ſont les trapezes PIFN, AHBG) ; donc NI = AB ; donc la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.

Fig. 23. 24. 25. 136. *Le centre commun de gravité dans le choc oblique des corps à reſſort parfait eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.*

Si les corps partoient des points G, H, le centre commun de gravité ſeroit au point D (81.), c'eſt pourquoi ſi du point D on mene DZ parallele à RS qui coupe AB au point V : comme cette ligne AB eſt diviſée dans la même raiſon que GH ou BX, il eſt évident que le point V eſt le centre commun de gravité des corps placez en A & B ; donc ſa viteſſe avant le choc eſt exprimée par VC. Si on prend PT = GD, & qu'on mene TO parallele à PN, il eſt évident que le point O où TO coupe NI, eſt le centre commun de gravité lorſque les mobiles ſont en N & I, puiſque NI = AB & que ces lignes ſont ſemblablement coupées par les paralleles TO, VDZ. D'ailleurs puiſque les trapezes PFIN, ABHG (dans la figure 24 ce ſont les trapezes PIFN & AHBG) ſont égaux en tout, & que PT = GD, les lignes TO, DV ſemblablement tirées ſont égales de plus CT = DC, puiſque GD ou PT + PC = DC ; donc les triangles rectangles CTO, CDV ſont égaux en tout ; donc CO = CV ; donc le centre commun de gravité parcourt CO après le choc dans le même tems qu'il a parcouru VC avant ; donc il eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc.

137. *Le centre commun de gravité eſt mû en ligne droite ou ſur la même ligne droite avant & après le choc, puiſque la ligne* VCO

eſt droite : car les triangles COT, CDV ſont égaux en tout, d'ailleurs les côtez CT, CD étant placez ſur une même ligne droite, il eſt néceſſaire que les côtez CO, CV ſoient auſſi ſur une ligne droite ; autrement les angles TCO, DCV oppoſez aux côtez égaux TO, DV, ne ſeroient pas égaux.

138. *Si dans le choc on ne fait point attention aux mouvemens particuliers, mais à celui des corps conſiderez comme ne faiſant qu'une maſſe, lequel ne peut être dirigé que vers un côté, on verra que la quantité de mouvement de ces corps eſt la même avant & après le choc* : car on juge du mouvement d'un corps, par exemple, d'un globe par la viteſſe de ſon centre de gravité ou de maſſe : or on vient de voir que le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc ; donc la quantité de mouvement des corps conſiderez comme ne faiſant qu'une maſſe, eſt la même avant & après le choc, ſoit que les corps ſoient élaſtiques ou non.

Du choc des corps a reſſort imparfait.

139. Le reſſort imparfait eſt celui qui ne ſe rétablit pas avec toute la force qui lui a été appliquée ; ce qui peut arriver en deux manieres, 1°. il peut ſe faire qu'un reſſort n'obéiſſe pas à toute l'action de la force qui le comprime à cauſe de la rigidité de ſes parties. 2°. Il peut arriver que les parties d'un reſſort ſoient foulées ou endommagées par une compreſſion trop grande, ce qui l'affoiblit, le rend languiſſant & moins prompt à ſe rétablir.

140. L'expérience fait voir qu'il y a peu de corps à reſſort parfait, ſur-tout parmi les corps groſſiers & ſenſibles. A l'égard des fluides il y en a dont la force élaſtique eſt ſi grande, qu'on n'en connoît point les bornes ; l'air & la flâme ſont de ce nombre.

Il eſt viſible que les corps à reſſort imparfait ne ſuivent pas dans le choc les loix des corps à reſſort parfait ; plus un reſſort approche d'être parfait, moins il s'en écarte. On peut ſe ſervir utilement des loix du choc des corps à reſſort parfait pour connoître les divers degrez d'imperfection des reſſorts imparfaits, & en les comparant au reſſort parfait déterminer par leur moyen de combien ils s'en éloignent. L'idée que l'on a du reſſort parfait, eſt qu'il ſe rétablit avec une force égale à la compreſſion : or on connoît que cela arrive, lorſque les corps après le choc, ſe ſéparent avec la même viteſſe reſpective qu'ils ſe ſont approchez avant ; ſi cette viteſſe eſt moindre c'eſt une preuve indubitable que le reſſort eſt imparfait, & d'autant plus imparfait qu'elle eſt plus petite.

141 Cela étant, on peut déterminer quels ſont les corps à reſſort parfait; & s'ils ſont à reſſort imparfait, quel en eſt le degré d'imperfection : & l'on peut donner pour cet effet cette regle générale, *Que les forces de deux reſſorts l'un parfait & l'autre imparfait ſont entr'elles comme la viteſſe reſpective avant le choc eſt à la viteſſe reſpective après le choc.* On conſidere ici les deux corps qui ſe choquent comme n'ayant qu'un reſſort. Puiſqu'après le choc des corps ſans reſſort, la viteſſe reſpective eſt nulle, que dès-là que les corps ont quelque reſſort, ils ſe ſéparent après le choc avec une certaine viteſſe, on peut regarder la viteſſe reſpective comme le propre effet du reſſort, comme un effet qui lui répond éxactement & qui en meſure la force. Si le reſſort rétablit la viteſſe reſpective avant le choc, il ne peut pas être plus parfait qu'il eſt, puiſqu'il redonne aux corps toute la force avec laquelle ils ſe ſont choquez; mais ſi la viteſſe reſpective après le choc eſt moindre qu'elle nétoit avant, c'eſt une preuve que la force du reſſort eſt moindre que celle qui a produit le choc; ſi la viteſſe reſpective après le choc n'eſt que la moitié, le tiers, le quart, &c. de la viteſſe reſpective avant le choc, la force d'un tel reſſort n'eſt que la moitié, le tiers, le quart, &c. de la force du reſſort parfait; d'où il ſuit que le reſſort parfait eſt au reſſort imparfait comme la viteſſe reſpective avant le choc eſt à la viteſſe reſpective après le choc.

142. On pourra comparer de cette maniere deux reſſorts imparfaits; ſi on ſuppoſe deux chocs où les viteſſes reſpectives avant le choc ſoient les mêmes, les forces de ces reſſorts ſeront entr'elles comme les viteſſes reſpectives après les chocs.

On va voir dans le Problême ſuivant de quelle maniere on peut s'y prendre pour faire choquer les corps avec une viteſſe reſpective déterminée.

PROBLÊME.

143. *Faire que deux corps ſe choquent directement avec des viteſſes qui ſoient entr'elles dans une raiſon donnée, par exemple, dont l'une ſoit double de l'autre.*

Fig. 26. 27. 28. Il faut avoir une piéce de bois de figure triangulaire telle que ABC, de maniere que la ligne BC ſoit parallele à l'horizon, la ſurface doit être plane & polie, de cinq ou ſix pieds de hauteur & perpendiculaire à l'horizon. DE eſt une ligne parallele à BC d'environ deux ou trois pouces de longueur diviſée en deux parties égales au point F. DI. FK, EL ſont trois lignes tracées ſur la ſurface

ABC, perpendiculaires à DE, égales entr'elles & de quatre ou cinq pieds de longueur. On plante deux clous aux points D, E, & l'on y attache deux filets ou ſont ſuſpendues deux boules, le tout en ſorte que ſi l'on imagine les trois lignes IH, K*d*, LG de quatre pouces chacune être élevées perpendiculairement ſur la ſurface ABC, les points G & H ſoient les centres des boules ſuſpendues, & le point *d* celui où elles ſe touchent étant en repos lorſqu'elles ſont égales: LM, IN ſont deux arcs de cercles de 30 degrez chacun dont les lignes DI, EL ſont les demi-diametres. Ces arcs ſeront diviſez par degrez depuis les points I & L, & les diviſions ſeront marquées par des petites lignes inclinées vers les centres D, E, comme la ligne XY. On peut prendre cette ſurface ABC dans un mur de pierre de taille ou de plâtre ſelon la commodité qu'on en aura. Ces choſes ainſi diſpoſées on tirera par le moyen d'un petit filet PT l'une des boules comme G juſqu'a ce que ſon centre ſoit vis-à-vis du point qui marquera le degré qu'on aura choiſi comptant les degrez depuis L. Si on veut prendre douze degrez, il faut élever le centre de la boule juſqu'au douziéme degré marqué par la ligne XY. On connoîtra que le centre de la boule répond au point X, ſi on prend un corps *abcg* qui ait la figure d'un priſme droit & qu'on le place ſur la ſurface ABC, de maniere que XY étant égale au demi-diametre LG de la boule, l'extrémité d'une de ſes arêtes telle que *bg* réponde perpendiculairement au point Y. Car ſi ſur cette aréte on a marqué une partie *by* égale à LG demi-diametre de la boule G, & que l'on tire par le moyen du petit filet PT, la boule juſqu'à ce que ſon fil de ſuſpenſion touche le point *y*, on ſçaura que le centre de la boule répond au point X, & que ce centre en deſcendant conſervera toujours la même diſtance à l'égard de la ſurface ABC.

* aretes

Si on veut que la boule H choque la boule G au point *d* avec une viteſſe double, il faut prendre la corde IN double de la corde LX, & élever le centre de la boule H juſqu'au point N. 1°. Les viteſſes que les boules acquerront par les arcs XL, NI ſont comme les cordes de ces arcs. 2°. Ces arcs ſeront décrits en des tems ſenſiblement égaux. M. Mariotte qui donne la deſcription de cette machine remarque que ſi les boules ne ſe choquent pas exactement au point *d*, il ne s'en faudra pas de l'épaiſſeur dune feuille de papier, ce qui n'empêche pas une éxactitude ſuffiſante dans les expériences. Si on veut que la boule H choque la boule G avec une viteſſe triple, il faudra lui faire parcourir un arc dont la corde ſoit triple de la corde LX. Si la boule RS qui repréſente une de celles

qui ſe choquent, eſt de matiere molle comme de la terre glaiſe, il faut placer au centre O un petit morceau de bois, afin qu'elle puiſſe être ſoutenue par le filet, & conſerver ſa figure ronde.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

Du choc qui produit la réflexion & la réfraction.

DU MOUVEMENT DE RÉFLEXION.

On a ſuivi le Mémoire de M. de Mairan ſur la réflexion des corps. Mem. de l'Accadémie Royale des Sciences année 1722.

144. LE mouvement de réflexion conſiſte en ce qu'un corps venant à rencontrer un obſtacle qu'il ne peut ſurmonter, eſt renvoyé & retourne en arriere. Si on laiſſe tomber une bale d'yvoire ſur un carreau, elle rebondit & revient par le chemin qu'elle a ſuivi en tombant; c'eſt ce retour que l'on appelle *réflexion*. Tout ce qui a été dit juſqu'ici des corps à reſſort prouve, qu'ils ſont propres à être réfléchis; lors, par exemple, que deux corps à reſſort ſe choquent directement avec des quantitez de mouvement égales, ils ſont réfléchis, parce que ne pouvant ſe pénétrer, & étant l'un par rapport à l'autre un obſtacle invincible, le reſſort qui a été bandé par la force du choc, ne peut ſe rétablir que dans des ſens oppoſez aux directions que les mobiles ont ſuivi avant le choc. Mais n'y a-t-il de réflexion que par le reſſort? un corps ſans reſſort, tel qu'un corps parfaitement dur, venant à rencontrer un plan inébranlable ſera-t-il réfléchi? c'eſt le ſentiment de M Deſcartes, lorſque dans ſa Dioptrique il explique la réflexion d'une bale qui va frapper la terre ſuivant une direction oblique ſans ſuppoſer de reſſort ni dans la bale, ni dans la ſurface qu'elle choque. Mais M. de Mairan prouve par pluſieurs raiſons que ſans le reſſort il n'y auroit point de réflexion dans le cas d'un corps réfléchiſſant inébranlable, tel que M. Deſcartes l'a ſuppoſé: car un corps inébranlable doit être regardé comme une maſſe infinie qui eſt en repos; or ſelon les loix du choc des corps ſans reſſort, le mouvement du corps qui vient frapper ſe diſtribue ſur toute cette maſſe infinie dans l'inſtant du choc, après quoi les deux maſſes, celle qui choque & celle qui eſt choquée vont enſemble & avec la même viteſſe que l'on trouve en diviſant la quantité de mouvement qui éxiſtoit avant le choc, par la ſomme des maſſes, ce qui donne une viteſſe infiniment petite, qui ne differe pas du repos; donc le corps choquant de

quelque viteſſe qu'il ſe meuve, ne ſe réfléchira point à la rencontre du corps infini en repos.

2°. Si la direction du corps choquant avant le choc eſt oblique au plan d'incidence, elle ſe décompoſe en deux forces, l'une perpendiculaire, l'autre parallele : la force perpendiculaire ſe conſume à preſſer le plan ; & parce que le plan n'a aucune vertu pour la rétablir, le corps ſera mû le long du plan ſans réflexion par la force parallele qui demeure ſeule.

3°. Si la réfléxion des corps & la conſervation du mouvement après le choc, ſubſiſtent indépendamment de la compreſſion, & de la reſtitution des parties des corps choquez, il n'y a point de difference par rapport à la réflexion entre les corps ſuppoſez ſans reſſort & les corps douez de reſſort ; l'élaſticité devient donc abſolument ſuperflue & de nulle propriété dans la nature. Toutes ces raiſons portent à croire que là où il n'y a point de reſſort, il n'y a point de principe de réflexion.

Si on a recours à l'expérience pour décider cette queſtion, on trouve que tous les corps qui ſont réfléchis à la rencontre d'un plan, ont du reſſort ; que la meſure & la grandeur de la réflexion répond au degré d'élaſticité, & que ceux qui n'ont point de reſſort, ne ſont point réfléchis ; car s'ils ſont mous ils conſument leur force à pouſſer le plan & à s'applatir ; s'ils ſont durs, on trouve encore que la réflexion n'eſt pas néceſſairement liée avec la dureté, puiſque les corps ne ſont pas toujours réfléchis à proportion qu'ils ſont plus durs, & que la réflexibilité n'eſt pas reglée ſur le plus ou moins de dureté.

Puiſque la vertu élaſtique eſt une force éxiſtente dans la nature, qu'elle eſt capable de produire la reflexion des corps, rien n'empêche qu'on ne lui rapporte ce mouvement ſinon comme à une cauſe générale, du moins comme à une cauſe qui ſuffit & qui eſt équivalente à toute autre cauſe qui ſeroit employée à la production de cet effet.

145. Dans le mouvement de réflexion, il faut remarquer la ligne de *direction*, qui eſt appellée *ligne d'incidence* lorſque le corps va choquer le plan, & *ligne de réflexion* lorſqu'après le choc il eſt réfléchi, telles ſont les lignes AC, CE ; *Le plan d'incidence* & de *réflexion* eſt celui à la rencontre duquel le corps eſt réfléchi, il eſt répréſenté par LL, le *point d'incidence* eſt celui où le corps choque le plan comme le point C, *point de réflexion* celui où la réflexion ſe fait. L'angle *d'incidence* eſt formé par la ligne d'incidence & le plan comme ACB : *l'angle de réflexion* Fig. 29.

eſt celui qui eſt formé par le même plan & la ligne de réflexion, tel eſt l'angle ECD : il y a enfin *la perpendiculaire au point d'incidence & de réflexion :* par exemple CH ; les angles formez par la perpendiculaire & les lignes d'incidence & de réflexion peuvent être appellés *complemens des angles d'incidence & de réflexion ou angles d'inclinaiſon de l'incidence & de la réflexion*, comme, par exemple, les angles ACH, HCE.

Il y a des Auteurs qui appellent angle d'incidence celui qui eſt formé par la ligne d'incidence, & la perpendiculaire au point d'incidence, & angle de réflexion celui qui eſt formé par la ligne de réflexion & la perpendiculaire au point de réflexion. On ſuppoſera que le plan à la rencontre duquel un corps eſt réfléchi, eſt inébranlable & infléxible.

146. De même que le choc peut être direct ou oblique, la réflexion peut auſſi ſe faire ſuivant une ligne perpendiculaire ou oblique au plan.

147. *Dans le choc direct toute la force ou mouvement du choquant eſt employée à bander le reſſort.* Car pendant que le reſſort ſe comprime, il eſt aſſujetti de maniere qu'il ne peut réagir contre le choquant ni lui ôter aucune partie de ſon mouvement ; donc le reſſort ſe comprime par toute la force que le choquant perd dans le choc, comme il a été expliqué dans le choc des corps à reſſort parfait ; par l'hypotheſe, le plan d'incidence eſt inébranlable, ou, ce qui revient au même, il appartient à une maſſe infiniment plus grande que n'eſt le choquant ; donc le choquant perd toute ſa force ou ſa viteſſe dans le choc ; ou bien celle qui lui reſte eſt infiniment petite par rapport à ſa viteſſe avant le choc, & elle ne differe pas ſenſiblement du repos ; donc le choquant perd toute ſa viteſſe à choquer le plan inébranlable ; donc le reſſort ſe comprime par toute cette force.

148. *Dans le choc oblique la force du choquant ſe décompoſe en deux efforts, l'un perpendiculaire, l'autre parallele au plan d'incidence. L'effort parallele tend à faire rouler ou gliſſer le corps ſur le plan, mais l'effort perpendiculaire ſe conſume tout entier à comprimer le reſſort.* 1°. *Dans le choc oblique pendant le tems que le reſſort ſe comprime le corps eſt mû le long du plan ;* car la force horizontale n'étant point empêchée ou retenue doit être employée à mouvoir le corps le long du plan : *d'où il ſuit que le point de réflexion eſt different du point d'incidence.*

149. *Si le plan eſt mathématique ou parfaitement poli, le corps doit gliſſer*, (on ſuppoſe qu'il eſt de figure ſphérique). Car ſi la force

force horizontale étoit ſeule appliquée au corps comme ſa direction paſſe par le centre toutes les parties de la ſphere ſeroient déterminées à ſuivre celle du centre, le corps gliſſeroit donc le long du plan : or la force perpendiculaire au plan ne change rien à cette détermination, elle n'a d'autre effet que d'appliquer le corps contre le plan qui étant parfaitement poli n'oppoſe aucune réſiſtance au mouvement parallele ni à la force qui le produit, par conſéquent le corps doit gliſſer le long du plan pendant le tems que la force perpendiculaire comprime le reſſort.

150. *Si le plan eſt raboteux le corps doit rouler pendant la compreſſion du reſſort*, (on ſuppoſe encore que c'eſt une ſphere). Car pour lors la ſphere s'engage en partie dans les cavitez de la ſurface qu'elle rencontre ; donc les parties inférieures de la ſphere ſont retardées par les inégalitez du plan où elles ſont comme enfoncées, tandis que les parties ſupérieures peuvent obéir à tout l'effort de la force qui leur eſt appliquée ; les parties ſupérieures ſeront donc mûes plus vîte que les inférieures ; d'où réſultera le tournoyement de la ſphere ſur ſon centre, & le roulement ſur le plan.

151. *Si le plan d'incidence eſt parfaitement poli & inflexible, la force parallele demeure la même pendant la compreſſion du reſſort, & la direction du mobile devient de plus en plus inclinée au plan d'incidence.*

Car à l'inſtant que le globe rencontre le plan d'incidence, la force qu'il a ſuivant ſa direction eſt décompoſée en deux efforts, l'un perpendiculaire, l'autre parallele au plan : or ſoit que l'on conçoive un ſeul ou pluſieurs chocs ſucceſſifs, l'effort parallele ne ſouffre aucune diminution ; ces deux efforts ſont répréſentez par les côtez d'un parallelogramme rectangle dont la diagonale exprime la force du corps avant le choc. Il eſt évident que lors du premier choc il n'y a que l'effort exprimé par le côté perpendiculaire, qui ſoit diminué par la réſiſtance du plan, l'effort parallele demeurant dans ſon entier ; donc après ce premier choc la direction du mobile réſultera de l'effort parallele non diminué & du reſte de l'effort perpendiculaire. Cette nouvelle détermination ſera ſuivant la diagonale d'un nouveau parallelogramme, dont le côté parallele ſera le même que dans le premier. Il eſt auſſi évident que dans le ſecond choc la force du mobile ſera décompoſée dans les mêmes efforts qui l'ont produite, & que dans cette ſeconde décompoſition le ſeul effort perpendiculaire ſera diminué par la réſiſtance du plan, l'effort parallele demeurant dans ſon entier ; or il eſt clair que l'effort

parallele dans cette ſeconde décompoſition eſt le même que dans la précedente lors du premier choc. On fera voir de la même maniere que dans les autres décompoſitions qui arriveront pendant le tems de la compreſſion du reſſort l'effort parallele eſt le même que dans la premiere. Donc ſi le plan d'incidence eſt parfaitement poli & infléxible, l'effort parallele demeure le même pendant la compreſſion du reſſort.

152. *Il eſt évident en ſecond lieu que la direction du mobile devient de plus en plus inclinée au plan d'incidence.* Car cette direction eſt indiquée par la diagonale d'un parallelogramme rectangle, dont l'un des côtez, ſçavoir celui qui eſt perpendiculaire au plan d'incidence, diminue juſqu'à s'évanouir pendant que l'autre côté demeure le même. Or il eſt viſible que cette diagonale s'incline de plus en plus au plan juſqu'à lui devenir parallele. Donc, &c.

153. 1°. *Si le plan d'incidence eſt raboteux ou inégal, l'effort parallele eſt diminué par la réſiſtance des inégalitez, ce qui eſt évident.*

154. 2°. *Si le plan eſt parfaitement poli, dans le choc oblique le reſſort eſt comprimé par tout l'effort perpendiculaire qui réſulte de la force du mobile lorſqu'elle eſt décompoſée à la rencontre du plan.* Car pendant la compreſſion du reſſort le corps ne fait que gliſſer ſur le plan ſans rouler; donc il s'applique au plan & le touche pendant tout ce tems par la même partie; donc pendant tout le tems que dure la compreſſion le reſſort eſt aſſujetti de même que ſi le choc étoit direct; donc il doit être comprimé par tout l'effort perpendiculaire de même que dans le choc direct.

155. *Si le plan eſt raboteux, le globe roulera & la compreſſion du reſſort ſe fera ſucceſſivement ſur pluſieurs parties du globe, ſçavoir ſur celles par leſquelles il touchera le plan.* Or il eſt évident que lorſque la partie comprimée ceſſera d'être appliquée contre le plan & de le toucher, elle ſe rétablira dans ſon premier état, & que le reſſort ſe détendra avant que la compreſſion finiſſe. *Si cela eſt, comment eſt-ce que le reſſort redonnera au corps toute la force par laquelle il a été comprimé*, ainſi qu'on ſuppoſe & que l'expérience confirme qu'il lui redonne en effet ſenſiblement? M. de Mairan qui ſe propoſe la difficulté, donne une réponſe fort ſubtile, mais qui leve la difficulté & y ſatisfait pleinement. En voici le ſens. Concevons un cerceau de balene ou d'acier trempé qui ſoit preſſé contre le plan LL par un effort qui ſoit capable de l'applatir & de lui faire toucher le plan dans la partie AB, cette partie ne peut s'approcher du centre que la partie ANE ne

Fig. 30.

s'en éloigne en ſe renflant vers G. Cela poſé que le cerceau en roulant s'applique par ſes differentes parties au plan LL, & qu'après l'avoir touché dans ſa partie AB, il s'y applique par la partie AE, la partie AB ceſſant de toucher le plan, s'élancera vers R autant en deça du point K qu'elle s'en étoit éloignée en dela vers le centre C; (c'eſt-là une propriété que tout le monde connoît dans les reſſorts qui conſiſte à faire les mêmes vibrations que les pendules, & à s'éloigner de part & d'autre également du repos,) la compreſſion finiſſant en AB, la partie AGE qui par ſa tenſion avoit été contrainte de s'éloigner du centre C, s'en approchera donc, mais elle ne s'arretera pas au repos en N, elle paſſera au-delà comme en M tant par ſa force propre que par ce que ce mouvement eſt favoriſé par le rétabliſſement de la partie AB. Lors donc que la partie AB s'appliquera au plan LL, la force avec laquelle cette partie s'approchera du centre eſt compoſée de la force actuelle qui applique le cerceau & de la réaction ou reſtitution du reſſort qui ſe fait ou qui vient de ſe faire. Donc le reſſort doit ſe comprimer dans le cas où le globe roule avec la même force que ſi c'étoit la même partie du mobile qui reçut toute la compreſſion.

156. On peut même penſer que la compreſſion du reſſort eſt quelque peu plus grande que ſi le plan étoit parfaitement uni : car on peut regarder les inégalitez du plan qui retardent le globe par ſa partie inférieure, comme un plan à la rencontre duquel le mouvement du mobile ſe décompoſe : or il eſt aiſé de ſe répréſenter qu'un tel plan formé par differentes petites hauteurs ou éminences, eſt moins incliné à la direction du mobile que n'eſt la ſurface ſur laquelle elles ſe trouvent, d'où il ſuit que l'effort perpendiculaire que la décompoſition donne, doit être plus grand que ſi le plan étoit uni, par conſéquent le reſſort doit ſe bander avec plus de force.

PROPOSITION DIX-SEPTIE'ME.

157. *Si un corps de figure ſphérique & à reſſort parfait choque un plan inébranlable & parfaitement poli, il eſt réfléchi de maniere que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence.*

Il y a deux cas, ou bien l'incidence du globe eſt perpendiculaire ou oblique au plan.

Premier cas. Dans le premier cas la force du mobile eſt toute employée à comprimer le reſſort; donc lorſque la compreſſion finit il en reçoit toute la force qu'il lui a communiquée, & parce que

le reſſort réagit en un ſens directement oppoſé à celui de la compreſſion, il s'enſuit que le mobile ſera réfléchi ſuivant une direction perpendiculaire au plan d'incidence, & qu'il retracera en s'en éloignant la même ligne qu'il a décrite en s'en approchant ; donc l'angle de réflexion ſera égal à l'angle incidence.

Second cas. Dans le ſecond cas la force du corps choquant eſt décompoſée à l'inſtant du choc, en deux efforts, l'un parallele, l'autre perpendiculaire au plan d'incidence; l'effort perpendiculaire eſt tout employé à choquer le plan & à comprimer le reſſort; don après la compreſſion le reſſort redonnera au mobile cet effort dans ſon entier & dans les mêmes circonſtances que le mobile le lui a communiqué durant le choc ; donc cet effort doit tendre à éloigner le mobile du plan d'incidence de la même maniere que l'effort détruit à concouru à l'en approcher ; donc ſi à cet effort ſe joint l'effort parallele qui ne change ni par la compreſſion ni par la reſtitution du reſſort, il eſt évident que le mobile recevra de l'action conjointe de l'effort parallele & de la réaction du reſſort la même impulſion qu'il avoit à l'inſtant du choc, & qu'elle ſera dirigée de la même maniere à l'égard du plan d'incidence ; donc la ligne de réflexion ſera avec ce plan un angle égal à l'angle d'incidence : on peut démontrer la même choſe ſur la figure ſuivante où l'on ſuppoſera que le point de réflexion eſt le même que le point d'incidence, ce qui n'ôte rien à la force de la démonſtration, parce que le chemin que le mobile parcourt ſur le plan pendant la compreſſion & la reſtitution du reſſort ne change rien à la direction qu'il doit prendre à l'égard du plan lorſqu'il eſt réfléchi.

Fig. 29. Que la ligne AC ſuivant laquelle le corps A étant mû va choquer le plan LL, répréſente la force avec laquelle ce corps eſt mû. Des points A, C ſoient menées les lignes AB, CH perpendiculaires au plan LL, & du point A, AE parallele au même plan, qui rencontre CH au point G, ſoit enfin achevé le rectangle GD égal au rectangle BG, & menée la diagonale CE. Lorſque le corps A choquera le plan LL, ſa force ſuivant AC ſera décompoſée en deux efforts exprimez par les côtez AB, AG, ou GC, BC du rectangle BG, & à cauſe de l'immobilité ſuppoſée du plan LL, (ou ſi on veut à cauſe que ce plan appartient à une maſſe infiniment plus grande que n'eſt le corps A,) ce corps perdra toute ſa viteſſe perpendiculaire GC, & l'effort qui en réſulte ſera tout emploié à bander le reſſort ; à l'égard de la viteſſe horizontale elle demeure toute entiere. Lorſqu'après le choc le reſ-

ſort ſe rétablira, il redonnera au corps A la viteſſe CG qu'il a conſumée à le bander, laquelle eſt dirigée de C vers G en ſens contraire de celle qui a été détruite ; pour ce qui eſt de la viteſſe parallele BC elle eſt toujours dirigée dans le même ſens, & à cauſe que CD = BC, cette viteſſe ſera exprimée par CD. Donc lorſque le corps A a choqué le plan LL au point C, il eſt pouſſé en même-tems ſuivant CG & CD avec des efforts exprimez par ces deux lignes ; donc il décrira la diagonale CE du rectangle GD ; mais parce que ce rectangle eſt égal en tout au rectangle BG, les diagonales AC, CE ſont égales entr'elles & ſemblablement ſituées à l'égard du plan LL ; donc l'angle de réfléxion ECD eſt égal à l'angle d'incidence ACD.

158. *Si le reſſort eſt imparfait il ne ſe rétablira pas avec un effort égal à celui que le corps* A *a conſumé à choquer le plan* LL ; c'eſt pourquoi la viteſſe de reſſort étant moindre que la viteſſe perdue CG, & la viteſſe horizontale la même, *l'angle de réflexion ſera moindre que l'angle d'incidence* : car le rectangle GD aura une hauteur moindre que le rectangle BG ; donc les baſes BC, CD étant égales, la diagonale CE fera l'angle ECD moindre que l'angle ACB.

159. Si le plan LL eſt raboteux, la viteſſe horizontale ſera diminuée, & la viteſſe de reſſort égale à la viteſſe GC ; le rectangle GD aura donc même hauteur que le rectangle BG ; mais la baſe CD ſera moindre que BC, *c'eſt pourquoi l'angle* ECD *ſera plus grand que l'angle* ACB.

Du choc qui produit la réfraction.

160. La réfraction conſiſte en ce qu'un corps qui paſſe obliquement d'un milieu dans un autre de differente denſité ; par exemple, de l'air dans l'eau, eſt détourné de ſa direction & en prend une qui eſt autre que celle qu'il ſuivoit avant la rencontre du nouveau milieu : ainſi ſi la bale A eſt pouſſée obliquement ſuivant la direction AD contre la ſurface LL qui ſépare le milieu Z d'avec le milieu X qui eſt plus ou moins denſe, en s'enfonçant dans le nouveau milieu X, elle ne ſuivra pas la ligne droite ADE ; Fig. 31. mais elle en ſera détournée & ira comme vers M ou vers N à gauche ou à droite de la direction ADE.

C'eſt ce détour que l'on appelle *mouvement de réfraction* ou ſimplement *réfraction*. Si au point d'incidence C on éleve la perpendiculaire HCI, elle eſt le terme d'où l'on commence à compter la réfraction, ou plutôt c'eſt à la perpendiculaire HCI que l'on

rapporte la quantité de cette réfraction, ſi la réfraction ſe fait vers M, on dit que le corps ſe détourne en s'approchant de la perpendiculaire, mais s'il ſe détourne vers N, on dit qu'il s'éloigne de la perpendiculaire.

161. Dans la réfraction il faut conſidérer la *ſurface réfringente* LL, *le point d'incidence* C, qui eſt auſſi celui *de réfraction*, parce que la refraction commence auſſi-tôt que le mobile rencontre le nouveau milieu. *La ligne d'incidence* ADCE, *la perpendiculaire d'incidence & de réfraction* HCI, la ligne *de réfraction* CM *ou* CN, l'angle *d'incidence* ACL formé par la ligne de direction & la ſurface réfringente, l'angle *d'inclinaiſon* ACH formé par la ligne d'incidence & la perpendiculaire HCI, l'angle *de réfraction* ICM *ou* ICN formé par la perpendiculaire HCI & la ligne de réfraction CM ou CN, l'angle *rompu* ECM ou ECN formé par la ligne de direction ACE & la ligne de réfraction CM ou CN. Il y a des Auteurs qui appellent angle d'incidence l'angle ACH formé par la direction ACD & la perpendiculaire HCI, & angle de réfraction celui qui eſt formé par la ligne de direction ou d'incidence ADCE, & la ligne de réfraction CM ou CN.

162. *Si le corps* A *qu'on ſuppoſe de figure ſphérique tombe perpendiculairement ſur la ſurface* LL *du nouveau milieu* X, *il n'y aura point de réfraction.*

Car la direction du mobile étant perpendiculaire à la ſurface LL commune aux deux milieux, il preſſe l'un & l'autre dans le même ſens, en ſorte que les parties du mobile également éloignées de la direction AD éprouvent la même réſiſtance, tant
Fig. 32. celles qui ſont dans le milieu X que celles qui ſont encore engagées dans le milieu Z; de plus toutes ces réſiſtances priſes deux à deux ſont ſemblablement ſituées; donc le corps A éprouvant à la fois toutes ces réſiſtances, n'eſt ſollicité par aucune d'elles à quitter ſa direction, il entrera donc dans le milieu Z ſans qu'il y ait réfraction.

163. *Si le corps* A *rencontre obliquement la ſurface commune aux milieux* Z, X, *ſuivant une direction* AD *oblique à cette ſurface, il y aura réfraction.*

Fig. 33. 164. Tant que le mobile eſt dans le milieu Z, il trouve une réſiſtance égale par tout, c'eſt pourquoi il eſt mû ſuivant la même direction AD; mais lorſqu'il rencontre le nouveau milieu X, les réſiſtances qui ſont de part & d'autre de la direction AD, ſont inégales, puiſque les milieux réſiſtent inégalement: or ces

réſiſtances inégales ont le même effet que deux obſtacles mobiles que le corps A rencontreroit ſur ſon paſſage, & ſituez des deux côtez de la direction AD & dont l'un céderoit plus promptement que l'autre ; il eſt évident que le moindre obſtacle S venant à céder, le plus grand ſçavoir R déterminеroit par l'excès de ſa réſiſtance, la force qui meut le corps à changer de direction & à l'incliner vers l'obſtacle S qui cede plus promptement. La même choſe doit donc arriver lorſque le corps A choque obliquement le nouveau milieu X, ſa direction doit changer & y avoir réfraction.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

165. *Si le corps* A *de figure ſphérique choque obliquement le nouveau milieu* X *qui réſiſte moins que le milieu* Z, *il ſe détournera en s'approchant de la perpendiculaire* HCI ; *mais il s'en éloignera ſi le milieu* X *réſiſte davantage que le milieu* Z.

Demonstration. Lorſque le corps A choque obliquement le milieu X, la réſiſtance que ſa moitié antérieure BGK éprouve n'eſt pas également partagée des deux côtez de la direction AD ; celle de la partie GK eſt plus grande que celle de la partie GB, puiſque le milieu Z réſiſte davantage que le milieu X ; donc l'obſtacle en GB cede plus promptement, par conſéquent l'obſtacle en GK détermine par l'excès de ſa réſiſtance la force qui meut le corps à l'enfoncer dans le milieu X plus avant qu'elle n'eut fait en tems égal ſi le milieu X eut été de même réſiſtance que le milieu Z, le corps A parcourt donc ſuivant la perpendiculaire HCI un eſpace plus grand que ſi le milieu X eût fait la même réſiſtance que le milieu Z : or ſi cela eſt ainſi il eſt néceſſaire que la direction du corps s'incline vers la perpendiculaire HCI & parce que durant tout le tems de l'enfoncement la réſiſtance en GK ſera plus grande que la réſiſtance en GB, la ſphere s'approchera pendant tout ce tems de la perpendiculaire HCI. Comme ce raiſonnement pourroit paroître trop général & ne pas expliquer ſuffiſamment ce qui arrive dans la réfraction, on va donner une preuve plus circonſtanciée de cette propoſition au moyen des réflexions ſuivantes. 1°. Lorſqu'une ſphere eſt mûe dans un milieu réſiſtant, elle ne le choque que par la moitié de ſa ſurface, ſçavoir par ſa moitié antérieure, l'autre moitié ne ſouffre aucune réſiſtance parce qu'elle ne fait que ſuivre la route qui lui eſt frayée par la partie antérieure, & que d'ailleurs les parties du milieu qui environnent immédiatement cette moitié

Fig. 34.

ſuivent la ſphere & ne s'oppoſent point à ſon mouvement ; c'eſt pourquoi ſi on mene un diametre BK perpendiculaire à la direction AD, la moitié BGK éprouvera toute la réſiſtance des milieux Z, X, & la moitié BEK ſera à couvert du choc. 2°. Suppoſons que la ſphere eſt engagée en partie dans le milieu X & en partie dans le milieu Z, de maniere néanmoins que la partie LF ~~CF~~ qui eſt dans le milieu X où la ſphere va ſe plonger, ſoit moindre que la partie LEKF qui eſt encore dans le milieu Z, BF ſera la partie à laquelle le milieu X réſiſte, & FGK, l'autre partie que le milieu Z retarde, ſi l'on prend GO = GF, l'on aura deux parties égales de la ſurface de la ſphere qui ſont ſituées de part & d'autre de la direction AD & qui ſont l'une & l'autre encore dans le milieu Z ; il eſt évident que ſi la ſphere ne trouvoit de la réſiſtance que dans les deux parties GF, GO, elle ne ſe détourneroit ni à droite ni à gauche de la direction AGD, puiſque le milieu Z s'oppoſe également & avec la même force & à GF & à GO : or puiſque la ſphere ſe détourne à chaque inſtant de ſa direction actuelle, il faut que ce ſoit parce qu'elle trouve des réſiſtances inégales dans les parties égales BF, KO de la part des milieux X, Z. 3°. Comme la direction AGD eſt oblique aux ſurfaces BF, KO, il eſt évident que la ſphere ne choque pas les milieux X, Z par les ſurfaces BF, OK avec toute la force que lui donne ſa viteſſe abſolue ou ſa viteſſe propre : cette force eſt donc décompoſée ; mais parce que les ſurfaces BF, OK ſont compoſées d'une infinité de petites ſurfaces planes differemment inclinées à la direction AD, toutes les parties de la ſurface courbe BF ne trouveront pas dans le milieu X une égale réſiſtance, il faut penſer la même choſe à l'égard des petites ſurfaces planes qui compoſent la ſurface courbe KO. 4°. Si deux ſurfaces planes égales & ſemblables, choquent directement avec la même viteſſe les milieux X, Z, elles trouveront des réſiſtances les plus grandes qu'il ſoit poſſible, c'eſt-à-dire, que les milieux réſiſteront autant qu'ils peuvent ; mais ſi les directions des viteſſes ſont obliques aux ſurfaces planes, elles trouveront des réſiſtances moindres parce que la force du choc oblique eſt plus petite que la force du choc perpendiculaire : ſi cependant la direction du choc oblique eſt la même ou également inclinée à l'égard des deux ſurfaces toujours ſuppoſées égales & ſemblables, il eſt évident que les réſiſtances dans le choc oblique quoique moindres ſeront néanmoins dans la raiſon des réſiſtances abſolues que ces ſurfaces trouvent dans le choc direct. Cela poſé, 5°. Si l'on di-

viſe

viſe par la penſée les ſurfaces courbes & égales BF, OK en parties égales celles qui ſont à la même diſtance de la ligne AGD qui montre la direction actuelle de la ſphere ſont ſemblablement ſituées par rapport à cette direction ; donc elles trouvent des réſiſtances qui ſont dans la raiſon des réſiſtances abſolues des milieux. Or puiſque les réſiſtances que les milieux X, Z font aux parties deux à deux également éloignées de la direction AGD & des points F, O, ſont entr'elles comme les réſiſtances abſolues des mêmes milieux, il s'enſuit que l'on peut raiſonner des réſiſtances totales des ſurfaces BF, KO, comme de celles que trouvent deux parties R, S également diſtantes de la direction AGD, c'eſt pourquoi ſi les réſiſtances que les milieux X, Z font aux points R, S, déterminent la ſphere à s'approcher de la perpendiculaire HCI, il faudra dire que les réſiſtances totales des ſurfaces BF, KO l'en approchent de même, & que l'angle de réfraction eſt moindre que l'angle d'incidence. *Or il eſt aiſé de prouver que les réſiſtances partielles des points* R, S *détournent la ſphere de maniere qu'elle s'approche de la perpendiculaire* HCI. Il faut des points R, S mener les tangentes RP, SN, & les lignes RV, SM paralleles à la direction AGD qui rencontrent le diametre BK aux points V, M elles ſeront égales entr'elles, puiſque les arcs BR, KS ſont ſuppoſez égaux, les points R, S étant également éloignez du point G ; donc ſi des points V, M on abbaiſſe VP, MN perpendiculaires aux tangentes RP, SN, on formera deux triangles RPV, SNM égaux & ſemblables. Cela poſé, les lignes VR, MS ſont les directions des points R, S, puiſque ces lignes ſont paralleles à la direction AGD du centre ; donc les petites ſurfaces planes R, S répréſentées par les tangentes RP, SN, choquent obliquement les milieux X, Z & en ſont choquées de même ; donc leurs efforts ſuivant VR, MS ſont décompoſez chacun en deux autres, l'un parallele & l'autre perpendiculaire aux plans RP, SN ; ſi on ſuppoſe que les viteſſes des points R, S ſont exprimées par les obliques VR, MS, (car ces viteſſes ſont égales,) les tangentes PR, NS exprimeront les viteſſes ou efforts paralleles des points R, S & VP, MN les efforts perpendiculaires, & parce que les tangentes PR, NS ſont égales & les perpendiculaires VP, MN auſſi, les efforts paralleles des points R, S ſeront égaux, de même que les efforts perpendiculaires : c'eſt par les efforts perpendiculaires VP, MN que les points ou petites ſurfaces R, S choquent les milieux X, Z ; donc les réſiſtances de ces milieux par rapport aux petites ſur-

faces R, S ſont dirigées en ſens contraires, c'eſt-à-dire, ſuivant les rayons RA, SA perpendiculaires aux tangentes RP, SN: or on ſuppoſe que le milieu X réſiſte moins que le milieu Z; donc l'effort ſuivant AR par lequel la petite ſurface R choque ce milieu, eſt moins diminué que l'effort ſuivant AS par lequel la petite ſurface S choque le milieu Z qui réſiſte davantage; après ce premier choc l'effort ſuivant AR étant plus grand que l'effort ſuivant AS le point R, & conſéquemment tous les points de la ſurface BF ſont pouſſez avec plus de force ſuivant AR, & ſuivant les autres rayons menez à la ſurface BF, que le point S & tous ceux de la ſurface OK ne le ſont ſuivant AS & ſuivant les autres rayons menez à la ſurface OK; donc la ſphere doit faire plus de chemin ſuivant AR que ſuivant AS, & par conſéquent s'approcher de la perpendiculaire HCI.

166. Le détail que l'on vient de faire peut ſervir à fortifier la premiere preuve, car puiſque la ſphere ne ſe détourne que par l'inégalité des réſiſtances qu'elle éprouve dans les parties BF, OK de ſa ſurface, que d'ailleurs la réſiſtance totale en OK qu'on peut ſuppoſer réunie & placée en S eſt plus grande que la réſiſtance totale en BF qu'on peut ſuppoſer réunie en R, il s'enſuit que l'obſtacle en S déterminera par ſa plus grande réſiſtance la force qui pouſſe la ſphere à lui faire parcourir plus de chemin dans le ſens de la moindre réſiſtance & par conſéquent à l'approcher de la perpendiculaire HCI.

167. *Il eſt évident par tout ce qui précede que ſi le milieu* X *réſiſtoit davantage que le milieu* Z, *pour lors la ſphere s'éloigneroit de la perpendiculaire* HCI.

168. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie, *ſi une ſphere choque obliquement un nouveau milieu, & qu'en le pénetrant elle ſe détourne & s'éloigne de la perpendiculaire, le milieu qu'elle penetre réſiſte plus que celui dans lequel elle eſt mûe.* Car ſi le milieu réſiſtoit également, le mobile ne quitteroit point ſa direction, & ſi la réſiſtance du milieu étoit moindre le mobile s'approcheroit de la perpendiculaire. On ne dit rien du chemin de la ſphere durant l'enfoncement ou après qu'elle eſt toute plongée, pour déterminer ce chemin, il faudroit entrer dans la théorie des milieux réſiſtans, & s'il s'agiſſoit de la réfraction d'autres corps differens de la ſphere, il faudroit avoir égard à leur figure & à la maniere dont ils ſe préſentent pour pénetrer le nouveau milieu.

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

169. *Si le corps* A *traverſe deux milieux* Z, X, *qui réſiſtent inégalement, qu'il parcoure dans l'un & l'autre en tems égaux, des eſpaces qui ſoient entr'eux comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle de réfraction, il ſuivra le chemin de la plus courte durée.*

Le corps A eſt mû ſuivant AC dans le milieu Z & va rencontrer au point C la ſurface commune aux deux milieux : ſuppoſons qu'en entrant dans le milieu X, il prenne ſa route vers F, ſi du point C on mene la perpendiculaire ECI ; ACE ſera l'angle d'inclinaiſon, & l'angle ICF l'angle de réfraction : or je dis que ſi les eſpaces AC, CF qu'on ſuppoſe avoir été parcourus en même-tems, ſont entr'eux comme les ſinus des angles ACE, FCI, la route ACF que le corps a tenu eſt celle de la plus courte durée, en ſorte que s'il en ſuit une autre telle que ADF, il ſera plus long-tems à aller du point de départ au point F. Il faut prendre CO = CF & mener OE, FI perpendiculaires à ECI. Du point D mener DM, DL perpendiculaires à AC, FC prolongées s'il eſt néceſſaire en M, L. Les triangles OCE, DCM ſont ſemblables, les angles E, M ſont droits, & l'angle O eſt égal à l'angle DCM, à cauſe des paralleles OE, DC. Les triangles ICF, DCL ſont auſſi ſemblables, les angles I, L ſont droits, & l'angle CFI égal à l'angle DCL à cauſe des paralleles DC, IF, ces quatres triangles donnent les proportions. Si on multiplie par ordre qu'on diviſe les deux premiers produits par DC, & les deux derniers par CO, CF qui ſont des grandeurs égales, on aura CM. CL :: OE. FI, c'eſt-à-dire, que les eſpaces CM, CL ſont dans la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon OCE au ſinus de l'angle de réfraction ICF : car OC ou ſon égale CF étant le ſinus total, OE, FI ſont les ſinus des angles OCE, ICF. D'où il ſuit que les eſpaces AC, CF parcourus en tems égaux, ſont dans la raiſon de CM à CL. Donc le corps A parcourroit CM dans le milieu Z dans le tems qu'il parcourroit CL dans le milieu X. Cela poſé, penſons que dans la Fig. 36, le corps A au lieu de parcourir CM dans le milieu Z parcourt CL dans le milieu X, & qu'au contraire dans la Fig. 35, au lieu de parcourir CL dans le milieu X, il parcourt CM dans le milieu Z, le tems par AM + LF ſera égal au tems par AC + CF ; mais le tems par AD dans le milieu Z eſt plus long que le tems par AM dans le même mi-

Fig. 35. 36.

CM. DC :: OE. OC
DC. CL :: CF. FI.

lieu, puiſque AD eſt plus grande que AM, pareillement le tems par DF dans le milieu X eſt plus long que le tems par LF dans le même milieu, puiſque DF eſt plus grande que LF ; donc le tems par AM + LF eſt plus court que le tems par AD + DF. Donc le tems par AC + CF qui eſt égal au tems par AM + LF eſt plus court que le tems par AD + DF.

On fera voir de la même maniere que toute autre route que le mobile tienne pour aller de A en F le tems ſera plus long que le tems par ACF.

170. Le fond de cette démonſtration eſt de M. de la Hire. Puiſque l'angle ICF eſt moindre que l'angle OCE, & le ſinus IF moindre que le ſinus OE, l'eſpace CF que le corps a parcouru dans le milieu X eſt moindre que l'eſpace AC qu'il a parcouru en tems égal dans le milieu Z. D'où il ſuit que le milieu Z eſt plus aiſé à traverſer que le milieu X ; qu'ainſi le corps A en paſſant d'un milieu qui eſt plus aiſé à pénetrer dans un autre qui eſt plus difficile, s'approche de la perpendiculaire, ce qui paroît détruire la propoſition où l'on a établi que ſi le nouveau milieu eſt plus difficile à pénetrer, le corps ſphérique A doit ſe détourner en s'éloignant de la perpendiculaire.

Il faut convenir que ſi cette propoſition étoit vraie généralement & indépendamment de toute hypotheſe, elle renverſeroit celle qu'on a établi ; mais elle eſt fondée ſur l'hypotheſe que le corps parcourt en tems égaux dans les milieux des eſpaces qui ſont entr'eux comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle de réfraction, ou ce qui revient au même, que la route qu'il ſuit eſt celle du moindre tems ou de la plus courte durée : or cette hypotheſe eſt purement arbitraire, elle n'eſt fondée ni ſur le mouvement ni ſur la nature de la réſiſtance des milieux.

Fin du troiſiéme Livre.

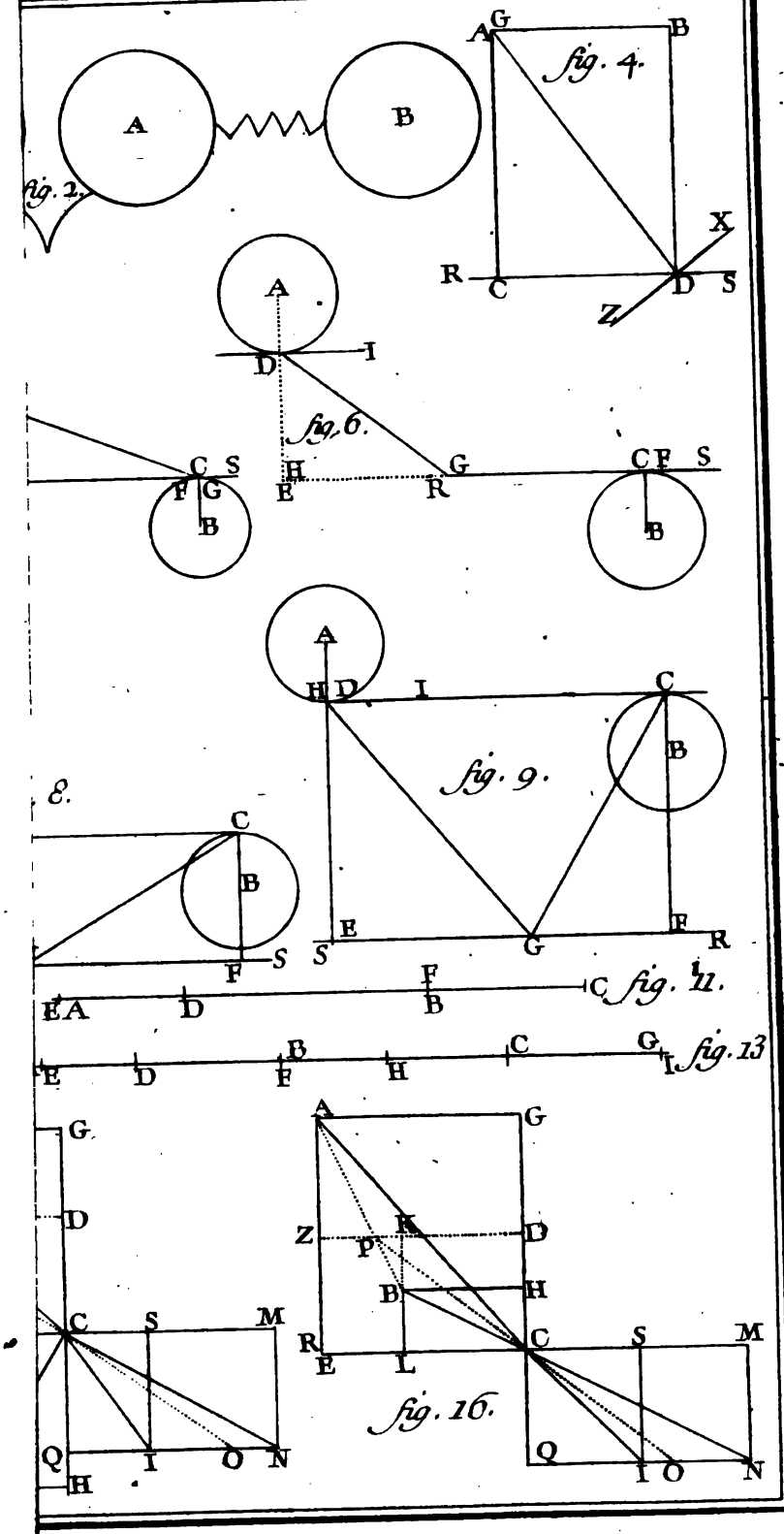
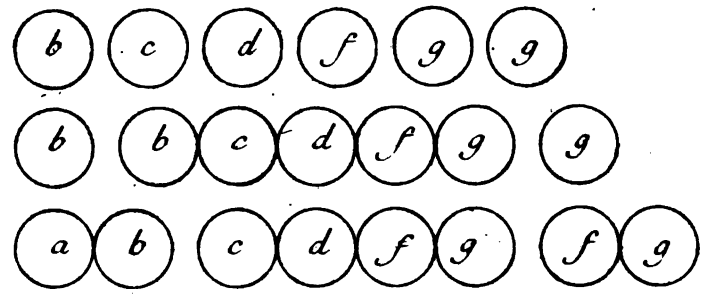

A
B
fig. 2.
G
A
B
fig. 4.
X
R
C
D
S
Z
A
D
I
fig. 6.
C S
H
G
C F S
F G
E
R
B
B
A
H D
I
C
B
fig. 9.
8.
C
B
F
S
E
S
G
F
R
F
C
fig. 11.
E A
D
B
E
D
B
F
C
H
G
I
fig. 13
G
D
C
S
M
Q
H
I
O
N
A
G
Z
K
D
P
B
H
R
E
L
C
S
M
fig. 16.
Q
I
O
N

fig. 22.



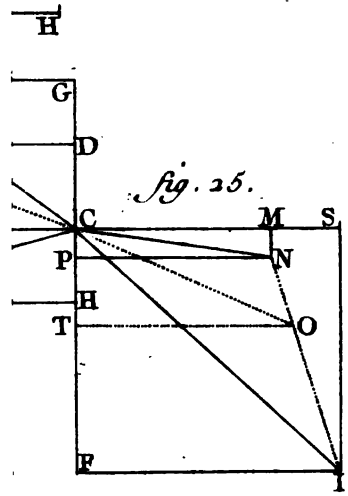


fig. 25.

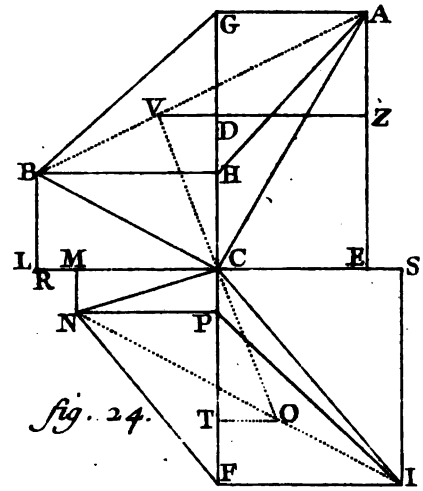


fig. 24.

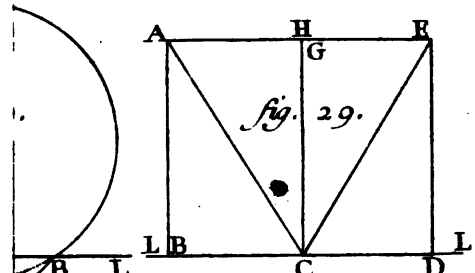


fig. 29.

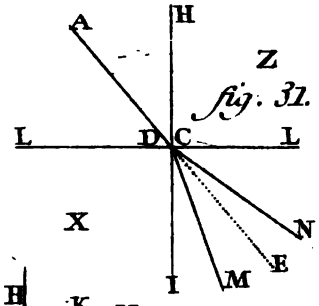


fig. 31.

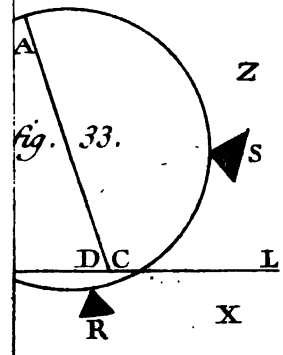


fig. 33.

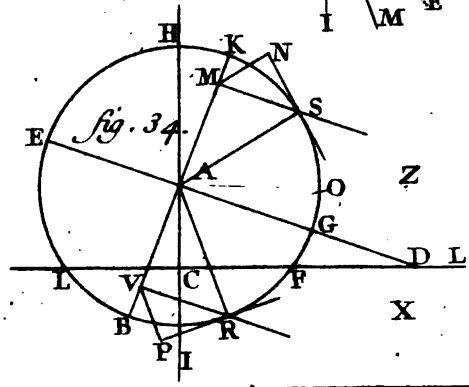


fig. 34.

PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Phyſique.

LIVRE QUATRIE'ME.
DE LA STATIQUE.

1. LA Statique eſt une ſcience qui traite de l'équilibre des puiſſances, en tant qu'appliquées aux machines; qui détermine les rapports que ces mêmes puiſſances doivent avoir entr'elles, & les directions ſuivant leſquelles elles doivent agir, afin que l'équilibre qui eſt ſon objet principal, s'en enſuive.

Dans le premier Livre article 180, on a dit que *l'équilibre eſt l'état de pluſieurs forces qui agiſſent les unes contre les autres de maniere que tout demeure en repos*, que dans l'équilibre les forces tendent à des efforts oppoſez; mais parce qu'aucune d'elles ne prevaut, elles produiſent le repos avec la tendence au mouvement, le repos réſulte de toutes les forces qui agiſſent enſemble & à la fois les unes contre les autres, la tendence au mouvement eſt l'effet de chacune en particulier, car une force ne peut pas agir ſuivant ſa direction qu'elle ne tende à produire le mouvement.

2. *Puiſſance* eſt tout ce qui peut mouvoir un corps. Entre les puiſſances les unes ſont animées, comme les hommes, les chevaux; les autres inanimées, comme les poids, les reſſorts. Les unes agiſſent par un action perſéverante, uniforme, & qui eſt la même pour tous les inſtans, tels ſont les poids & les reſſorts tant qu'ils demeurent également bandez; les autres n'agiſſent que pour un tems, & encore pendant le tems qu'elles agiſſent, leur action n'eſt pas conſtamment la même, mais tantôt plus, tantôt moins grande. Dans la ſtatique on ne conſidere que les puiſſances qui agiſſent uniformément ou du moins qui ont entr'elles les rapports néceſſaires pour l'équilibre: on les répréſente par des poids ou des mains qui tirent d'une maniere toujours la même ou bien qui ne trouble point leur repos reſpectif. Il eſt évident qu'il n'y a que cette ſorte de puiſſances qui ſoient de l'objet de la ſtatique.

3. Une puiſſance qui eſt actuellement appliquée à un corps & qui lui donne du mouvement peut être appellée *force mouvante*. Dans la ſtatique, on ne conſidere point à proprement parler, les forces mouvantes, ou les puiſſances qui produiſent un mouvement actuel, lequel eſt incompatible avec l'équilibre. Cela n'empêche pas néanmoins que l'on ne puiſſe ſuppoſer qu'une machine qui eſt tenue en équilibre tourne pendant un inſtant, & que les puiſſances qui y ſont appliquées ſont mûes dans le ſens de la machine, afin de mieux diſcerner en quoi conſiſte l'oppoſition mutuelle qu'elles ſe font, & par laquelle elles ſe réſiſtent.

4. *Ligne de direction d'une puiſſance* eſt la ligne droite ſuivant laquelle elle tend à mouvoir un corps: la direction d'un poids, eſt la ligne droite que la peſanteur tend à lui faire décrire en l'approchant du centre de la terre.

5. *Les machines ſont des inſtrumens* auxquels des puiſſances s'appliquent ſoit pour les mouvoir, ſoit pour y faire équilibre. Elles ſont de deux ſortes, les unes *ſimples*, *les autres compoſées*. Les machines ſimples ſont au nombre de ſix. Le *levier*, le *tour* ou *treuil*, la *poulie*, le *plan incliné*, la *vis* & le *coin*, auxquelles on peut ajouter la *machine funiculaire* ou les cordes qui ſoutiennent des poids. Les machines ſimples qui ſont d'une ſeule piece ſont quelquefois appellées *organes*.

6. La *Machine compoſée eſt un aſſemblage de machines ſimples*, toutes concourantes par leurs mouvemens particuliers, à la production d'un mouvement principal, lorſque la machine eſt mûe; ou à tenir en équilibre des puiſſances agiſſantes toutes les unes ſur les autres.

7. Lorſqu'une puiſſance eſt appliquée à une machine il faut diſtinguer *ſa force abſolue* d'avec *ſa force relative*. La force abſolue d'une puiſſance eſt la meſure de l'effort qu'elle fait ſuivant ſa direction lorſqu'elle eſt appliquée ſeule à un corps & indépendamment de toute machine. La force relative réſulte de la force abſolue, mais elle en eſt differente, c'eſt la force abſolue en tant qu'elle eſt modifiée par la machine à laquelle eſt appliquée, c'eſt l'impreſſion que la machine reçoit de l'application de la force abſolue. La force relative en termes de mécanique eſt appellée *moment*. La définition que l'on vient d'en donner ne fait pas encore concevoir diſtinctement ce qu'il faut entendre par cette force. On s'appliquera dans la ſuite d'une maniere particuliere à éclaircir l'idée qu'elle préſente, & à faire voir que la force relative d'une puiſſance peut augmenter ou diminuer lors même que ſon effort abſolu ne reçoit ni accroiſſement ni diminution; & que cette force peut croître juſqu'au point de contrebalancer ou même de vaincre l'effort abſolu d'une autre puiſſance, quoi qu'incomparablement plus grand.

8. Remarque. Les Auteurs qui ont écrit ſur la ſtatique l'ont fait differemment, tant pour les démonſtrations, que pour la maniere de conſidérer les machines. Les anciens ont ſuivi Archimede, & ont regardé les machines ſimples comme autant d'eſpeces de levier dont le levier ordinaire eſt comme le genre. On ſçait que *ſi deux poids ſont attachez aux extrêmitez d'une balance de bras inégaux, il y a équilibre ſi les poids ſont entr'eux dans la raiſon réciproque des bras auxquels ils ſont appliquez.* Cette propoſition a toujours été regardée comme le principal fondement de la ſtatique. Archimede pour la démontrer fait deux ou trois ſuppoſitions. 1°. *Que deux poids égaux attachez aux bras égaux d'une balance ſont en équilibre.* 2°. *Que les directions des corps peſans ſont paralleles.* Voici la troiſiéme. Soient pluſieurs poids égaux A, B, C, D, &c. attachez aux bras de la balance MN, à égales diſtances les uns des autres; le point de ſuſpenſion de la balance eſt en F. L'effort que tous ces poids ainſi diſtribuez font pour faire pancher la balance du côté de M, eſt le même que s'ils étoient réunis au centre commun de peſanteur en E; en ſorte que *ſi tous ces poids ainſi éloignez les uns des autres, ſont équilibre avec le poids* P, *l'équilibre ne ſera pas rompu, ſi après avoir ôté les poids* A, B, C, D, *on attache au point* E *qui eſt leur centre commun de gravité, un poids* K *qui ſoit égal à la ſomme des mêmes poids* A, B, C, D. Fig. 1.

9. La ſeconde de ces ſuppoſitions a été attaquée par M. de Fermat, & la troiſiéme n'a pas paru aſſez évidente à M. Huygens qui a employé un aſſez long diſcours pour la prouver. Quand une fois il eſt démontré que deux poids inégaux attachez aux bras inégaux d'une balance, ſont en équilibre, s'ils ſont dans la raiſon réciproque de ces bras, la mécanique des anciens n'eſt plus qu'une application de ce principe à toutes les machines, & l'on y rapporte tous les équilibres. On reproche à ce principe tel qu'il eſt démontré par Archimede, l'inconvénient d'être fort limité, parce qu'il ne s'étend qu'aux équilibres des puiſſances dont les directions ſont paralleles, de ſorte que pour les cas des directions concourantes, il faut avoir recours à de nouvelles ſuppoſitions.

10. De grands Géometres s'étant apperçus de ce défaut, tournerent leurs vûes d'un autre côté. M. Deſcartes propoſa un autre principe de mécanique que voici : (*Il ne faut ni plus ni moins de force pour lever un corps peſant à une certaine hauteur que pour en élever un autre moins peſant à une hauteur d'autant plus grande qu'il eſt moins peſant.* Ainſi il faut la même force pour lever un fardeau peſant 100 livres à la hauteur de 10 pieds, que pour en élever un de 10 livres à la hauteur de 100 pieds. Suivant ce principe deux forces ſont égales lorſqu'elles élevent des poids à des hauteurs qui ſont en raiſon réciproque des mêmes poids ; & parce que dans les machines les viteſſes ſont comme les eſpaces parcourus (à cauſe que les tems des mouvemens ſont égaux), il s'enſuit que deux forces ſont égales lorſque les poids ou fardeaux qu'elles meuvent, ſont entr'eux réciproquement comme les viteſſes avec leſquelles elles les meuvent. C'eſt-là ſans doute le ſens du principe de M. Deſcartes, du moins en tant qu'il eſt applicable aux machines. M. Deſcartes prétend néanmoins que ſon principe n'a aucune liaiſon avec la viteſſe & qu'il en eſt tout-à-fait indépendant, parce que l'idée de viteſſe enferme celle du tems, & que ſon principe n'a aucune liaiſon néceſſaire avec le tems. Il peut bien ſe faire que ce principe conſideré en lui-même & ſans aucun rapport aux machines, ne ſoit pas néceſſairement lié avec le tems ni avec la viteſſe, mais ſi on l'applique aux machines, on ne peut pas diſconvenir que les hauteurs que deux poids parcourent en même-tems ne ſoient entr'elles dans la raiſon des viteſſes. Quoiqu'il en ſoit, ce principe a été critiqué & deffendu, & il eſt encore douteux ſi on peut l'adopter pour un vrai principe de mécanique ; en effet la maniere dont on a coutume de le propoſer,

poſer, donne lieu à la critique. On peut voir là-deſſus les difficultez propoſées par M. Varignon au commencement de la dixiéme ſection de ſa nouvelle mécanique. On eſpere néanmoins faire voir dans le cours de ce Livre que ce principe peut être pris dans un bon ſens, & qu'étant bien entendu, il eſt un des fondemens les plus ſolides de la mécanique, qu'on peut l'appliquer aux équilibres des puiſſances dont les directions ſont concourantes & paralleles; enfin qu'il eſt peut-être le ſeul qui puiſſe faire bien concevoir ce qu'il faut entendre par force relative d'une puiſſance appliquée à une machine, & quelle eſt la véritable ſignification du terme de *moment* que l'on emploie ſi ſouvent en mécanique.

11. On vient de voir que des trois ſuppoſitions d'Archimede, la ſeconde avoit été conteſtée; que la troiſiéme, quoique vraie, n'avoit pas été trouvée aſſez évidente; d'ailleurs quand même on accorderoit à Archimede ſa ſeconde ſuppoſition, ſon principe n'en ſeroit que plus limité, puiſqu'il n'auroit lieu que dans les cas des directions paralleles. On a vû auſſi que le principe de M. Deſcartes, comme on a coutume de le propoſer, n'a pas une liaiſon clairement connue avec les conſéquences que l'on en veut déduire par rapport à l'équilibre. D'ailleurs ni l'un ni l'autre de ces principes ne montre de quelle maniere l'équilibre ſe fait. Ces conſidérations déterminerent M. Varignon à chercher dans les mouvemens compoſez la génération de l'équilibre & les vrais principes de la ſtatique. On a expliqué dans le premier livre comment les impreſſions particulieres de deux puiſſances ſe confondent en une ſeule, à laquelle, ſi on oppoſe une réſiſtance qui lui ſoit égale & dirigée en ſens contraire, les deux puiſſances ſont retenues en équilibre. Ce principe ſi ſimple en lui-même, eſt d'une fécondité admirable, les conſéquences en naiſſent comme d'elles-mêmes ſans qu'il ſoit beſoin d'employer de longs raiſonnemens.

12. Les trois principes de ſtatique qui ont donné lieu à cette remarque, ſont également certains, & fourniſſent autant de preuves differentes de l'équilibre; car pour ce qui eſt des difficultez qu'on oppoſe aux deux premiers, elles peuvent être levées. On les mettra touts trois en œuvre, tant pour montrer qu'il y a pluſieurs voies pour arriver à la même vérité, qu'afin que le lecteur trouvant ſous ſes yeux les differentes manieres de procéder des anciens & des nouveaux, puiſſe juger du mérite de chacune en particulier, & choiſir enſuite celle qui lui paroîtra la plus propre pour ſon uſage & ſon deſſein. On diviſera ce Livre en quatre

chapitres. Dans le premier on expliquera les propriétez du *levier*, de la *poulie*, & du *treuil* ou *tour* ; dans le ſecond on traitera du *plan incliné*, de *la vis*, du *coin*, & des *poids ſoutenus avec des cordes* ; dans le troiſiéme on expoſera les *machines compoſées*, qui ſont les plus uſitées ; dans le quatriéme on donnera la conſtruction *de la balance & du peſon*, avec la ſolution de pluſieurs problêmes de ſtatique.

CHAPITRE PREMIER.

DU LEVIER, DE LA POULIE, ET DU TREUIL OU TOUR.

13. CEs trois machines ont cela de commun, qu'elles tournent ſur un appui, & que c'eſt par des analogies toutes ſemblables qu'on détermine le rapport de la puiſſance au poids qu'elle ſoutient : c'eſt pour cette raiſon qu'on va traiter des trois dans un ſeul chapitre afin de les conſiderer toutes ſous un même point de vûe. Chacune d'elles aura néanmoins ſon titre particulier : on expliquera enſuite ce que l'on appelle *momens* en mécanique, & leur uſage : on conſiderera enfin ce qui regarde les appuis.

DU LEVIER.

14. Le levier dont les ouvriers ſe ſervent, eſt une barre de fer, de bois, ou de quelque autre matiere dure & non ſujette à ſe courber ; elle eſt plus ou moins longue ſelon le ſervice qu'on en veut tirer. On ſe ſert du levier pour remuer des fardeaux, les ſoutenir, les élever, ou pour vaincre quelque obſtacle. Pour que le levier puiſſe jouer, il faut qu'il ſoit poſé ſur un *appui* qu'on appelle auſſi *hypomochlion* nom tiré du grec, & que ſa réſiſtance ſoit aſſez grande pour ne pas ceder à l'impreſſion de la charge que la puiſſance & le poids lui font porter. L'appui peut avoir trois poſitions differentes à l'égard de la puiſſance & du poids, ce qui a fait diſtinguer trois eſpeces de levier. On appelle *levier de la premiere eſpece*, celui dont l'appui eſt entre la puiſſance & le poids ; *levier de la ſeconde eſpece*, celui dont le poids eſt entre la puiſſance & l'appui ; *levier de la troiſiéme eſpece*, celui dont la puiſſance eſt entre le poids & l'appui.

15. On regardera les machines comme ſi elles étoient ſans maſſe, ſans peſanteur, comme compoſées de lignes & de figures Géométriques, roides, inflexibles, parfaitement mobiles, & exemptes de tout frottement. Cette maniere d'enviſager les machines, permettra à l'eſprit de n'être occupé que de l'objet princi-

pal qui eſt le rapport des puiſſances dans l'équilibre ; de qui n'empêche pas qu'après cette premiere conſidération, on ne puiſſe retourner ſur ſes pas pour examiner les machines dans l'état réel & avec leurs qualitez phyſiques, pour déterminer la meſure de force qu'il faut employer pour les mouvoir, & ſurmonter la réſiſtance des frottemens.

16. Dans cette ſuppoſition on définira le levier ordinaire *une verge* ou *ligne inflexible poſée ſur un appui fixe, à laquelle ſont appliquées deux puiſſances ou deux poids, ou une puiſſance & un poids.* Fig. 2. 3. 4. XY eſt la longueur du levier ; F l'appui ; M, N, les points auxquels les puiſſances, les poids ou les réſiſtances ſont appliquez ; MO, NS ou OP, SR leurs directions ; O, S, deux points fixes ſur leſquels paſſent les cordons POM, RSN, qui tiennent les poids ſuſpendus, ou auxquels les puiſſances ſont appliquées ; FM, FN ſont les bras du levier ; FA, FD, les perpendiculaires menées de l'appui F ſur les directions prolongées autant qu'il eſt néceſſaire, elles meſurent les diſtances de l'appui aux mêmes directions. Les cordons POM, RSN ſont ſuppoſez ſans peſanteur parfaitement flexibles & ſans aucun frottement qui retarde le mouvement des poids ou puiſſances qui leur ſont appliquées

PRÉPARATION POUR LA PREMIERE DEMONSTRATION DU LEVIER.

17. *Dans l'équilibre une force qui eſt appliquée à un corps, tend à lui communiquer tout le mouvement qu'elle peut produire ſuivant ſa direction.*

Pour nous renfermer dans notre ſujet, ſuppoſons que deux poids inégaux P, R ſont attachez aux bras égaux FA, FD du levier XY, Fig. 2. il eſt certain qu'il n'y aura point d'équilibre, que le grand poids R ſurmontera le moindre P ; il eſt de plus certain que le grand poids R ſera mû avec une viteſſe moindre que s'il n'étoit pas contraint de ſurmonter la réſiſtance du poids P ; ainſi ſa viteſſe actuelle ſera moindre que s'il étoit mû par toute la force de ſa peſanteur ; mais ſi le poids R eſt retenu en équilibre par le poids P ou par quelque autre force ajoutée à celle de ſa peſanteur, il eſt pareillement certain que le poids R tend à être mû par toute la force de ſa peſanteur ; car dans l'équilibre toute cette force lui eſt appliquée, parce qu'elle ne ſe partage point comme dans le mouvement actuel.

PROPOSITION PREMIERE.

Fig. 2. 3. 4. 118. *Si le poids* P *eſt attaché ſucceſſivement à differens points* m, M *du levier* XY, *dans le cas de l'équilibre le poids* R *tend à communiquer au poids* P *des quantitez de mouvement qui ſont comme les diſtances* Fa, FA *de l'appui* F *aux directions* am, AM.

Il y a deux cas, ou les directions ſont paralleles, ou elles ſont inclinées l'une à l'autre & concourent en un point.

Fig. 2. DEMONSTRATION DU PREMIER CAS, *lorſque les directions ſont paralleles.* Dans l'équilibre ſoit que le poids *P* ſoit ſuſpendu au point *m* ou *M*, le poids *R* tend à être mû par toute la quantité de mouvement que la peſanteur peut lui imprimer dans un inſtant. Suppoſons que par ce mouvement, le poids *R* puiſſe décrire l'arc *DI*, il eſt évident qu'il ne peut avoir cette tendence à moins que le poids *P* d'abord ſuſpendu en *m* & enſuite en *M*, ne tende à décrire les arcs *ag*, *AG*; les tems par les arcs *ag*, *AG* étant égaux au tems par l'arc *DI*, ſont égaux entr'eux; donc les viteſſes du poids *P* en *m* & *M*, ſont entr'elles comme ces arcs ou comme les rayons *aF*, *AF* qui les décrivent: or parce que c'eſt le même poids *P* qui tend à décrire les arcs *ag*, *AG*, il s'enſuit que les quantitez de mouvement ſont entr'elles comme les viteſſes, & par conſéquent entr'elles comme les diſtances *aF*, *AF*.

Fig. 3. 4. DEMONSTRATION DU SECOND CAS, *lorſque les directions concourent.* Dans ce ſecond cas il faut déterminer auparavant les viteſſes que les poids P, R, tendent à avoir, ſuppoſé que le levier tourne autour de l'appui F.

Concevons que le levier tourne autour de l'appui F, de maniere qu'il ne ſoit mû qu'un inſtant ou pendant un tems infiniment petit, les rayons AF, DF décriront les arcs infiniment petits AG, DI: or je dis dabord que les viteſſes des poids P, R pendant cet inſtant ſont entr'elles comme les arcs AG, DI, ou comme les rayons AF, DF qui les décrivent en même-tems. Les arcs AG, DI étant infiniment petits, peuvent être regardez comme deux lignes droites, ou comme deux perites portions des tangentes AMO, DNS; donc pendant le mouvement inſtantané du levier, tous les points des lignes AMO, DNS conſiderées comme deux cordons parfaitement flexibles, ſont mûs ſur des lignes droites; donc tous les points de la direction AMO ſont mûs avec la même viteſſe que le point A; pareillement tous les points de la ligne DNS ſont mûs avec la même viteſſe que le point D; donc les viteſſes des points O, S, & conſéquemment des poids P, R, ſont égales aux viteſſes des points A, D: or les viteſſes des points A, D ſont entr'elles comme les arcs AG, DI, ou comme les rayons AF,

DF. Donc les viteſſes que les poids P, R reçoivent au moment de l'impulſion, ſont entr'elles comme les diſtances de l'appui F aux directions AMO, DNS.

Cela poſé, il eſt aiſé de démontrer, comme dans le premier cas, que les quantitez de mouvement que le poids *R* tend à communiquer au poids *P* dans l'équilibre, lorſque ce poids eſt aux points *m*, *M*, ſont entr'elles comme les diſtances *aF*, *AF* de l'appui *F* aux directions *amo*, *AMO*; car ſi le poids *R* tend à deſcendre ſuivant ſa direction d'une longueur égale à l'arc *DI*, il tend néceſſairement à faire parcourir au poids *P* ſuſpendu ſucceſſivement en *m*, *M* les arcs *ag*, *AG*, pendant le tems qu'il décriroit l'arc *DI*; donc les viteſſes du poids *P* en *m*, *M*, ſont entr'elles comme les arcs *ag*, *AG*, ou comme les diſtances *aF*, *AF*; donc les quantitez de mouvement du poids *P* qui ſont entr'elles comme les viteſſes, ſont auſſi entr'elles comme les diſtances *aF*, *AF*.

19. Corollaire. Lorſque les poids R, P ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances DF, AF, ils tendent à être mûs avec des quantitez égales de mouvement. Car les viteſſes ſont entr'elles comme les arcs DI, AG ou comme les diſtances DF, AF; or par l'hypotheſe les poids R, P ſont en raiſon réciproque des diſtances DF, AF, ou les diſtances DF, AF en raiſon réciproque des poids; donc les viteſſes qui ſont comme les diſtances DF, AF ſont entr'elles réciproquement comme les poids ou leurs maſſes; donc les quantitez de mouvement ſont égales.

20. Remarque. On a dit que tous les points de la direction AMO ſont mûs avec la même viteſſe que le point A & ſur une même ligne droite dans l'inſtant que le levier commence à être mû, & avant que par ſon mouvement circulaire les differents points de la ligne AM décrivent des arcs proportionnels à leurs diſtances ou éloignemens de l'appui F. Cela ne ſouffre aucune difficulté; car ſi l'on ſuppoſe que le cordon OM s'étend juſqu'au point A, & qu'il eſt attaché à la ligne AF conſiderée comme une verge inflexible fermement attachée au point F du levier, il eſt certain que tous les points du cordon AMO ſeront tirez également fort, & qu'ils recevront tous la même impulſion de la force qui tend à faire tourner le levier, & que cet effort commun à tous tend dabord à les mouvoir ſur la ligne AMO : or comme dans l'hypotheſe preſente il ne s'agit pas tant d'un mouvement actuel que d'une tendence au mouvement, rien n'empêche qu'on ne puiſſe conſiderer tous les points du cordon comme mûs pendant un inſtant ſur la ligne AMO.

Réflexions préliminaires pour démontrer la proposition suivante.

21. 1°. Dans l'équilibre il n'aît des efforts contraires des puissances une résistance égale en tout sens qui produit le repos. Pour avoir une idée juste de l'équilibre, il est donc nécessaire de sçavoir en quoi cette résistance consiste, & quel en est le principe. 2°. Dans le Livre précedent (11) on a distingué deux résistances, l'on a appellé l'une propre & l'autre impropre. Lorsqu'une puissance s'applique à les surmonter, elle consume ou en tout ou en partie sa force; ainsi en tant qu'elles empêchent ou retardent une puissance, elles ont des effets semblables en tout, mais par rapport à l'obstacle, ils sont bien differens; si l'obstacle ne consiste que dans la masse ou quantité de matiere qu'il faut mouvoir, il est toujours surmonté, quelque grand qu'il puisse être, parce que la matiere est toujours disposée a recevoir du mouvement lorsque rien ne s'y oppose; mais si l'obstacle provient d'un effort contraire, il peut arriver qu'il soit insurmontable à la force présente. 3°. La résistance impropre que l'on nomme quelquefois force d'inertie, est proportionnelle à la masse, c'est-à-dire, qu'une masse résiste d'autant plus qu'elle est plus grande: la résistance propre ou la réaction, est proportionnelle à la force contraire qui réagit. 4°. Chacune de ces résistances peut être considerée en elle-même & d'une maniere absolue, en tant qu'elles sont d'un certain degré, ou relativement à la puissance qui tend à les surmonter. 5°. Tant que la masse d'un corps ou une force contraire demeurent les mêmes, leurs résistances absolues sont aussi les mêmes, & elles ne reçoivent ni accroissement ni diminution; mais il peut se faire qu'une puissance ait plus ou moins de peine à les surmonter par la maniere dont elle agit: pour lors ces résistances augmentent ou diminuent relativement à cette puissance. Comme on va le prouver dans la proposition suivante.

PROPOSITION SECONDE.

22. *La résistance absolue d'un obstacle étant la même, la résistance relative peut être plus ou moins grande.*

Fig. 2. 3. 4. DÉMONSTRATION DE LA PREMIERE PARTIE. 1°. La proposition est certaine, lorsqu'il s'agit de la résistance impropre qui vient de la masse; car une même masse résiste d'autant plus qu'il faut lui imprimer une plus grande viteſſe pour la mouvoir, puisque cela ne peut se faire que par la diminution ou la perte de la force externe qui lui est appliquée, laquelle éprouve la même difficulté que si elle étoit repoussée par une force contraire, qui en réagis-

ſant, lui ôteroit tout ce qu'elle perd. Or il eſt viſible que ſi un corps eſt attaché au bras d'un levier, & que la force qu'on ſuppoſe appliquée à l'autre bras, parcoure toujours le même eſpace, il faudra qu'elle imprime au corps une viteſſe d'autant plus grande qu'il ſera plus éloigné de l'appui; donc la réſiſtance relative du corps augmente, ou, ce qui eſt le même, la puiſſance a d'autant plus de peine à mouvoir le corps qu'il eſt plus éloigné de l'appui. Il eſt évident que cette réſiſtance a lieu, non ſeulement lorſque le corps qui la fait, eſt actuellement mû, mais encore dans l'équilibre lorſqu'il eſt ſeulement ſollicité au mouvement, comme dans le cas de la propoſition précedente, puiſque dans le cas d'équilibre comme dans le mouvement actuel, l'effort de la puiſſance eſt le même ſi la quantité de mouvement qu'elle tend à communiquer, eſt égale à celle qu'elle communique en effet. Donc la réſiſtance, &c.

Demonstration de la seconde partie. 2°. La propoſition eſt encore vraie lorſqu'il s'agit de la réſiſtance propre: ainſi il eſt d'autant plus difficile de ſurmonter la peſanteur du poids P qu'il eſt plus éloigné de l'appui, à une diſtance double le poids R éprouve une réſiſtance double. Car on vient de voir que dans l'équilibre la maſſe du poids P conſiderée comme ſans peſanteur, fait au poids R des réſiſtances qui ſont entr'elles comme les diſtances à l'appui, auxquelles on ſuppoſe que le poids P eſt placé, & cela parce que le poids R fait effort pour lui faire parcourir en des tems égaux des arcs ou des eſpaces qui ſont entr'eux comme ces diſtances; donc par une raiſon ſemblable la difficulté qu'il y a à ſurmonter la peſanteur du poids P, doit être auſſi à proportion plus grande, puiſque ce poids ne peut être ainſi ſollicité à parcourir en des tems égaux des eſpaces de plus en plus longs que le poids R ne ſoit comme contraint de ſurmonter la peſanteur du poids P d'autant plus ſouvent qu'il y a plus de points ou de parties dans ces differens eſpaces qui vont en croiſſant; car le poids P réſiſte ou eſt diſpoſé à réſiſter & à réagir à tous les points de l'eſpace qu'il eſt preſſé de parcourir contre ſa propre direction, par conſéquent la réſiſtance relative du poids P augmente à raiſon de ſa plus grande diſtance à l'appui. Fig. 2. 3. 4.

On peut dire encore qu'un même obſtacle devient d'autant plus difficile à être ſurmonté, qu'il faut employer plus de viteſſe & de promptitude pour cet effet. Suppoſons qu'un cheval par ſon effort actuel puiſſe faire un pas en une ſeconde, ſi cet effort ne peut être détruit qu'en lui donnant une impreſſion contraire par laquelle il recule ou ſoit ſur le point de reculer de trois, de ſix, de neuf pas,

&c. en une ſeconde, il eſt évident que ſa réſiſtance relative ira en augmentant, & que la force contraire qui lui eſt appliquée fera une dépenſe d'autant plus grande par la maniere dont elle s'applique à ſurmonter l'effort du cheval, qu'elle tendra à lui faire parcourir un plus grand eſpace en même-tems ou en tems égal : or dans l'équilibre plus la diſtance du poids P à l'appui eſt grande, plus l'impreſſion que le poids R eſt obligé de faire ſur le poids P pour en ſurmonter la peſanteur, eſt prompte & ſubite, puiſque par un ſeul & même effort, il faut que le poids R tende à lui faire parcourir des eſpaces en tems égal qui augmentent comme les diſtances à l'appui. Donc, &c.

23. COROLLAIRE. Il ſuit de cette propoſition qu'un poids ou une autre puiſſance réſiſte d'autant plus qu'il eſt contraint ou ſollicité de parcourir en même-tems ou en tems égal des eſpaces plus grands contre ſa propre direction.

PREMIERE DEMONSTRATION DU LEVIER.

PROPOSITION TROISIE'ME.

Fig. 2. 3. 4. 24. *Deux poids* P, R, *appliquez aux points* M, N *du levier* XY *ſont en équilibre s'ils ſont entr'eux dans la raiſon réciproque des diſtances ou des perpendiculaires* AF, DF *menées de l'appui* F *aux directions* AMO, DNS; *c'eſt-à-dire, ſi on a* P. R :: DF. AF.

On ſuppoſe que les directions des poids ſont ſur un même plan, condition abſolument néceſſaire pour l'équilibre (*Liv.* I. 188.), auquel cas elles concourent en un point ou ſont paralleles. Une ſeule démonſtration ſuffit pour les deux cas.

DEMONSTRATION. Pour que les poids *P* & *R* ſoient en équilibre, il eſt néceſſaire & il ſuffit que la force du poids *R* qui en elle-même eſt plus grande que la force abſolue du poids *P*, ſoit toute contrebalancée par la réſiſtance que ce poids lui oppoſe. Voici comme on peut prouver que toute la force du poids *R* eſt arrêtée & contrepeſée par la réſiſtance du poids *P*. Si le poids *P* tiroit le levier au point *m* où l'on ſuppoſe que la direction *amo* eſt autant diſtante de l'appui *F* que la direction *DNS* du poids *R*, il eſt certain que le poids *P* par ſa réſiſtance contrebalanceroit dans le poids *R* une partie égale à ſon poids. Par la propoſition précedente les réſiſtances que le poids *P* oppoſe au poids *R*, lorſqu'il eſt appliqué aux points *m*, *M*, ſont entr'elles comme les diſtances *aF*, *AF*; donc les parties du poids *R* contrepeſées par le poids *P* lorſqu'il eſt aux points *m*, *M*, ſont auſſi dans la raiſon des diſtances *aF*, *AF*, car le poids *R* doit être arrêté ou empê-

ché

ché à proportion de la réſiſtance qu'il trouve. Donc ſi on nomme (*e*) la partie du poids *R* contrepeſée par le poids *P* lorſqu'il eſt ſuſpendu en *m*, qu'on nomme (*E*) la partie du même poids contrepeſée par le poids *P* lorſqu'il eſt attaché au point *M*; on aura *e*. *E* :: *aF*. *AF*: or l'hypotheſe donne *P*. *R* :: *DF*. *AF*, & parce que *DF*=*aF* on a auſſi *P*. *R* :: *aF*. *AF*; donc ſi dans la premiere proportion au lieu de la raiſon *aF* à *AF*, on met la raiſon de *P* à *R*, on aura *e*. *E* :: *P*. *R*; c'eſt-à-dire, que les parties du poids *R* contrepeſées par le poids *P* lorſqu'il eſt en *m*, *M*, ſont entr'elles comme les poids *P* & *R*; mais la partie *e* que le poids *P* contrepeſe en *m*, eſt égale au même poids *P*; donc la partie *E* contrepeſée par le poids *P* en *M* eſt égale au poids entier *R*. Donc il y a équilibre entre les poids *P* & *R*.

25. On peut démontrer en nombres la même propoſition. Si, par exemple, le poids P eſt le tiers du poids R, & que la diſtance AF ſoit triple de la diſtance DF, les poids P, R ſeront dans la raiſon réciproque des diſtances AF, DF: or je dis que dans cette ſuppoſition les poids P, R ſeront en équilibre: car ſi le poids P étoit appliqué au point *m* de maniere que la diſtance *a*F fût égale à la diſtance DF, ce poids contrepeſeroit le tiers du poids R, lequel ne pourroit plus agir ſur le poids P, pour le mouvoir, que par une force égale aux deux tiers reſtans de ſa peſanteur; mais ſi la direction AMO eſt à une diſtance triple, en ſorte que AF ſoit triple de *a*F, la réſiſtance du poids P ſera triple de ce qu'elle étoit lorſqu'il tiroit ſuivant la direction *a m o*; donc par cette réſiſtance il contrepeſera le triple de ce qu'il contrepeſeroit en *m*, c'eſt-à-dire, que la partie contrepeſée ſera égale au poids R, puiſque la partie contrepeſée en *m* en eſt le tiers. Il y aura donc équilibre entre les poids P & R s'ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances AF, DF de leurs directions AMO, DNS au point d'appui F.

26. On auroit pû ſuppoſer que le moindre poids P agit contre le grand, & démontrer par un raiſonnement ſemblable au précédent que ſi le poids R eſt triple du poids P, & que la diſtance de l'appui à ſa direction ne ſoit que le tiers de celle du même appui à la direction du poids P, la réſiſtance qu'il fait eſt préciſément égale à la force du poids P. Car ſi le poids R étoit autant éloigné de l'appui F que le poids P, il feroit une réſiſtance triple de la force du poids P; mais ſi ſa diſtance à l'appui F eſt trois fois moindre, ſa réſiſtance ſera auſſi trois fois moindre, & préciſément égale à la force du poids P; donc le poids P ne pourra pas vaincre la réſiſtance du poids R. Il y aura donc équilibre.

27. On voit donc que l'équilibre des poids P, R conſiſte en ce qu'étant dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui F, la réſiſtance que l'un oppoſe à l'autre, augmente à proportion de la force que cet autre exerce ſur lui. Le poids R a une force triple, mais le poids P la conſume toute entiere, quoique ſa force abſolue ne ſoit que le tiers de celle du poids R, parce que cette force placée à une diſtance triple fait une réſiſtance triple, ou plutôt le poids R éprouve une difficulté trois fois plus grande à la contrebalancer; elle eſt donc triple relativement au poids R, & par conſéquent égale à ſa force abſolue. Pareillemennt la force du poids P eſt trois fois moindre que la force du poids R; mais ce poids étant trois fois moins éloigné de l'appui, oppoſe ſeulement au poids P le tiers de la réſiſtance qu'il feroit s'il étoit autant éloigné de l'appui que le poids P: or cette réſiſtance eſt de même égale à la force du poids P. L'équilibre entre les poids P, R conſiſte donc en ce que d'une part il y a une force, & de l'autre une réſiſtance égale à cette force; cette réſiſtance eſt occaſionnée par la machine, car une puiſſance doit réſiſter d'autant plus ou d autant moins, qu'on tend à lui faire parcourir en même-tems un eſpace plus ou moins grand contre ſa propre direction. C'eſt dans cette réſiſtance que conſiſte la force relative d'une puiſſance, laquelle augmente ou diminue à proportion que l'application de cette puiſſance à la machine ſe fait en un endroit plus éloigné ou plus proche de l'appui.

Fig. 5. 28. On peut faire ici l'application du principe de M. Deſcartes à l'équilibre des poids ou des puiſſances qui tirent un levier. *Si le poids* P *étant cent fois moindre que le poids* R, *eſt cent fois plus éloigné de l'appui* R, *il y aura équilibre.* Pour le prouver il faut faire voir ſuivant le principe de M. Deſcartes que le poids R ne peut pas élever le poids P. C'eſt ce qu'on peut démontrer ainſi. Le poids R ne peut s'abbaiſſer qu'il n'éleve le poids P à une hauteur centuple de l'eſpace qu'il parcourt en deſcendant: or ſuivant le principe, il faut la même force pour élever le poids P à une hauteur centuple que pour élever à une hauteur cent fois moindre un poids S qui ſeroit centuple du poids P, c'eſt-à-dire, égal au poids R, & qui ſeroit attaché à la même diſtance de l'appui que le poids R. Donc ſi le poids R ne peut pas élever le poids S, il s'enſuit qu'il n'élevera point le poids P, & qu'il y aura équilibre: or il eſt évident que le poids R ne peut pas élever le poids S qui lui eſt égal, & qui eſt placé à la même diſtance de l'appui, puiſqu'il y a néceſſairement équilibre entre ces deux poids. Donc le poids R ne peut pas non plus élever le poids P. Donc il y a équilibre.

29. *Qu'il faille la même force pour élever le poids P cent fois moindre à une hauteur cent fois plus grande, que pour élever le poids S cent fois plus grand à une hauteur cent fois moindre.* Cela eſt évident par la propoſition avant derniere; car la réſiſtance du poids P ſuſpendu à une diſtance centuple de celle du poids S, ſera cent fois plus grande que ſi ce poids étoit à la même diſtance de l'appui que le poids S: or ſi le poids P étoit à égale diſtance de l'appui, il feroit une réſiſtance qui ſeroit la centiéme partie de la réſiſtance du poids S; donc à une diſtance centuple, cette réſiſtance étant cent fois plus grande, ſera égale à celle du poids S; donc il faudra autant de force pour élever le poids P que pour élever le poids S.

30. On voit donc que le principe de Mécanique de M. Deſcartes peut être mis à couvert des difficultez, qu'il eſt concluant & qu'on peut même l'étendre avec une égale facilité aux équilibres des puiſſances dont les directions ne ſont point paralleles; mais pour éviter toute difficulté il faut 1°. que le mouvement qu'on attribue au poids R, & par lequel on ſuppoſe qu'il éleve le moindre poids P, ſoit plutôt une tendence au mouvement qu'un mouvement actuel. 2°. Qu'on ne fonde pas l'équilibre ſur la tendence du poids P à recevoir une quantité de mouvement égale à celle du poids R, car cette tendence bien loin de favoriſer l'équilibre, ſollicite au contraire le poids P à obéir & à tourner avec le poids R, mais l'équilibre eſt plutôt fondé ſur la réſiſtance que cette tendence fait naître: car ſi la réſiſtance du moindre poids n'étoit pas proportionnelle à cette tendence, il n'y auroit point d'équilibre, quand même le poids P tendroit à recevoir une quantité de mouvement égale à celle du poids R, comme on aura occaſion de le faire remarquer.

31. Corollaires. 1°. Si l'on diminue la maſſe de l'un des poids P ou R, que l'on retranche, par exemple, la moitié du poids P; mais que l'on applique en même-tems à l'autre moitié qui demeure attachée au levier, une force égale à la peſanteur de la moitié retranchée, il eſt viſible que l'équilibre ne ſera point interrompu; car comme le poids P ne réſiſte au poids R que par ſa peſanteur, (on entend d'une réſiſtance qui détruiſe ou empêche le mouvement,) la force qu'on ſuppoſe appliquée à la moitié reſtante etant égale à la peſanteur du poids P, il s'enſuit qu'elle fera la même réſiſtance que ce poids; il y aura donc équilibre.

Par une raiſon ſemblable ſi l'on ôte l'un des poids, par exemple, le poids P, & qu'on mette à ſa place une puiſſance qui tire avec une force égale à celle de ce poids, il y aura encore équilibre.

D'où l'on voit que ſi deux poids ou deux puiſſances ou une puiſſance & un poids tirent un levier, il y aura équilibre, pourvû que les deux forces qui tirent le levier ſoient dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui à leurs directions, quelque ſoit d'ailleurs le rapport des maſſes ou des ſolidités des corps auxquels ces peſanteurs ou ces puiſſances ſont appliquées.

32. 2°. Lorſque les poids P, R ſont dans la raiſon réciproque des diſtances AF, DF, ils ſont en équilibre; mais lorſqu'ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances, ils ſont ſollicitez à prendre des quantitez égales de mouvement ou des viteſſes qui ſont en raiſon réciproque des maſſes; donc *lorſque les poids* P, R *ſont en équilibre, ils ſont ſollicitez à prendre des quantitez égales de mouvement, ou tendent à être mûs avec des forces égales l'un en deſcendant & l'autre en montant.*

33. 3°. *Réciproquement ſi deux poids attachez à un levier tendent à être mûs avec des quantitez de mouvement qui ſoient égales, que de plus les forces ou puiſſances qui leur ſont appliquées ſoient dans la raiſon des maſſes, ces poids ſeront en équilibre.* (On ſuppoſe que ces forces ou puiſſances ſont differentes des peſanteurs, & qu'on les applique à volonté aux poids.) Cela étant ainſi, puiſque les quantitez de mouvement ſont égales, les viteſſes ſont dans la raiſon réciproque des maſſes; les viteſſes ſont auſſi dans la raiſon des arcs que les poids tendent à décrire, ou dans la raiſon des diſtances à l'appui; donc les poids qui ſont dans la raiſon des maſſes ſont auſſi dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui; de plus on ſuppoſe que les forces ou puiſſances qui ſont appliquées aux maſſes, ſont dans la même raiſon que les maſſes ou les poids; donc ces forces ou puiſſances ſont dans la raiſon réciproque des diſtances; donc il y a équilibre.

34. 4°. *Si deux poids attachez à un levier tendent l'un à deſcendre & l'autre à monter avec des quantitez égales de mouvement, que de plus ils ne ſoient ſollicitez à ſe mouvoir que par l'effort de la peſanteur, ils ſeront en équilibre :* car les quantitez de mouvement étant ſuppoſées égales, les viteſſes ſont dans la raiſon réciproque des maſſes ou des poids, ces mêmes viteſſes ſont auſſi entr'elles dans la raiſon des arcs que les poids tendent à décrire en même-tems, ou comme les diſtances de l'appui aux directions. Donc les maſſes ou les poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui; On ſuppoſe de plus qu'ils ne ſont ſollicitez au mouvement que par la peſanteur; donc les peſanteurs ou les forces qui ſont appliquées au levier, ſont dans la raiſon réciproque des diſtances. Donc il y

a équilibre. Car comme il a été prouvé, le moindre poids réſiſtera d'autant plus que le plus grand tendra à lui communiquer une plus grande viteſſe.

35. 5°. Mais ſi deux poids attachez à un levier tendent l'un à deſcendre & l'autre à monter avec des quantitez égales de mouvement, on ne peut pas conclure en général qu'ils ſoient en équilibre, par exemple, dans le cas où les poids ſont pouſſez, non-ſeulement par leurs peſanteurs propres, mais encore par d'autres forces ou puiſſances qui leur ſont appliquées: car il peut ſe faire que ces poids tendent l'un à monter & l'autre à deſcendre avec des quantitez égales de mouvement ſans que pour cela il y ait équilibre; en voici la raiſon. Dès que les poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances, ils ont des tendences égales l'un à deſcendre & l'autre à monter, quoique les forces qui leur ſont appliquées & qui doivent faire équilibre en pouſſant les poids dans des ſens contraires, c'eſt-à-dire, l'un & l'autre poids à deſcendre à la fois, ne ſoient pas dans le rapport réciproque des diſtances: or on fera voir que deux forces ou puiſſances appliquées à un levier ne peuvent être en équilibre ſi elles ne ſont dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui; donc deux poids peuvent avoir des tendences égales l'un à deſcendre & l'autre à monter, ſans que pour cela il y ait équilibre. (C'eſt-là ce que l'on a promis plus haut de faire remarquer). Donc de ce que deux poids tendent l'un en bas & l'autre en haut avec des forces ou des quantitez égales de mouvement, on ne peut pas conclure en général qu'ils ſont en équilibre.

On remarquera que la propoſition dont il s'agit ici n'eſt vraie que dans l'hypotheſe que les poids ſont pouſſez par des forces étrangeres & ajoutées à leurs peſanteurs; car s'ils ne ſont ſollicitez au mouvement que par leurs peſanteurs, & qu'ils tendent l'un à monter & l'autre à deſcendre avec des quantitez égales de mouvement, ils ſont en équilibre.

Principe général et fondamental.

36. Après tout ce qui vient d'être dit des forces relatives que des puiſſances ou des poids (les peſanteurs des poids ſont des vraies puiſſances) exercent réciproquement les unes ſur les autres; on peut établir ce principe général, 1°. Si *deux puiſſances* P, R *agiſſent l'une ſur l'autre, que l'une d'elles, par exemple, la puiſſance* R *ne puiſſe ſe mouvoir ſans qu'elle ne faſſe parcourir à la puiſſance* P *un eſpace contre ſa propre direction, la puiſſance* P *réſiſtera d'autant plus que cet eſpace ſera grand.* 2°. *Si les deux eſpaces que les puiſſan-*

ces P, R *ſont preſſées ou ſollicitées de parcourir en même-tems, l'une, par exemple, en montant, l'autre en deſcendant, ſont entr'eux réciproquement comme ces puiſſances, il y aura équilibre.* Si par exemple, la puiſſance P n'étant que le tiers de la puiſſance R, eſt ſollicitée à parcourir contre ſa propre direction un eſpace triple de l'eſpace que la puiſſance R tend à parcourir ſuivant la ſienne, il y aura équilibre entre les puiſſances P, R. Car ſi la puiſſance P étoit ſollicitée à parcourir un eſpace égal à l'eſpace de la puiſſance R, elle contrepeſeroit un tiers de l'effort de la puiſſance R; mais puiſqu'elle eſt néceſſitée de parcourir en même-tems un eſpace triple, ſa réſiſtance devient triple, & par conſéquent égale à l'effort de la puiſſance R; les deux puiſſances ſont donc en équilibre. 3°. *Lorſque les tems ſont égaux, les viteſſes ſont comme les eſpaces parcourus. On peut donc dire encore que ſi la viteſſe que la puiſſance* R *tend à prendre & celle qu'elle tend à communiquer à la puiſſance* P, *ſont entr'elles réciproquement comme ces puiſſances, elles ſont en équilibre.*

Préparation pour la seconde démonstration du levier.

On déduira cette ſeconde demonſtration des forces compoſées; pour cet effet on rappellera en peu de mots la mémoire de ce qui a été dit dans le premier Livre ſur la maniere dont l'équilibre ſe forme.

Fig. 6. 7. 37. 1°. *Deux puiſſances* P, R *dont les directions concourent en un point peuvent être retenues en équilibre par une troiſiéme puiſſance* S. Car ſi les puiſſances P, R ſont immédiatement appliquées au point de concours de leurs directions, elles tendent à lui faire décrire la diagonale d'un parallelogramme formé ſur ces mêmes directions (*Liv.* I. 154. 156. 182.); donc ſi au moment que ce point eſt preſſé de ſe mouvoir ſuivant la diagonale, on oppoſe une force ou puiſſance S égale à l'effort avec lequel ce point tend à être mû, il demeurera en repos; donc les puiſſances P, R qui tendent à mouvoir ce point chacune ſuivant ſa direction ſeront par-là retenues en équilibre. 2°. *Si les puiſſances* P, R *ſont retenues en équilibre par une ſeule force ou puiſſance* S, *elles ont néceſſairement leurs directions en un même plan.* Sans cette condition une ſeule puiſſance ne pourroit pas réſiſter en même-tems aux deux puiſſances P, R, car cette troiſiéme puiſſance S ne réſiſte tout à la fois aux deux puiſſances P, R, qu'autant que leurs efforts ſe réuniſſent & ſe confondent, pour ainſi dire, en un ſeul. Or pour que cela arrive, il faut que leurs directions concourent en un point; il eſt donc néceſſaire qu'elles ſoient en un même plan (I. *Liv.* 188).

3°. *Lorſque deux puiſſances* P, R *ont leurs directions en un même plan, elles peuvent être retenues en équilibre par une ſeule puiſſance* S. Car ou les directions des puiſſances P, R concourent, ou elles ſont paralleles. *Premierement* ſi les directions concourent en un point les efforts de ces puiſſances ſe réuniſſent & ſe confondent, pour ainſi dire, en un ſeul qui eſt dirigé ſuivant la diagonale d'un parallelogramme formé ſur les mêmes directions ; donc une ſeule puiſſance pouvant réſiſter à cet effort, retiendra les puiſſances P, R en équilibre. *Secondement* ſi les directions des puiſſances P, R ſont paralleles, on peut ſuppoſer qu'elles concourent à une diſtance infinie : car l'inclinaiſon des lignes qui ne concourent qu'à une diſtance infinie, eſt ſi petite, qu'elle differe infiniment peu du parallelíſme, ainſi on peut prendre les deux cas pour un, & ramener le cas du paralleliſme au cas des directions qui concourent (*Liv.* I. 189). 4°. *Il faut que la puiſſance qui réſiſte aux deux autres* P, R, *ſoit exprimée par la diagonale d'un parallelogramme dont les côtez pris ſur les directions des puiſſances* P, R, *expriment ces mêmes puiſſances : il faut de plus que la puiſſance* S *dirige ſon action ſuivant la diagonale & en ſens contraires des puiſſances* P, R *ou de l'effort moyen qu'elles produiſent ſuivant la même diagonale* (*Liv.* I. 182. 187). 5°. Si trois puiſſances ont leurs directions en un même plan, & toutes concourantes en un même point, que leurs efforts ſoient exprimez par les trois côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, (en prenant la diagonale pour un des côtés du parallelogramme) elles ſeront en équilibre, ſi la puiſſance qui eſt exprimée par la diagonale agit en ſens contraire des puiſſances P, R. Cela eſt évident par tout ce qui précede. 6°. *Lorſque trois puiſſances ſont en équilibre ſur un point, on peut ſuppoſer qu'elles ſont en équilibre ſur un levier qui joint leurs directions, pourvû qu'elles continuent de tirer ſuivant ces mêmes directions* (*Liv.* I. 191. 192). 7°. *Dans l'équilibre au lieu de la puiſſance réſiſtante* S, *on peut mettre un obſtacle qui arrête l'effort que les puiſſances* P, R *produiſent ſuivant la diagonale.* Car comme dans l'équilibre il ne s'agit pas de produire le mouvement, mais de l'empêcher, un obſtacle deſtitué de toute action peut faire le même effet à cet égard, qu'une puiſſance qui réagit. 8°. *Dans l'équilibre on peut toujours mettre un poids au lieu d'une puiſſance, & une puiſſance au lieu d'un poids* : car dans l'équilibre il s'agit ſeulement de produire un effort d'une certaine meſure : or un poids ou une puiſſance peuvent produire indifféremment cet effort ; il n'en ſeroit pas de même s'il falloit produire le mouvement : car pour lors

il faudroit avoir égard non ſeulement aux puiſſances en elles-mêmes, mais encore aux maſſes auxquelles elles ſont appliquées.

38. La propoſition du nombre 5 eſt confirmée non ſeulement par le raiſonnement mais encore par l'expérience. M. Bernouilli dans ſon Livre de la manœuvre des vaiſſeaux, page 163, parle ainſi de la compoſition des forces, en adreſſant la parole à M. le Chevalier Renau qui paroiſſoit révoquer en doute le principe dont il s'agit ici qui eſt fondé ſur cette compoſition. *Cependant que direz vous, Monſieur, ſi on peut confirmer cette proportion* (c'eſt la proportion qui eſt énoncée au bas de l'article) *par une infinité d'experiences ? En voici une qui eſt très-propre pour le cas en queſtion :* A *&* B *ſont deux poids égaux attachez aux deux extrémitez d'une corde* ADFEB *qui paſſe pardeſſus les deux poulies* D *&* E *que je ſuppoſe dans le même niveau : au point du milieu* F *eſt ſuſpendu un troiſiéme poids* C, *qui en deſcendant fera monter les deux autres juſqu'à ce que tous trois ſoient en équilibre : or quelle proportion y aura-t-il alors entre les poids* C *&* A *ou* B. *La regle commune veut qu'ayant achevé le parallelogramme* GLFI, *& prolongé* CF *pour avoir la diagonale* FG, *le poids* A *ſoit au poids* C *comme* LG *ou* LF *à* FG, *c'eſt-à-dire, (ſuppoſé que* DFE *ſoit un angle droit) comme* 1 *à* $\sqrt{2}$, *auſſi eſt-ce ce que l'expérience vérifiera ſi vous voulez prendre la peine de l'eſſayer.* On ſçait que le côté du quarré eſt à la diagonale comme 1 eſt à $\sqrt{2}$: ainſi les poids A & B ſont au poids C comme les côtez LF, FI du parallelogramme LI ſont à la diagonale FG.

Fig. 8.

SECONDE DEMONSTRATION DU LEVIER.

39. *Deux puiſſances* P, R *appliquées aux points* M, N *du levier* X, Y *ſuivant les directions* MP, NR, *ſont en équilibre ſi elles ſont entr'elles dans la raiſon réciproque des diſtances ou des perpendiculaires* AF, DF *menées de l'appui* F *à leurs directions ; c'eſt-à-dire, ſi elles donnent la proportion* P. R :: DF. AF. On ſuppoſe que les directions MP, NR ſont dans un même plan.

Fig. 6. 7.

DEMONSTRATION. Puiſque les directions MP, NR ſont dans un même plan, elles concourent en un point C. (Le point C eſt à une diſtance finie du levier, ſi l'angle MCN eſt d'une grandeur finie ; mais le point C eſt à une diſtance infinie du levier, ſi la longueur MN étant finie & déterminée, l'angle MCN eſt infiniment petit) ; dans ce dernier cas les directions MP, NR peuvent être conſiderées comme étant paralleles. Cela poſé, il faut mener de l'appui FE, FB paralleles aux directions CMP, CNR qui

qui doivent concourir au point C, par-là on formera le parallelogramme ECBF & les deux triangles EAF, BDF que je dis être ſemblables; les angles A & D ſont droits par l'hypotheſe, puiſque les lignes AF, DF qui meſurent les diſtances de l'appui F aux directions ſont perpendiculaires à ces mêmes directions, les angles AEF, DBF ſont égaux à l'angle C du parallelogramme EB (27. *Géom.*) ou à ſon ſupplément; donc les triangles EAF, BDF ſont ſemblables (15. *Géom*); donc BF . EF :: DF . AF (8. *Géom.*) par l'hypotheſe P . R :: DF . AF; donc P . R :: BF . EF (14. *Arit.*): & parce que BF eſt égal à CE, & EF égal à CB (2. *Géom.*), les puiſſances P & R ſont entr'elles comme les côtez CE, CB du parallelogramme EB formé ſur leurs directions; donc ſuivant le nombre premier de la préparation précedente, les puiſſances P, R étant immédiatement appliquées au point C ſuivant les mêmes directions MP, NR, elles tendent à lui faire décrire la diagonale CF qui paſſe par l'appui, & elles peuvent être retenues en équilibre ſur le point C par le moyen d'une puiſſance S qui étant égale à l'effort qui pouſſe le point C ſuivant CF réagiſſe de F vers C, ſelon le nombre quatriéme de la préparation précedente. Donc ſelon le nombre ſixiéme ſi les puiſſances P, R, S ſont appliquées au levier XY ſuivant les mêmes directions, elles ſeront encore en équilibre ſur ce levier, puiſque les directions des trois puiſſances le rencontrent; mais par le nombre ſeptiéme dans l'équilibre au lieu de la puiſſance S on peut mettre un obſtacle ou appui F qui arrête l'effort que les puiſſances P, R produiſent ſuivant la diagonale CF, & auquel la puiſſance S réſiſte; donc les puiſſances P, R appliquées au levier XY appuié ſur le point fixe F, ſeront encore en équilibre: or il eſt évident que l'équilibre que l'on vient de prouver devoir être entre les puiſſances P, R, eſt tout fondé ſur l'hypotheſe qu'on a faite que les directions des puiſſances ſont en un même plan, & que les puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui F aux directions. Donc ſi deux puiſſances P, R appliquées à un levier ont leurs directions en un même plan, & ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions, elles ſont en équilibre.

Préparation pour la troisiéme demonstration du Levier.

40. 1°. *On peut ſuppoſer que les directions des corps peſans & de leurs parties ſont paralleles.* Car le centre de la terre auquel les graves tendent, eſt ſi éloigné de la ſurface, & les leviers dont

ſert, ſi courts par rapport à cette diſtance, que l'angle formé par les directions de deux poids attachez à un levier, & auquel le levier ſert de baſe, eſt inſenſible. Si on ſuppoſe que le levier ait 10 pieds de long & qu'on ſuppute l'angle formé par les directions de deux poids ſuſpendus à ſes extrémitez, on trouvera qu'à peine il eſt de quelques tierces.

D'ailleurs, quoique cette hypotheſe des directions paralleles ne ſoit pas parfaitement conforme à l'exacte vérité, rien n'empêche qu'on ne puiſſe la faire, ſinon pour démontrer le rapport réel des poids dans l'équilibre, du moins pour déterminer le rapport qu'ils devroient avoir dans cette hypotheſe, ſauf à corriger enſuite l'erreur qui pourroit naître de cette ſuppoſition.

2°. *Dans les corps peſans il y a un centre de grævité, c'eſt-à-dire, un point par lequel un corps étant ſuſpendu, toutes ſes parties ſont en équilibre, quelque poſition qu'elles aient par rapport au lieu vers lequel elles tendent.* Dans un cylindre le centre de gravité eſt au milieu de l'axe, & dans un globe ce centre eſt le même que le centre du globe. Suivant cette définition ſi on ſuſpend un cylindre par le milieu de ſon axe, la partie qui eſt d'un côté de ce point ne l'emportera pas ſur la partie qui eſt de l'autre côté du même point, puiſque ces deux parties ſont parfaitement égales en tout.

3°. *Un corps conſerve la même peſanteur, quoiqu'il change de figure :* ainſi ſi l'on conçoit que la matiere d'un globe perd la figure ſphérique pour prendre la figure d'un cylindre ou réciproquement, le corps n'en ſera ni plus ni moins peſant.

Fig. 9. 4°. Soit le cylindre EG dont le centre de gravité eſt au point C qui tend à deſcendre ſuivant ſa direction FC : *Si ce cylindre étoit ſuſpendu au point* F *de la verge inflexible* XY, *où la direction* FC *la rencontre, il ſeroit en équilibre, c'eſt-à-dire, que la partie* EC *ne l'emporteroit point ſur la partie* CG ; mais au lieu de ſuppoſer que le cylindre EG eſt ſuſpendu au point F par ſon centre de gravité C, il faut concevoir qu'il eſt diviſé en deux parties EB, BG, les points O, I étant les centres de gravité de ces cylindres partiels, ſi on les ſuſpend par ces centres aux points M, N de la verge XY, avec des cordons OM, IN paralleles à la direction FC, il y aura encore équilibre entre les deux parties EB, BG, la verge XY étant ſuſpendue par le point F : car 1°. une partie de l'un des cylindres ne l'emportera point ſur l'autre partie, puiſque chaque cylindre eſt ſuſpendu par ſon centre de gravité. 2°. Un cylindre ne l'emportera pas non plus ſur l'autre, car il

eſt évident que les deux cylindres EB, BG ont pour centre commun de gravité, le centre de gravité du cylindre EG; c'eſt-à-dire, que toute la peſanteur des deux cylindres conſiderez comme ne faiſant qu'un même corps qui eſt ſupporté par la verge XY, ſe réunit au point C centre de gravité du cylindre EG: or par l'hypotheſe le centre de gravité C du cylindre EG eſt ſoutenu par la verge XY, puiſque la direction de ce centre paſſe par le point de ſuſpenſion F; donc toute la peſanteur des deux cylindres étant comme réunie en C, elle ſera ſoutenue de même, & un cylindre ne l'emportera point ſur l'autre, ils ſeront par conſéquent en équilibre.

5°. *Si on ſuppoſe que les cylindres* EB, BG *perdent leur figure longue, & qu'on leur donne la figure ſphérique, comme on voit en* P *&* R, *les deux poids* P, R *ſeront encore en équilibre ſur la verge ou levier* XY *dont le point de ſuſpenſion eſt en* F: car les centres de gravité des poids P, R ſont les mêmes que les centres de gravité des cylindres EB, BG, comme auſſi les points de ſuſpenſion M & N; donc toute la peſanteur des poids P, R, eſt encore réunie en C centre de gravité du cylindre EG; donc les poids P, R ſont en équilibre.

Troisième démonstration du levier.

41. *Deux poids* P, R *ſuſpendus aux points* M,N *du levier* XY *dont l'appui ou point de ſuſpenſion eſt en* F, *ſont en équilibre, s'ils ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances ou perpendiculaires menées de l'appui* F *aux directions* MP, NR, *c'eſt-à-dire, ſi* P.R :: FD.FA. Fig. 9.

Demonstration. Il faut concevoir que les poids P, R perdent la figure ſphérique, & qu'ils reçoivent celle d'un cylindre, de maniere que la longueur HB du cylindre EB qu'on ſuppoſe égal au poids P, ſoit double de FN, & que la longueur du cylindre SG qu'on ſuppoſe égal au poids R, ſoit double de FM; & parce qu'on ſuppoſe encore que les lignes de ſuſpenſion MOP, NIR paſſent par les centres de gravité O, I des deux cylindres, & des poids P, R, il s'enſuit qu'elles partagent les longueurs HB, SG en deux parties égales, & que la longueur OB eſt égale à FN, & la longueur SI égale à FM; & parce que NM & OI ſont deux paralleles compriſes entre les paralleles MOP, NIR, il ſuit que OI = NM. Si de OI on retranche OB égale à FN, il reſtera BI = SI = FM: par conſéquent les deux cylindres EB, SG ſe touchent par leurs baſes B,S. Il eſt auſſi évident que les longueurs HB, SG des cylindres ſont dans la raiſon de FN à FM; c'eſt-à-

dire, dans la raiſon réciproque des diſtances des points de ſuſpenſion M, N à l'appui F : or par l'hypotheſe les poids P, R ſont pareillement dans la raiſon réciproque des diſtances FM, FN ; donc les cylindres qui leur ſont égaux, ſont auſſi dans la raiſon réciproque des mêmes diſtances, & par conſéquent entr'eux comme leurs longueurs; donc leurs baſes B, S ſont égales (42. *Géom.*) : on peut donc conſiderer les deux cylindres comme n'en faiſant qu'un qui eſt de même groſſeur par tout. Cela poſé, ſi du point de ſuſpenſion F on mene FC parallele à NIR, on aura CI=FN=HO ou OB ; donc CI=HO de plus CO=FM=GI ; donc HO +OC =CI+IG ; donc le point C milieu de l'axe du cylindre EG eſt le centre de gravité ; donc ſi le cylindre étoit ſuſpendu par le point C au point de ſuſpenſion F du levier XY, il y ſeroit retenu en équilibre ; mais l'équilibre de deux cylindres EB, SG ſuſpendus par leurs centres de gravité aux points M, N du levier XY, & conſéquemment l'équilibre des poids P, R ne ſe fait pas autrement que l'équilibre du cylindre EG ſuſpendu par ſon centre de gravité C ; donc les poids P, R qu'on vient de ſuppoſer dans la raiſon réciproque des diſtances FM, FN de l'appui F aux directions MP, NR, ſont en équilibre.

Fig. 9. 42. COROLLAIRE. Il eſt évident que le point de ſuſpenſion F porte les efforts des poids P, R, comme s'ils ne faiſoient qu'un même corps, tel que ſeroit le cylindre EG, l'appui F eſt donc chargé de la ſomme des poids P, R. Cela étant, ſi au point F du levier XY, (ce point eſt un de ceux de la direction du centre de gravité du cylindre EG), on attache un cordon qui paſſe par deſſus les points fixes K, L, qui tienne ſuſpendu un poids Q qui ſoit égal à la ſomme des poids P, R, ou égal au cylindre EG, le poids Q fera l'effet de l'appui F, c'eſt-à-dire, qu'il empêchera le levier de deſcendre, ce qui eſt évident : car le levier eſt tiré en en bas par le poids du cylindre EG ou par la ſomme des poids P, R, & il eſt tiré en haut dans un ſens directement oppoſé par le poids Q dont l'effort eſt égal à l'effort du cylindre EG. Les poids P, R ſont donc en équilibre au moyen de la réſiſtance du poids Q. Or rien n'empêche que l'on ne conſidere le poids Q comme faiſant équilibre avec l'un des poids P ou R, & l'un des poids P ou R comme tenant lieu d'appui ; car de même que le poids Q réſiſte aux deux poids P, R, l'un ou l'autre de ces poids, par exemple, le poids R réſiſte auſſi aux efforts des poids P, Q. Cela étant,

43. *Je dis que les poids* Q, P *ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances* NF, NA *de l'appui* N *aux directions, c'eſt-à-dire, que*

Q . P :: NA . NF. Ce qu'il eſt aiſé de prouver. Car par l'hypotheſe R . P :: FA . FD ou FN ; donc *componendo* R+P . P :: FA +FN . FN : ſi dans cette derniere proportion on met Q au lieu de R+P, & NA au lieu de FA+FN, on aura Q.P :: NA.NF.

44. D'où l'on voit que ſi deux poids appliquez à un levier, ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui à leurs directions (ſuppoſées paralleles), ils ſont en équilibre, ſoit que l'appui ſe trouve entre les deux poids, ou à l'une des extrémitez du levier.

Remarque. On peut étendre cette troiſiéme démonſtration du levier aux cas où les directions concourent ou ſont inclinées l'une à l'autre, & cela en faiſant ſeulement deux ou trois ſuppoſitions qu'on ne peut pas raiſonnablement conteſter, & que l'on peut même prouver & appuier de l'expérience.

45. 1°. *Dans l'équilibre au lieu d'un poids on peut mettre une puiſſance, & au lieu d'une puiſſance on peut mettre un poids.* Car pourvû que le levier ſoit tiré avec le même effort, il importe peu de quel endroit cet effort parte. Dans l'équilibre où il ne s'agit pas de mouvement, la ſeule quantité ou meſure d'un effort décide de l'effet, quelle que ſoit d'ailleurs la puiſſance qui produit cet effort. On nomme levier angulaire celui dont les bras ſont un angle au point d'appui.

46. 2°. *Si deux puiſſances égales* O, S *tirent les bras égaux* FL, FK *du levier angulaire* KFL *dont l'appui eſt en* F, *ſuivant des directions* LO, KS *perpendiculaires à ces bras, elles ſont en équilibre.* Cette propoſition eſt évidente par elle-même, puiſque toutes choſes ſont parfaitement égales de part & d'autre. Fig. 10.

47. *Donc ſi de l'appui* F *comme centre, & avec le rayon* FK *ou* FL, *on décrit une circonférence que l'on applique à un point* N *pris à volonté ſur cette circonférence, une puiſſance* R *égale à la puiſſance* O, *& qui tire ſuivant la tangente à ce point, elle ſera encore en équilibre avec la puiſſance* S. Car ſi l'on mene du centre F le rayon FN au point de contingence N il ſera perpendiculaire à la tangente NR, c'eſt-à-dire, qu'il ſera perpendiculaire à la direction de la puiſſance R ; donc ſi on conſidere ce rayon comme un bras de levier, l'on aura deux puiſſances égales qui tirent les bras égaux d'un même levier ſuivant des directions perpendiculaires ; tout ſera donc parfaitement égal de part & d'autre. Donc une puiſſance ne pouvant l'emporter ſur l'autre, il y aura équilibre.

48. D'où il ſuit qu'il faut la même force pour réſiſter à la puiſſance O, à quelque point G ou L de la circonférence qu'elle ſoit

appliquée, & qu'elle n'agit pas plus fortement en un endroit qu'à l'autre, pourvû qu'elle tire ſuivant la tangente à la circonférence.

Fig. 11. 49. 3°. *Si deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, on peut ſubſtituer un levier droit à un levier angulaire, & un levier angulaire à un levier droit.* Le ſens de cette propoſition eſt que ſi deux puiſſances P, R ſont en équilibre ſur le levier angulaire AFY, que l'on prolonge en ligne droite l'un des bras, par exemple FY, en ſorte que ſon prolongement FM rencontre en M la direction AP, l'équilibre ne ſera point interrompu, ſi le cordon AP étant prolongé juſqu'en M, la puiſſance P tire ſuivant ſa premiere direction MAP, le levier droit MFN ou XY : concevons que les trois côtez du triangle AFM ſont des lignes inflexibles fermement attachées l'une à l'autre, & que le cordon MAP d'une foupleſſe parfaite & inextenſible, eſt couché ſur le côté MA du triangle, tous les points de ce cordon ſeront également tirez, & avec la même force par la puiſſance P ; donc le point A du même cordon, qui eſt comme collé ſur l'extrémité du bras FA en recevra la même impreſſion qu'auparavant, laquelle ſe communiquera néceſſairement à l'extrémité du bras FA, puiſque ces deux points n'en font, pour ainſi dire, qu'un ; le bras FA ſera donc tiré ſuivant la même direction & avec la même force que ſi le cordon n'étoit point attaché au bras FM ; donc l'équilibre ne ſera pas interrompu, puiſque le point A du cordon & l'extrémité du bras FA font à la puiſſance R la même réſiſtance qu'auparavant.

Fig. 11. 50 Ces trois ſuppoſitions admiſes, on peut démontrer *que ſi deux puiſſances tirent le levier* XY *ſuivant des directions inclinées l'une à l'autre, elles ſont en équilibre, ſi elles ſont en raiſon réciproque des diſtances de l'appui* F *aux directions.*

Demonstration. Si la puiſſance P & le poids R ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances FA, FD de l'appui F aux directions MAP, NR, ils ſont en équilibre. On ſuppoſe toujours que les directions MAP, NR ſuivant leſquelles le levier eſt tiré, ſont dans un même plan. Il faut prolonger la perpendiculaire FA juſqu'à ce qu'elle rencontre en G la circonférence GLK. 1°. Si l'on applique au point G une puiſſance O dont l'effort ſoit égal à la peſanteur du poids R, & qu'elle tire ſuivant une direction GO qui touche la circonférence GLK, c'eſt-à-dire, qui ſoit perpendiculaire au levier droit AFG, il y aura équilibre entre la puiſſance O & la puiſſance P qu'on ſuppoſe quant à préſent appliquée au point A du levier AFG : car les directions des puiſſances P, O ſont paralleles entr'elles, & perpendiculaires au levier AFG, de

plus ces puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances ou bras FG, EA du levier AG, puiſque l'effort de la puiſſance O eſt ſuppoſé égal à la peſanteur du poids P, & que la diſtance FG eſt égale à la diſtance FO; donc par la démonſtration précédente, les puiſſances P, O conſiderées comme deux poids dont les directions ſeroient paralleles, ſont en équilibre ſur le levier AFG. 2°. Si on applique la puiſſance O au point N ſuivant la direction NR du poids R, elle ſera encore en équilibre avec la puiſſance P, ſelon la ſeconde ſuppoſition, & ſon Corollaire; & ſi ſuivant le premier on ôte la puiſſance O pour rétablir le poids R, il y aura équilibre entre ce poids & la puiſſance P, qu'on ſuppoſe encore appliquée au point A; mais ſi ſuivant la troiſiéme ſuppoſition on prolonge le cordon AP juſqu'en M, où il étoit d'abord attaché, & que la puiſſance P tire le levier droit XY ſuivant la même direction, il y aura encore équilibre entre la puiſſance P & le poids R. Donc ſi la puiſſance P & le poids R appliquez au levier XY ſuivant les directions MAP, NR, inclinées l'une à l'autre, ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances de l'appui F aux directions, ils ſont en équilibre.

PROPOSITION QUATRIE'ME.

51. *Si deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions.* Fig. 2. 3. 4. 6. 7. 9. 11.

Cette propoſition eſt l'inverſe de la précedente; & pour la démontrer on ſuppoſe que *des puiſſances étant en équilibre, ſi on augmente ou que l'on diminue l'une d'elles ſans augmenter ou diminuer les autres, l'équilibre eſt rompu. Ce qui eſt évident.*

Demonstration. Les puiſſances P, R ſont ſuppoſées en équilibre ſur le levier XY, il faut prouver qu'elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui F aux directions, en ſorte que P. R :: DF. AF.

Par l'hypotheſe les puiſſances P, R ſont en équilibre ſur le levier XY; donc leurs directions ſont en un même plan; donc ſi les puiſſances P, R étoient entr'elles réciproquement comme les diſtances AF, DF de l'appui F aux directions, elles ſeroient en équilibre. Cela poſé, ſi on veut que les puiſſances P, R étant en équilibre, elles ne ſoient pas entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions, la raiſon de P à R ſera donc plus grande ou plus petite que la raiſon de la diſtance DF à la diſtance AF; ſuppoſons que la raiſon de P à R ſoit plus grande que la raiſon de DF à AF, ſi on diminue la puiſſance P en laiſſant la puiſ-

ſance R telle qu'elle eſt, la raiſon P à R pourra devenir égale à celle de DF à AF : cela étant par ce qui vient d'être dit au commencement de la démonſtration, les puiſſances P & R ſeroient en équilibre ; mais on vient de voir auſſi que ſi des puiſſances étant en équilibre, on diminue l'une d'elles ſans diminuer les autres, l'équilibre eſt rompu ; les puiſſances P & R ſeroient donc en équilibre, & n'y ſeroient point, ce qui eſt une contradiction manifeſte à laquelle conduit l'hypotheſe que les puiſſances P, R ne ſont pas entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui F aux directions lorſqu'elles ſont en équilibre ſur un levier. Donc ſi les puiſſances P, R ſont en équilibre ſur un levier, elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions.

Fig. 6. 7. 52. SECONDE DEMONSTRATION. On peut donner une autre démonſtration de la même propoſition en employant le principe de la compoſition des forces. Puiſque les puiſſances P, R ſont en équilibre ſur le levier XY, elles ont leurs directions en un même plan, & par conſéquent elles concourent en un point C quand même ce ne ſeroit qu'à une diſtance infinie, comme dans le cas où les directions ſont ou paralleles ou preſque paralleles. Cela poſé, ſi après avoir mené les perpendiculaires AF, DF, & avoir formé le parallelogramme EFBC, on ne convient pas que P . R :: DF . AF, on pourra prouver comme dans la démonſtration précedente qu'il n'y auroit point équilibre entre les puiſſances P & R. Car ſi la raiſon de P à R étoit plus grande que la raiſon de DF à AF, les triangles DFB, AFE étant ſemblables (comme il a été prouvé) & la raiſon de DF à AF égale à la raiſon de BF à EF, il s'enſuivroit que la raiſon de P à R ſeroit plus grande que la raiſon de BF à EF, ou plus grande que la raiſon de EC à CB ; donc pour rendre la raiſon de EC à CB égale à la raiſon de P à R, il faudroit augmenter le côté EC du parallelogramme EFBC ; & pour lors un nouveau parallelogramme dont le côté ſeroit plus grand que le côté EC, auroit une diagonale differente de CF, laquelle par conſéquent ne paſſeroit pas par l'appui F ; mais les puiſſances P, R étant en équilibre produiſent conjointement un effort moyen qui eſt dirigé ſuivant la diagonale d'un parallelogramme dont les côtez ſont proportionnels aux puiſſances ; l'effort qui réſulte de l'action conjointe des puiſſances P, R, ne ſeroit donc pas dirigé vers l'appui F ; donc cet appui ne réſiſtant point à cet effort, il n'y auroit point équilibre. Donc ſi deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions. 53.

53. Corollaires qu'on peut déduire des deux dernieres propoſitions.

Les Corollaires qu'on va déduire ſuppoſent indifferemment une des trois démonſtrations qu'on a donné du levier, & la premiere de la propoſition derniere. On peut donc arriver à ces Corollaires en ſuivant l'une des trois, ſans qu'il ſoit néceſſaire de les embraſſer toutes.

54. 1°. *Si deux puiſſances* P, R *ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles formez par leurs directions, & la ligne menée de l'appui au point de concours des mêmes directions, elles ſont en équilibre.* Fig. 12. 13. On ſuppoſe que les directions CA, CD ſont en un même plan : car ſans cette condition l'équilibre ſeroit impoſſible ; donc les directions des puiſſances P, R concourent en un point C, ou elles ſont paralleles : or on ſuppoſe ici qu'elles concourent au point C : il faut donc démontrer que ſi les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles ACF, DCF formez par les directions CA, CD, & la ligne CF menée du concours C à l'appui F, elles ſont en équilibre. Il faut concevoir que du point C comme centre, & de l'intervalle CF, on décrit une circonférence qui coupe les directions CA, CD aux points L, H, & que de l'appui F on mene aux directions les perpendiculaires FA, FD. Cela fait, il eſt évident par la ſeule définition ordinaire du ſinus, que les perpendiculaires FA, FD ſont les ſinus des angles ACF, DCF : or ſi les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD, elles ſont en équilibre ; donc ſi ces puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles ACF, DCF, elles ſont auſſi en équilibre.

55. 2°. L'angle ACD des directions peut augmenter ou diminuer : il peut augmenter juſqu'à devenir infiniment grand, en ſorte qu'il differe infiniment peu de deux angles droits, & il peut diminuer juſqu'à devenir infiniment petit : *Or dans tous ces changemens d'angles, l'équilibre ſubſiſtera ſi les puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles formez par les directions & la ligne* CF. Dans le premier de ces deux cas extrêmes, les directions deviennent directement oppoſées : cela étant, ou bien les puiſſances P, R ſont égales ou inégales : ſi elles ſont égales, le ſeul expoſé de la propoſition montre qu'elles ſeront en équilibre : ſi elles ſont inégales, pour qu'il y ait équilibre, il faudra que l'appui ſoutienne la difference ou l'excés de la grande force ſur la moindre : car il eſt évident que la moindre force ne peut contrebalancer dans la grande qu'une partie égale à l'effort qu'elle fait.

Fig. 14. 15. 56. 3°. Si le point de concours C s'éloigne infiniment du levier, c'eſt-à-dire, ſi les puiſſances P, R, tirent le levier de maniere que leurs directions ne concourent qu'à une diſtance infinie, l'angle ACD ou plutôt l'angle MCN qui a pour baſe la longueur MN, ſera infiniment petit, puiſque la longueur MN qui ſert de baſe à cet angle, eſt pour lors infiniment petite par rapport aux côtez CM, CN qui ſont infiniment grands: *Or dans cette hypotheſe de l'angle* MCN *infiniment petit, ſi les puiſſances* P, R *ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles* ACF, DCF, *elles ſont encore en équilibre*: car le premier Corollaire eſt généralement vrai dans tous les changemens poſſibles que cet angle peut recevoir. Mais il y a cette difference entre le cas dont il s'agit ici & le cas qui précede, que dans l'hypotheſe de l'angle MCN infiniment petit, le rapport des ſinus des angles ACF, DCF eſt déterminé, ainſi les puiſſances P, R dans le cas de l'équilibre, ſont néceſſairement dans ce rapport; au lieu que dans le cas où l'angle ACD eſt infiniment grand, le rapport des ſinus de ces angles eſt indéterminé, de-là vient que les puiſſances peuvent être égales où inégales: & dans tel autre rapport qu'on voudra ſuppoſer.

57. *Je dis donc que dans le cas où l'angle* MCN *eſt infiniment petit, les ſinus des angles* ACF, DCF, *ſont dans la raiſon des bras* FM, FN; *qu'ainſi ſi les puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les bras* FM, FN, *elles ſont en équilibre; & que ſi elles ſont en équilibre, elles ſont néceſſairement dans le rapport réciproque des bras* FM, FN.

Le point C étant à une diſtance infinie, les directions MP, NR ſont ſenſiblement paralleles, & font avec le levier XY, les angles AMF, DNF égaux. Cela poſé, ſi du point C comme centre, & avec le rayon CF, on conçoit que l'on décrive un arc de cercle qui coupe les directions, & que du point F l'on abbaiſe les perpendiculaires FA, FD, elles ſeront les ſinus des angles ACF, DCF, & les triangles rectangles AFM, DFN ſeront ſemblables, puiſque les angles A & D ſont droits, & les angles AMF, DNF égaux. Donc FM. FN :: FA. FD, c'eſt-à-dire, que les bras du levier ſont dans la raiſon des ſinus des angles ACF, DCF; mais lorſque les puiſſances P, R ſont en raiſon réciproque des ſinus des angles ACF, DCF, elles ſont en équilibre. Donc ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN, elles ſont auſſi en équilibre.

58. 4°. *On peut auſſi démontrer que ſi les puiſſances* P, R *ſont en*

équilibre, elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN, *en ſuppoſant que l'angle* MCN *eſt infiniment petit.* Car ſi l'angle MCN eſt infiniment petit, les bras FM, FN ſont entr'eux comme les ſinus des angles ACF, DCF; c'eſt-à-dire, comme les perpendiculaires FA, FD; mais dans l'équilibre les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances FA, FD; donc elles ſont auſſi entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN.

59. 5°. *Si les directions des puiſſances* P, R, *ſont paralleles, que de plus ces puiſſances ſoient entr'elles réciproquement comme les bras du levier, elles ſont en équilibre. Et ſi les puiſſances* P, R *ſont en équilibre, elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras du levier.*

De l'appui F il faut mener AFD perpendiculaire à l'une des directions, elle ſera perpendiculaire ſur l'autre: de plus les angles AMF, DNF ſont égaux par la ſuppoſition que les directions des puiſſances P, R, ſont paralleles; donc les triangles AFM, DFN ſont ſemblables; donc FM. FN :: FA. FD; c'eſt-à-dire, que les bras du levier ſont dans la raiſon des diſtances. Mais ſi les puiſſances P, R étoient entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD, elles ſeroient en équilibre; donc ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras du levier, elles y ſont de même. Fig. 14. 15.

60. 6°. *Si les puiſſances* P, R *ſont en équilibre & que leurs directions ſoient paralleles, elles ſont entr'elles réciproquement comme les bras* FM, FN. Car pour lors les bras FM, FN ſont dans la raiſon des diſtances de l'appui aux directions, comme cela paroît par la premiere partie du Corollaire: or ſi les puiſſances P, R ſont en équilibre, elles ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD; donc ſi elles ſont en équilibre elles ſont auſſi entr'elles réciproquement comme les bras FM, FN.

61. 7°. *Si les directions ſont perpendiculaires au levier, & que les puiſſances* P, R *ſoient entr'elles comme les bras du levier, elles ſont en équilibre:* car pour lors les diſtances de l'appui aux directions ſont meſurées par les longueurs des bras: or ſi les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions, elles ſont en équilibre; donc ſi elles ſont entr'elles comme les bras du levier qui meſurent ces diſtances, elles ſont auſſi en équilibre.

62. 8°. *Et ſi les puiſſances* P, R *ſont en équilibre, & que leurs directions ſoient perpendiculaires au levier, ces puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les bras* FM, FN. Ce qui eſt évident par a propoſition derniere (51).

63. Remarque. On peut remarquer que le cas du paralleliſme des directions, ne differe pas de celui où elles concourent à une diſtance infinie, & font un angle infiniment petit MCN. Car ces deux cas donnent les mêmes analogies.

64. 9°. Si la direction de l'une des puiſſances P ou R, par exemple, la direction de la puiſſance R, devient plus ou moins éloignée de l'appui F, ou l'appui F plus ou moins éloigné de cette direction, ce qui peut arriver, ou parce que cette direction fera des angles plus ou moins grands avec le levier XY, ou encore parce que le point d'application N ſera plus ou moins éloigné de l'appui F, en un mot de quelque maniere que ce changement de diſtance arrive, *ſi les puiſſances* P *&* R *demeurent les mêmes, l'équilibre ſera rompu & ne pourra ſubſiſter avec ce changement de diſtances.* Car par la derniere propoſition (51) ſi les puiſſances P, R ſont en équilibre, elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions, par l'hypotheſe le rapport des diſtances change, puiſque l'une d'elles devient plus ou moins grande, l'autre demeurant la même, & le rapport des puiſſances ne change point; donc les puiſſances ne ſont point entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions; donc il n'y a point équilibre entre les puiſſances P, R.

65. 10°. Suppoſant encore que la diſtance de l'appui à la direction de la puiſſance R change, la puiſſance P continuant de tirer ſuivant ſa premiere direction, & le rapport des puiſſances demeurant le même, l'équilibre ne pourra ſubſiſter, comme il vient d'être prouvé dans le Corollaire précedent: *Or cette ceſſation d'équilibre peut arriver, ou parce que la puiſſance* R *cedera à l'effort de la puiſſance* P, *ou parce que la puiſſance* P *ne pourra réſiſter à l'effort de la puiſſance* R. *Si la direction de la puiſſance* R *devient plus éloignée de l'appui qu'elle n'étoit, ce ſera la puiſſance* R *qui l'emportera ſur la puiſſance* P: car puiſque la diſtance DF devient plus grande, la diſtance AF demeurant la même, le rapport de DF à AF ſera plus grand qu'il n'étoit, & par conſéquent plus grand que le rapport de P à R; donc pour qu'il y eût équilibre, il faudroit augmenter le rapport de P à R, ce qu'on pourroit faire ou en augmentant la puiſſance P, ou en diminuant la puiſſance R. Lors donc que la direction de la puiſſance R s'éloigne de l'appui, l'effet eſt le même que ſi l'on diminuoit la puiſſance P ou que l'on augmentat la puiſſance R; mais il eſt évident que ſi dans l'équilibre on augmentoit la puiſſance R, ou que l'on diminuât la puiſſance P, ce ſeroit la puiſſance R qui l'emporteroit ſur la puiſſance P. La

même choſe arrivera donc, ſi les puiſſances demeurant les mêmes, la ſeule direction de la puiſſance R s'éloigne de l'appui.

66. 110. *Si au contraire la direction de la puiſſance* R *s'approche de l'appui* F, *cette diminution de diſtance auroit le même effort que ſi l'on diminuoit la puiſſance* R, *ou que l'on augmentât la puiſſance* P, *pour lors ce ſeroit la puiſſance* R *qui ſeroit ſurmontée par la puiſſance* P.

67. 120. Lors donc que la direction de l'une des puiſſances P ou R, par exemple, la direction de la puiſſance R, s'éloigne de l'appui ou qu'elle s'en approche, & que la puiſſance P tire toujours à la même diſtance de l'appui, il eſt néceſſaire de changer le rapport des puiſſances, ſi on veut les maintenir dans l'équilibre: *Si la diſtance* DF *augmente, il faut que la puiſſance* P *augmente dans la même raiſon :* car on vient de voir que l'augmentation de DF avoit le même effet que ſi la puiſſance P étoit diminuée, *ou bien il faut que la puiſſance* R *diminue d'autant plus que la diſtance* DF *augmente :* car on vient de voir que cette augmentation de diſtance étoit une vraie augmentation de force pour la puiſſance R. Ce ſeroit le contraire ſi la direction de la puiſſance R s'approchoit de l'appui F.

68. D'où l'on voit que ſi la direction de la puiſſance R s'éloigne de l'appui F, il y a deux moyens de conſerver l'équilibre, l'un en augmentant la puiſſance P, & laiſſant la puiſſance R telle qu'elle eſt; l'autre de laiſſer la puiſſance P la même, & de diminuer la puiſſance R. Mais ſi la direction de la puiſſance R s'approche de l'appui F, on pourra conſerver l'équilibre en augmentant la puiſſance R, ou en diminuant la puiſſance P.

69. 130. Après ce qui vient d'être dit, il eſt viſible que ſi les diſtances AF, DF demeurant les mêmes, *on augmente la force de l'une des puiſſances, il faudra augmenter l'autre; & ſi l'on diminue la force de l'une des puiſſances, il faudra auſſi diminuer la force de l'autre, de maniere qu'elles ſoient toujours entr'elles dans le rapport réciproque des diſtances à l'appui.*

70. 140. Si l'on veut augmenter l'une des puiſſances, par exemple, la puiſſance R, ſans troubler l'équilibre, il faudra éloigner la direction de la puiſſance P de l'appui, ou en approcher celle de la puiſſance R, de maniere que le rapport des puiſſances ſe trouve toujours égal au rapport réciproque des diſtances des directions à l'appui; mais ſi l'on vouloit diminuer la puiſſance R ſans toucher à la puiſſance P, il faudroit approcher la direction de la puiſſance P de l'appui, ou éloigner celle de la puiſſance R.

71. 1°. Il paroît enfin que plus la direction de l'une des puiſſances eſt éloignée de l'appui, plus la force relative de cette puiſſance augmente, puiſque pour conſerver l'équilibre, il faut diminuer ſa force abſolue, ou augmenter celle de l'autre puiſſance, ſi celle-ci continue de tirer ſuivant la même direction : or cette diſtance de la direction à l'appui n'eſt pas meſurée par la longueur du bras du levier, mais par la perpendiculaire menée de l'appui à la direction.

De l'équilibre ſur le levier eu égard à quelques circonſtances particulieres.

72. Entre ces circonſtances les unes regardent les poids en particulier, les autres la figure & le changement de ſituation du levier. 1°. On peut conſidérer les directions des corps peſans, ou comme paralleles, ou comme concourantes au centre de la terre. 2°. Les poids peuvent être ſuſpendus librement aux bras du levier avec des cordons qui leur permettent d'aller ç'à & là, ou y être fixement attachez de maniere à ne pouvoir vaciller. 3°. Le levier eſt droit ou courbe. 4°. Il a une ſituation horizontale ou inclinée à l'horizon. C'eſt par rapport à ces circonſtances qu'on va éxaminer l'équilibre des poids & des puiſſances appliquées à un levier. La regle établie dans les propoſitions précedentes & expliquée en détail dans leurs Corollaires, nous ſervira de principe pour déterminer s'il y a équilibre ou non. Cette regle eſt générale & ne ſouffre aucune exception. *Deux puiſſances, deux poids appliquez à un levier, ſont en équilibre, s'ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions ; mais ſi le rapport des puiſſances n'eſt pas égal au rapport inverſe des diſtances de l'appui aux directions, il n'y a point équilibre.* Cela poſé on peut démontrer les propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION CINQUIE'ME.

73. *Si deux poids ſuſpendus aux points* M, N *du levier droit* XY *dont l'appui eſt en* F, *ſont en équilibre lorſque le levier eſt dans une ſituation horizontale, ils ceſſeront d'y être ſi le levier devient incliné à l'horizon, & que les directions des poids concourent en un point* C *qu'on ſuppoſe être le centre de la terre.*

Fig. 16. DEMONSTRATION. On ſuppoſe que les directions MC, NC concourent au centre C de la terre ; donc les angles CMN, CNM ſont aigus : car ſi les directions MC, NC étoient paralleles, le levier étant horizontal, les angles M & N ſeroient droits, puiſque

les directions des corps pesans sont perpendiculaires à l'horizon; il faut donc que les directions s'écartent du parallelisme pour concourir au centre C, & qu'elles fassent avec le levier des angles aigus; donc si du point F on mene une perpendiculaire sur la direction MPC, elle le rencontrera en un point A entre M & C: or si on conçoit que le levier tourne de maniere que l'extrémité M s'abbaisse au-dessous de la ligne horizontale qui passe par l'appui, & que l'extrémité N s'éleve au-dessus, le rayon FM décrira une portion de circonférence qui pourra être coupée en deux points M, *m* par la direction MC, puisque cette ligne fait un angle aigu avec le rayon FM; donc tous les points de l'arc M*m*, décrits par le point M, seront au-delà de MC par rapport au point F; donc si de tous les points de M*m* on conçoit des lignes telles que IC, elles répréſenteront les directions du poids P pendant le mouvement du levier; donc tandis que le point M a décrit l'arc M*m*, la direction du poids P s'est éloignée de l'appui F; au contraire la direction du poids R s'en est approchée; car le point N s'est nécessairement approché de la ligne verticale BO qui passe par l'appui F, la direction NRC s'est donc approchée du même appui, d'où l'on voit que dans ce changement de situation du levier, la direction du poids P s'est éloignée de l'appui, & que la direction du poids R s'en est approchée, les poids P & R cessent donc d'être dans la raison réciproque des distances à l'appui, ils ne sont donc plus en équilibre.

Comme la direction du poids R s'approche de l'appui F pendant tout le tems du mouvement, & que celle du poids P ne s'en approche qu'après s'en être éloignée, le levier continuant de tourner après que le rayon FM aura rencontré la ligne MC au point *m*, le rapport des distances de l'appui F aux directions du poids P & du poids R sera encore plus grand que celui de FA à FD, c'est-à-dire, plus grand que le rapport qui est requis pour l'équilibre; par conséquent dans toutes ces situations du levier, il n'y aura point équilibre.

74. On ne peut pas vérifier par l'expérience ce défaut d'équilibre, parce que les directions des poids attachez à un levier, sont sensiblement paralleles, quoiqu'elles concourent: or on a démontré que si deux poids sont en équilibre dans une certaine situation du levier, ils y sont pareillement, quelque situation qu'on lui donne, pourvu que leur directions soient paralleles; donc quoique les directions des poids P, R concourent au centre de la terre comme l'angle qu'elles y font est insensible, s'ils sont en équilibre

lorſque le levier eſt horizontal, ils y ſeront auſſi, quelque autre ſituation qu'on donne au levier. La propoſition qu'on vient de démontrer, eſt néanmoins vraie dans la rigueur géométrique.

75. Dans les cas particuliers qu'on va examiner dans la ſuite de cet article, on ſuppoſera que les directions des poids ſont paralleles; puiſque leur concours au centre de la terre, ne change rien dans le rapport qu'ils doivent avoir entr'eux pour faire équilibre ſur un levier, quelque ſituation qu'on lui donne.

PROPOSITION SIXIE'ME.

Fig. 17. 18. 76. *Si deux poids* P, R *attachez au levier horizontal* XY *ſont en équilibre, ils y ſeront encore, quelque ſituation qu'on donne au levier, pourvu que dans toutes ces ſituations la ligne* GE *qui joint leurs centres de gravité* G, E, *paſſe par l'appui* F.

DEMONSTRATION. Il faut mener par l'appui F la ligne AFD qui ſoit perpendiculaire ſur une des directions, elle ſera perpendiculaire ſur l'autre, & l'on aura deux triangles ſemblables AFG, EFD; & parce que les poids ſont ſuppoſez en équilibre, ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances FA, FD, & par conſéquent dans la raiſon réciproque de FG à FE: or quelque ſituation qu'on donne au levier, on aura toujours deux triangles ſemblables répréſentez par AFG, EFD. Les diſtances, AF, DF ſeront donc dans le rapport conſtant de FG à FE; donc les poids P, R qui ſont entr'eux dans la raiſon réciproque de FG à FE ſeront dans tous les cas poſſibles dans la raiſon réciproque des diſtances; ils ſeront donc en équilibre.

PROPOSITION SEPTIE'ME.

Fig. 19. 20. 77. *Si la ligne* GE *qui joint les centres de gravité ne paſſe pas par l'appui* F, *les poids* P, R *étant ſuppoſez en équilibre ſur le levier horizontal* XY, *ceſſeront d'y être ſi on donne au levier une autre ſituation.* On ſuppoſe encore que les poids ſont fixement attachez au levier. Car s'ils ſont ſuſpendus avec des cordons, ils peuvent être en équilibre, quelque ſituation qu'on donne au levier, quoique la ligne GE qui joint les centres de gravité ne paſſe pas par l'appui. Cette propoſition renferme deux cas, ou bien les poids P, R ſont au-deſſous du levier horizontal ou au deſſus.

DEMONSTRATION DU PREMIER CAS, *lorſque les poids* P, R *ſont au-deſſous du levier horizontal* XY. Il faut de l'appui F mener les lignes FG, FE aux centres de gravité G, E. Puiſque le levier eſt horizontal, & que les directions des poids ſont paralleles, elles ſont

ſont perpendiculaires au levier XY, car les directions des poids ſont perpendiculaires à l'horizon; donc le levier eſt auſſi perpendiculaire à ces directions; par conſéquent les lignes FG, FE tirées du point F du levier ſont obliques aux directions. Suppoſons que le levier tourne, & que c'eſt le point M qui deſcend tandis que le point N monte, il eſt évident que la ligne FG, ou le centre de gravité G s'approchera de la verticale BO qui paſſe par l'appui F, quelle fera avec cette ligne un angle moindre qu'auparavant, & que la direction du poids P qui eſt parallele à cette verticale & qui paſſera par *g* ſe ſera approchée de l'appui F; au contraire la direction du poids R s'en ſera éloignée: car le poids R ne peut monter, que la ligne FE ne s'approche de l'horizontale qui paſſe par le point F, & ne faſſe un moindre angle avec elle; or FE étant oblique à la direction du poids R, & FN étant perpendiculaire à la même direction, il faut que FE ſoit plus longue que FN; donc lorſque FE ſera devenue horizontale, c'eſt-à-dire, que l'angle EFN venant à s'évanouir, la ligne FE s'ajuſtera avec l'horizontale, elle excedera la longueur FN; par conſéquent la direction du poids R ſera plus éloignée de l'appui qu'auparavant: or pendant tout le tems de ce mouvement, il eſt viſible que la direction du poids R s'éloignera de l'appui; donc ſi le levier XY d'horizontal devient incliné à l'horizon, la direction du poids qui deſcend, s'approche de l'appui; & la direction de celui qui monte, s'en éloigne. Donc les poids P, R ne ſont plus, comme auparavant, dans la raiſon réciproque des diſtances. Donc ils ceſſent d'être en équilibre.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS, *lorſque les poids* P, R *ſont fixement attachez au-deſſus du levier horizontale* XY. Le contraire arrive de ce qui eſt arrivé dans le cas précedent. Si le levier vient à tourner, la direction du poids qui monte s'approche de l'appui, tandis que celle du poids qui deſcend s'en éloigne. Car il eſt viſible que le centre de gravité G étant deſcendu en *g*, s'eſt éloigné de la verticale BO, & que le centre de gravité E qui eſt monté, s'en eſt approché: par conſéquent la direction du centre de gravité G s'eſt éloignée, & celle du centre de gravité E s'eſt approchée de la verticale BO. La premiere direction s'eſt donc éloignée de l'appui F, & la ſeconde s'en eſt approchée. L'équilibre ne peut donc pas ſubſiſter entre les poids P, R, ſi le levier ceſſe d'être horizontal. Fig. 21. 22.

78. COROLLAIRE. Il ſuit de cette propoſition 1°. *qu'un poids attaché fixement au-deſſous d'un levier horizontal, étant retenu en équi-*

libre par une puiſſance appliquée au même levier, ſi le poids monte juſqu'à l'horizontale qui paſſe par l'appui, & même au-deſſus, il faudra une plus grande force pour le retenir en équilibre dans cette ſeconde ſituation du levier. On ſuppoſe que la puiſſance tire à la même diſtance de l'appui : car on vient de voir que le poids dont il s'agit, ne peut monter à moins que ſa direction ne s'éloigne de l'appui ; la force relative du poids eſt donc augmentée à cauſe de cette plus grande diſtance ; il faut donc une force plus grande pour le tenir en équilibre. 2°. *Si le poids deſcend au lieu de monter, il faudra que la puiſſance qui faiſoit auparavant équilibre avec ce poids diminue :* car la direction du poids s'approche de l'appui à meſure qu'il deſcend ; donc ſa force relative diminue ; donc la force qui doit faire équilibre avec ce poids ayant ſa direction à la même diſtance de l'appui, doit diminuer.

3°. *Mais ſi un poids eſt fixement attaché au-deſſus d'un levier horizontal, le levier venant à tourner de maniere que le poids monte juſqu'à une certaine hauteur, ſa direction s'approche de l'appui ; il faut donc pour lors une force moindre qour le tenir en équilibre.* Il faudra au contraire que la force augmente, ſi le poids deſcend, car pour lors la direction de poids s'éloigne de l'appui.

PROPOSITION HUITIE'ME.

Fig. 20. 22. 23. 24. 79. *Si le levier* XY *eſt courbé, ou, ce qui revient au même ſi étant droit, il tient à une anſe* OF *arrêtée à un point fixe* F *qui ſert d'appui, & autour duquel elle peut tourner librement ; de quelque maniere que deux poids ſoient attachez à ce levier, qu'ils y ſoient ſuſpendus librement, qu'ils y ſoient arrêtez en-deſſus ou en-deſſous, d'une maniere ferme qui ne leur permette pas de s'écarter des points de ſuſpenſion* M, N, *ſi les poids ſont en équilibre lorſque le levier eſt horizontal, ils ceſſeront d'y être, s'il devient incliné.*

Le levier étant horizontal, la courbure MFN peut être ou au-deſſus ou au-deſſous de la ligne horizontale qui paſſe par l'appui F.

Fig. 22. 24. DEMONSTRATION DU PREMIER CAS, *lorſque la courbure du levier eſt au-deſſus de la ligne horizontale* FH. Si on conçoit que le levier tourne autour de l'appui F, de maniere que le poids P deſcende, il eſt évident que le point G où la ligne FG coupe la direction GP du poids P lorſqu'il eſt deſcendu en *g* s'eſt éloigné de la verticale BO ; & que le point E où la ligne FE coupe la direction du poids R s'eſt approché de la même verticale BO ; donc la direction du poids P laquelle paſſe par le point *g*, s'éloigne de la verticale BO, & par conſéquent de l'appui F qui eſt ſur cette ligne, au contraire la direction du poids R s'en approche ; donc

les poids P, R ne ſont plus dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions. Donc ils ceſſent d'être en équilibre.

DEMONSTRATION DU SECOND CAS, *lorſque la courbure du levier eſt au-deſſous de la ligne horizontale qui paſſe par l'appui* F. Fig. 20. 23. Dans ce ſecond cas c'eſt la direction du poids qui monte, qui s'éloigne de l'appui F, & la direction du poids qui deſcend s'en approche. Il eſt aiſé de le prouver de la même maniere que pour le cas précédent. Donc ſi les poids P, R ſont en équilibre, le levier étant horizontal, il n'y ſont plus, de quelque maniere que le levier devienne incliné.

80. COROLLAIRES. 1°. *Si la courbure eſt au-deſſus de l'horizontale* FH, *il faut une force plus grande pour tenir le poids en équilibre, lorſque le levier eſt horizontal que lorſqu'il eſt incliné, & que le poids s'éleve au-deſſus de l'horizontale* FH. Car pour lors la direction du poids eſt plus proche de l'appui que lorſque le levier eſt horizontal; mais ſi le poids s'abbaiſſe au-deſſous de FH, ſa direction s'éloigne de l'appui; la force néceſſaire pour le ſoutenir eſt donc plus grande que ſi le levier étoit dans la ſituation horizontale. Fig. 22, 24.

81. 2°. *Si la courbure eſt au-deſſous de l'horizontale* FH, *il faudra une plus grande force pour ſoutenir le poids qui s'éleve*, parce que ſa direction s'éloigne pour lors de l'appui; *il faudra au contraire qu'elle ſoit moindre pour faire équilibre avec le poids lorſqu'il s'abbaiſſe, que lorſque le levier eſt horizontal*, parce que ſi le poids s'abbaiſſe, ſa diſtance à l'appui diminue. Fig. 20, 23.

82. On peut remarquer que *ſi la courbure du levier eſt au-deſſus de l'horizontale* FH, *& que deux poids ſoient en équilibre lorſque le levier eſt horizontal, pour peu qu'on l'incline, l'équilibre ſera rompu, & que le levier tournera juſqu'a ce que la courbure ait paſſé au-deſſous de l'horizontale* FH. Car plus le levier tournera, plus la direction du poids qui deſcend s'éloignera de l'appui; c'eſt pourquoi ſa force relative augmentant ainſi, elle imprimera au levier une viteſſe de plus en plus grande, juſqu'a ce que ſa courbure ſe ſoit renverſée & ſe ſoit miſe au-deſſous de l'horizontale qui paſſe par l'appui F. *Mais ſi la courbure eſt au-deſſous de l'horizontale* FH, *pour faire deſcendre l'un des poids, il faudra diminuer l'autre de plus en plus*, parce que la force relative du poids qui deſcend, diminue à meſure qu'il deſcend; ou ſi l'on veut que le poids qui monte demeure le même, il faudra augmenter le poids qui deſcend; & cela d'autant plus qu'on le fera deſcendre plus bas. On aura occaſion de faire uſage de ces remarques dans la conſtruction de la balance. Fig. 21. 22. 24. Fig. 19. 20. 23.

DE LA POULIE.

Fig. 25. 26. 27. 28.

83. La *poulie* eſt une machine compoſée d'un *rond* ou *roulette* MLN percée à ſon centre ●, & traverſée d'un eſſieu qu'on appelle *goujon* ou *tourillon*, & autour duquel elle peut tourner : on fait entrer la roulette dans une *chape* ou *écharpe* OH, où elle eſt retenue par le moyen de ſon tourillon qui traverſe auſſi la chape. Une corde paſſe par deſſus la roulette, & y eſt retenue dans une entaille qui eſt autour de ſa circonférence. La corde eſt tendue par l'action d'une puiſſance & d'un poids ou fardeau ; & par la tenſion qu'elle reçoit, elle s'applique à la circonférence de la roulette, & le frottement qu'elle y fait oblige la roulette de tourner. Cet aſſemblage eſt ſoutenu par un point fixe K, autour duquel la chape OH peut tourner horizontalement de gauche à droite & de droite à gauche. Dans la ſuite on emploiera les termes de *poulie* & de *roulette* dans le même ſens pour ſignifier le rond MLN qui tourne autour de ſon centre.

84. M. Varignon dans ſa nouvelle Mécanique, déduit les proprietez de toutes les machines ſimples ou élémentaires, en leur appliquant immédiatement le principe des mouvemens compoſez. Par cette méthode on traite de chaque machine indépendamment & ſans aucun rapport aux autres ; mais d'un autre côté cette maniere de prouver engage à des redites inévitables : d'ailleurs il eſt aiſé d'appercevoir que dans certaines machines la maniere d'agir & de réſiſter des puiſſances eſt la même, & qu'il n'y a de difference que dans la forme : de ce nombre ſont le levier, la poulie & le treuil. Il eſt vrai que ſelon la remarque de M. Varignon, M. Deſcartes dit que *c'eſt une choſe ridicule que de vouloir employer la raiſon du levier dans la poulie* : cependant ſans forcer les idées, on peut découvrir dans la poulie tout ce qui ſe trouve dans le levier, une verge droite ou courbe, deux puiſſances qui la tirent en des ſens oppoſez, & un appui qui ſupporte le tout. D'ailleurs tous les raiſonnemens que l'on a faits ſur le levier ſuivant la triple maniere d'en démontrer la principale propriété, conviennent à la poulie, & on peut les faire encore ſans aucune nouvelle ſuppoſition : rien n'empêche donc que l'on ne mette la poulie & le tour au même rang que le levier ; & en cela on ne fait que ſuivre le grand nombre des Auteurs qui ont traité de la mécanique. Lorſqu'on prend cette voie, ce n'eſt pas que l'on ſoit dans l'impuiſſance d'appliquer à ces deux machines les premiers principes de la mécanique ; c'eſt ſeulement pour éviter les longueurs, & pour montrer que les ma-

M. Huget, Sciences et Arts. 593

nes que l'on nomme élémentaires, ne ſont pas tellement indépendantes les unes des autres, qu'on ne puiſſe en conſiderer plusieurs ſous le même point de vûe.

85. La poulie peut être *fixe* ou *mobile*. La poulie fixe eſt celle dont la chape eſt fixe, c'eſt-à-dire, qui demeure attachée à un même point, quoiqu'elle puiſſe tourner autour de ce point, & la poulie autour de ſon centre ou tourillon. La poulie mobile eſt celle dont la chape eſt mobile, c'eſt-à-dire qu'elle peut aller & venir dans le ſens que les puiſſances tirent. Lorſque deux puiſſances ſont en équilibre ſur une poulie, leurs directions ſont néceſſairement en un même plan: cette condition eſt abſolument néceſſaire, & ſe trouve toutes les fois que deux puiſſances agiſſant l'une contre l'autre ſont retenues en équilibre. Cela étant, les cordons que les puiſſances tirent, & qui repréſentent leurs directions, ſont ou paralleles, ou concourent en un point.

86. Il eſt évident que la corde qui paſſe par-deſſus la poulie, n'embraſſe qu'une partie de ſa circonférence, & qu'il y a deux points où elle quitte la poulie; ces points ſont les extrêmitez de l'arc que la corde entoure. La corde touche la poulie aux points où elle commence à s'en ſéparer, c'eſt-à-dire, que la corde étant prolongée en ligne droite, ne rencontre la poulie qu'en ces deux points: il eſt évident qu'après que la corde s'eſt ſéparée de la poulie aux extrêmitez de l'arc qu'elle embraſſe, elle ne peut la rencontrer davantage ni en deçà ni en delà de ces points, quoique prolongée en ligne droite de part & d'autre; caril faudroit pour cela que la corde & ſon prolongement ne fuſſent pas en ligne droite, mais qu'il ſe fît un pli à ces points là même, puiſque la corde ne peut rencontrer la circonférence de la poulie en d'autres points qu'en ſe pliant, & en imitant ſa courbure.

87. Si du centre de la poulie on mene aux points où la corde la quitte (on les nommera points d'attouchement) deux rayons, ils ſeront perpendiculaires à la corde, puiſqu'elle eſt tangente de la poulie à ces points là.

88. Dans la poulie fixe la direction de la réſiſtance eſt entre les directions de la puiſſance & du poids; mais dans la poulie mobile, c'eſt la direction du poids ou fardeau à élever qui eſt entre la direction de la puiſſance & celle de la réſiſtance du point fixe.

89. Dans la poulie fixe, tous les points de la corde ou chape OK qui répréſente la direction de la réſiſtance, ſont tirez avec la même force, & réſiſtent également; c'eſt pourquoi on peut concevoir que cette réſiſtance eſt appliquée à tel point de la ligne OK que Fig. 25. 26.

[illegible] choisir : or on supposera que cette résistance est au [illegible] de la poulie. Dans la poulie mobile la résistance du point [illegible] est aussi à tous les points de la corde KF ; on ne fera néanmoins attention qu'à la résistance du point F ou la corde KF touche la poulie, & on considerera dans l'une & l'autre poulie, le point fixe qu'on vient de désigner comme un appui.

90. Lorsque la puissance P & le poids R sont en équilibre sur la poulie, il n'est pas nécessaire qu'elle conserve sa figure ronde. Quelle que soit sa figure, l'équilibre ne sera point interrompu, si les directions ne changent point, & que les efforts suivant ces directions soient les mêmes ; car il est visible que la figure ronde n'est que pour la facilité ou commodité du mouvement qu'il n'est pas nécessaire de considerer dans l'équilibre : on peut donc concevoir que dans l'équilibre entre la puissance P & le poids R, il ne reste de la poulie que les rayons menez du centre O ou F aux points d'attouchement XY, ces rayons étant roides & inflexibles, l'équilibre se fera de même que si la poulie conservoit sa rondeur.

Cela étant ainsi, il est manifeste que la poulie ne differe point d'un levier dont l'appui est en F, & les points de suspension ou d'application de la puissance & du poids en M & N.

PROPOSITION NEUVIE'ME.

Fig. 25. 26. 91. *Dans la poulie fixe le rapport de la puissance* P *au poids* R *est un rapport d'égalité, c'est-à-dire, que si la puissance est égale au poids, il y a équilibre.* On suppose que les directions sont en un même plan.

DEMONSTRATION. De l'appui F il faut mener aux points d'attouchement X, Y les rayons FA, FD qui seront perpendiculaires aux directions MP, NR (14 *Géom.*) Cela fait, on peut considerer la puissance P & le poids R comme étant appliquez aux points M, N du levier XFY suivant les directions MP, NR ; donc la puissance P & le poids R sont en équilibre, s'ils sont dans la raison réciproque des distances ou perpendiculaires menées de l'appui F aux directions : or les perpendiculaires FA, FD sont égales ; donc la raison inverse des perpendiculaires FA, FD est une raison d'égalité ; mais par l'hypothese le rapport de la puissance P au poids R est aussi un rapport d'égalité ; donc ce rapport est égal au rapport inverse des distances ; donc la puissance P & le poids R sont en raison réciproque des distances ou perpendiculaires menées de l'appui aux directions. Donc il y a équilibre.

Il est évident qu'une seule démonstration suffit pour le cas où les directions sont paralleles, & celui où elles concourent.

PROPOSITION DIXIE'ME.

92. *Si une puiſſance* P *tire contre un poids* R *à l'aide d'une poulie mobile, il y a équilibre ſi la puiſſance* P *eſt au poids* R *comme le rayon de la poulie eſt à la ligne qui joint les deux points d'attouchement* X, Y. Fig. 27. 28.

Demonstration. Dans l'hypotheſe préſente l'appui F du levier XNY eſt au point d'attouchement Y. Si de l'appui F on mene les perpendiculaires FA, FD aux directions de la puiſſance & du poids, il y aura équilibre, ſi l'on a P . R :: FD . FA ; c'eſt-à-dire, ſi la puiſſance P & le poids R ſont en raiſon réciproque des diſtances de l'appui F aux directions. Or ſi la puiſſance P eſt au poids R comme le rayon eſt à la ligne FX qui joint les points d'attouchement, ils ſeront auſſi dans la raiſon de FD à FA. 1°. Si les directions ſont paralleles, la ligne FX qui joint les points d'attouchement eſt un diametre qui eſt égal à la diſtance FA, & dont la moitié qui eſt le rayon FO, eſt égale à la diſtance FD. Donc ſi l'on a P . R :: FO . FX l'on aura auſſi P . R :: FD . FA ; c'eſt-à-dire, que la puiſſance P, & le poids R ſeront dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui F aux directions ; donc il y a équilibre. 2°. Si les directions ſont inclinées l'une à l'autre, l'on aura les deux triangles ſemblables DFO, AFX : car les angles D & A ſont droits : d'ailleurs FA eſt parallele à OX, puiſque ces deux lignes ſont perpendiculaires à la direction MP ; donc les angles alternes OXF, AFX ſont égaux : de plus l'angle OXF eſt égal à l'angle OFX, puiſque le triangle OFX eſt iſocele ; donc les triangles DFO, AFX ſont ſemblables ; donc l'on aura la proportion FO . FX :: FD . FA ; mais l'on ſuppoſe que P . R :: FO . FX. Donc P . R :: FD . FA. C'eſt-à-dire, que la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions, par conſéquent il y a équilibre. Fig. 27. Fig. 28.

93. Corollaire. Dans la poulie fixe il y a égalité d'efforts de la part de la puiſſance & du poids, les directions étant paralleles ou non : ainſi le rapport de la puiſſance au poids eſt égal à celui de 1 à 1, c'eſt-à-dire, que c'eſt un rapport d'égalité ; mais il n'en eſt pas de même dans la poulie mobile ; le rapport de la puiſſance au poids eſt variable ſelon que les directions ſont paralleles ou inclinées : lorſque les directions ſont paralleles, la puiſſance doit faire un effort qui ſoit la moitié de l'effort du poids, car pour lors elle eſt au poids comme le rayon eſt au diametre ; mais dans les autres cas elle eſt au poids comme le rayon eſt à la ligne qui joint les points d'attouchement : or cette ligne eſt moindre que le diametre ; donc

le rayon eſt plus grand que la moitié de cette ligne ; donc la puiſſance P qui eſt répréſentée par le rayon, eſt plus grande que la moitié du poids qui eſt répréſentée par la moitié de la ligne qui joint les points d'attouchement. Par conſéquent la puiſſance néceſſaire pour ſoutenir un poids à l'aide d'une poulie mobile, eſt la moindre qu'il eſt poſſible lorſque les directions ſont paralleles : car pour lors il ſuffit qu'elle faſſe un effort égal à la moitié du poids, au lieu que dans tous les autres cas ſon effort doit exceder la moitié du poids qu'elle tient en équilibre.

REMARQUE. On auroit pû appliquer à cette machine le principe de M. Deſcartes tiré du mouvement, & celui des forces compoſées, emploié par M. Varignon ; ainſi lorſqu'on a rapporté cette machine au levier, ce n'a été que pour abréger.

DU TREUIL OU TOUR, & des machines qui y ont rapport.

Fig. 29. 30 31. 94. Cette machine reçoit pluſieurs noms ſelon la figure qu'on lui donne, l'uſage qu'on en fait, & la ſituation dans laquelle on la poſe. Cette grande variété n'empêche pas néanmoins, qu'en retranchant par la penſée toutes les pieces qui ne ſont que pour la ſolidité de la machine ou pour la commodité du ſervice, on ne puiſſe la répréſenter d'une maniere générale & qui convienne aux differentes formes qu'elle peut avoir. Ce qui eſt eſſentiel à cette machine, & qu'il eſt néceſſaire de remarquer pour avoir le rapport de la puiſſance au poids ou fardeau qu'elle ſoutient, eſt un cylindre CC qui peut tourner ſur deux pivots E, F qui ſont engagez dans deux trous ou fentes qui tiennent le cylindre aſſujetti, de maniere qu'il n'a d'autre liberté que celle de tourner ſans pouvoir recevoir d'autre mouvement. Les pivots E, F ſont ſur le prolongement de l'axe du cylindre : on perce ſa circonférence de pluſieurs trous ou l'on implante des bâtons DG auxquels la puiſſance s'applique pour ſoutenir l'effort du poids ou fardeau qui réagit ou réſiſte, au moyen d'une corde qu'il tire, & qui eſt entortillée ſur la circonférence du cylindre. Pour la commodité de la puiſſance, au lieu des bâtons DG, on emploie ſouvent une roue qui eſt quelquefois traverſée de pluſieurs chevilles toutes paralleles entr'elles, & perpendiculaires au plan de la roue, lequel eſt auſſi perpendiculaire à l'axe du cylindre. Le cylindre eſt auſſi appellé *tour* ou *rouleau*, & la roue *tambour* ou *timpan*. Lorſque le tour ou rouleau eſt poſé de niveau, c'eſt-à-dire, que ſon axe eſt horizontal, la machine eſt appellée *treuil*, *virevau*, &c.

&

& par les latins *fucula ;* mais lorſque le tour eſt poſé à plomb, c'eſt-à-dire, que ſon axe eſt perpendiculaire à l'horizon, elle eſt appellée *vindas*, *cabeſtan*, & par les latins *ergata*. Lorſque le cylindre eſt joint à une roue qu'il enfile par le milieu ſuivant ſon axe, la machine eſt appellée par les latins *axis in peritrochio*, c'eſt-à-dire, la roue avec ſon eſſieu ou l'eſſieu dans la roue : *axis* c'eſt le cylindre ou rouleau : *peritrochium* c'eſt le tambour ou la roue. Dans la ſuite lorſqu'on parlera de l'axe du treuil, on entendra une ligne inflexible qui paſſe par les centres des baſes du cylindre ou rouleau.

95. Le tour ou treuil & les machines qui s'y rapportent ont deux appuis : or c'eſt à cauſe de ce double appui qu'il n'eſt pas néceſſaire que la puiſſance & le poids qui ſont équilibre ſur cette machine ayent leurs directions en un même plan ; c'eſt en cela que le treuil differe du levier ordinaire qui n'a qu'un appui. Dans le levier ordinaire il faut pour l'équilibre que les efforts de la puiſſance & du poids ſe compoſent en un ſeul, puiſqu'il n'y a qu'une réſiſtance, il eſt donc néceſſaire que les directions ſoient en un même plan, ou qu'elles ſe rencontrent en quelque point ; mais il n'en eſt pas de même dans le treuil, le double appui qui s'y trouve peut réſiſter en tout ſens, & la machine eſt aſſujettie de maniere qu'elle ne peut recevoir que le mouvement circulaire, ce qui détermine les deux puiſſances qui y ſont appliquées à agir l'une ſur l'autre ; car l'on conçoit que ſi l'une tire en ſens contraire de l'autre, c'eſt-à-dire, ſi étant toutes deux d'un même côté par rapport à l'axe, l'une tire en haut & l'autre en bas, ou ſi étant de differens côtez par rapport au même axe, elles tirent toutes deux en bas, l'une ne peut ſe mouvoir ſuivant ſa direction qu'elle ne meuve auſſi l'autre puiſſance contre celle qu'elle tend à ſuivre, & qu'elle n'en éprouve toute la réſiſtance, puiſque ſi un point du treuil tourne tous les autres points qui ſont à la même diſtance de l'axe ſont déterminez à tourner d'une égale viteſſe ; la puiſſance qui cede à l'effort contraire, & que l'on peut ſuppoſer appliquée à quelqu'un de ces points, réagit donc contre la puiſſance qui fait tourner la machine ; & puiſque tous les points qui ſont à la même diſtance de l'axe, tournent ou tendent à tourner d'une égale viteſſe, il s'enſuit que la puiſſance qu'on ſuppoſe la plus foible & qui eſt contrainte d'obéir au mouvement circulaire, réſiſte également quelque ſoit celui de ces points auquel elle eſt attachée. Si on ſuppoſe que les directions de la puiſſance & du poids ſont dans un même plan, leur réſiſtance réciproque eſt la même que ſi ces directions ſont en des plans differens pourvu que chaque direction, par

exemple, celle de la puiſſance ſoit dans l'une & l'autre hypotheſe à égale diſtance de l'axe, la raiſon en eſt que la puiſſance & le poids ſe réſiſtent l'un à l'autre, parce qu'ils tendent à faire tourner le treuil en des ſens oppoſez : or ſoit que les directions ſe trouvent ſur un même plan ou en des plans differens, le treuil eſt diſpoſé à tourner avec la même viteſſe pouvu que les directions ſoient dans l'une & l'autre hypotheſe à la même diſtance de l'axe ; ainſi ſi la direction de la puiſſance eſt diſtante de l'axe de 2 pieds lorſqu'elle eſt en un même plan que la direction du poids, le treuil ſera ſollicité par la puiſſance à tourner avec la même viteſſe que ſi cette direction étant hors de ce plan, & dans un plan different, elle eſt encore diſtante de l'axe de 2 pieds, ce qui eſt évident, car le mouvement circulaire eſt produit en l'un & l'autre cas dans les mêmes circonſtances, c'eſt la même force qui tire & à la même diſtance de l'axe ; donc puiſque ſi un point du treuil eſt tiré avec une certaine force tous les autres points qui ſont à égale diſtance de l'axe tendent à tourner avec la même viteſſe, il s'enſuit que la puiſſance doit faire la même impreſſion ſur le treuil lorſqu'elle tire ſuivant une direction qui eſt dans le même plan que la direction du poids, & lorſqu'elle ſe trouve dans un plan different. On ſuppoſe que les plans où ſont les directions ſont perpendiculaires à l'axe.

96. Lorſqu'une puiſſance & un poids ſont appliquez au treuil pour la facilité de la démonſtration, on peut donc ſuppoſer que les directions ſont en un même plan perpendiculaire à l'axe quoiqu'elles ſoient dans des plans differens ſuppoſez auſſi perpendiculaires au même axe.

PRÉPARATION POUR LA DEMONSTRATION SUIVANTE.

97. On repete en peu de mots ce qui vient d'être expoſé. La puiſſance P & le poids R étant appliquez au treuil ſuivant des directions perpendiculaires à l'axe, c'eſt-à-dire, ſuivant des directions qui ſe trouvent l'une & l'autre ſur des plans perpendiculaires à l'axe, on conſiderera que le plan où eſt la direction de la puiſſance P s'approche du plan où eſt la direction du poids R en demeurant toujours parallele à lui-même, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à l'axe. Il eſt évident que ce plan touchera enfin celui où eſt la direction du poids, & parce que l'un eſt parallele à l'autre ils ne feront plus qu'un ſeul & même plan, & couperont l'axe en un même point. La puiſſance P après avoir ainſi changé de place agira ſur le poids R avec la même force qu'auparavant le rapport de l'un à l'au-

tre ſera donc encore le même. Cela poſé, il eſt aiſé de démontrer l'analogie du treuil, ou le rapport de la puiſſance au poids: cette analogie eſt la même que celle du levier.

PROPOSITION ONZIE'ME.

98. *La puiſſance* P *& le poids* R *étant appliquez au treuil ſuivant des directions perpendiculaires à l'axe, & conſiderées dans un même plan, ſont en équilibre s'ils ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances où perpendiculaires menées aux directions, menées, diſ-je, du point ou le plan des mêmes directions coupe l'axe.* Fig. 32. 33.

Demonstration. Dans le treuil le poids ou le fardeau eſt toujours ſuſpendu ou appliqué au rouleau ou cylindre avec une corde qui s'entortille ou ſe roule ſur le même cylindre, & la puiſſance eſt appliquée aux batons ou barres qui ſont implantées dans le cylindre, ou bien elle tire une roue qui eſt traverſée ou enfilée par le rouleau, le cercle BDL répréſente le profil du rouleau ou le plan qui le coupe perpendiculairement à l'axe, & qui eſt le même que celui où l'on ſuppoſe que ſont les directions de la puiſſance & poids, le point F qui eſt le centre du rouleau, eſt auſſi le point où le plan BDL coupe l'axe, la direction NR du poids touche le rouleau au point D, & la direction MP de la puiſſance peut être perpendiculaire ou oblique au baton ou barre BM, lorſque la puiſſance eſt appliquée à la roue GKM, elle peut la tirer ſuivant une direction MP qui touche la roue ou ſuivant une direction qui coupe la circonférence. Cela poſé, je dis que ſi la puiſſance & le poids ſont entr'eux réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD menées du point F aux directions MP, NR, il y aura équilibre. Car on peut conſidérer la ligne XFY comme un levier droit ou angulaire dont l'appui eſt en F, & qui eſt tiré ſuivant les directions MP, NR, il eſt évident que ſi la puiſſance P avoit effectivement ſa direction MP dans le plan où eſt la direction NR du poids, & qu'elle fut au poids R comme FD eſt à FA; c'eſt-à-dire, que le rapport de la puiſſance au poids fut égal au rapport inverſe des diſtances de l'appui F aux directions, il y auroit équilibre; mais on vient de faire voir que ſi la puiſſance P eſt appliquée à un autre endroit du treuil ſuivant une direction perpendiculaire à l'axe, & dont la diſtance à l'appui ſoit égale à FA, elle éxerce ſur le poids R la même force que lorſque ſa direction eſt ſuppoſée dans le même plan que la direction du poids R. Donc ſi on rétablit la puiſſance P dans l'endroit ou elle tire effe-

ctivement, & qu'elle ſoit au poids R comme la diſtance FD eſt à la diſtance FA, il y auraencore équilibre.

99. On pourroit démontrer auſſi que ſi la puiſſance P & le poids R ſont en équilibre ſur le treuil, ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances FA, ED; la démonſtration eſt la même que pour le levier : ainſi on ne la repete point.

Fig. 32. 100. COROLLAIRES. 1°. Il eſt évident que le rayon FD mené du point F au point où la corde NR touche le rouleau, eſt la diſtance ou la perpendiculaire menée de l'appui F ſur la direction du poids. *Donc ſi la puiſſance & le poids* R *ſont entr'eux réciproquement comme la diſtance* FA *& le rayon* FD *du treuil, ils ſont en équilibre.* Et réciproquement ſi la puiſſance & le poids ſont en équilibre, ils ſont dans la raiſon réciproque de la diſtance FA & du rayon FD.

101. 2°. Si la puiſſance tire ſuivant une direction perpendiculaire au bras FM, la raiſon des diſtances ou des perpendiculaires ſera égale à la raiſon des bras FM, FD.

Fig. 33. 102. 3°. *Si la puiſſance* P *eſt appliquée à une roue ſuivant une direction qui en touche la circonférence, & qu'elle ſoit au poids* P *comme le rayon du cylindre ou rouleau eſt au rayon de la roue, il y aura équilibre.* Car les perpendiculaires menées de l'appui F aux directions ne different pas des rayons FM, FD qui paſſent par les points d'attouchement; & réciproquement *ſi la puiſſance & le poids ſont en équilibre, & que la puiſſance tire ſuivant une direction qui ſoit tangente à la circonférence de la roue, le rapport de la puiſſance au poids ſera égal au rapport inverſe du rayon de la roue au rayon du rouleau.*

103. On peut démontrer l'analogie du tour ſans la ſuppoſition qu'on a faite que les directions ſont en un même plan, & la démonſtration qu'on va donner embraſſe tous les cas, non ſeulement celui ou l'on ſuppoſe que les directions ſont perpendiculaires à l'axe, mais encore celui où elles ſont obliques au même axe. On réduit tous les cas à deux généraux, ou bien les directions ſont paralleles ou elles ne le ſont pas, lorſque les directions ſont paralleles, ou elles ſont perpendiculaires à l'axe, ou elles lui ſont obliques.

PRÉPARATION POUR LA DÉMONSTRATION SUIVANTE.

104. *On a répréſenté les figures qui concernent le tour ou treuil en perſpective & en relief afin d'aider l'imagination, ſur-tout pour la réſiſtance des appuis où il faut imaginer pluſieurs plans. Celles qu'on a tracé ſuffiſent pour faire concevoir de quelle maniere il faut s'y pren-*

dre pour déterminer dans tous les cas le rapport de la puiſſance au poids, & les réſiſtances des appuis.

105. Quelle que ſoit la ſituation des directions tant entr'elles que par rapport à l'axe, on peut toujours faire en ſorte qu'elles ſe trouvent dans deux plans paralleles qui coupent l'axe. Fig. 35. 36. 37. 38. 39.

1°. Cela eſt évident lorſque les directions ſont paralleles; ſi elles ſont perpendiculaires à l'axe, les plans où elles ſont peuvent être auſſi perpendiculaires à l'axe, & par conſéquent paralleles.

2°. Voici pour le cas où les directions ſont inclinées à l'axe ſans être paralleles. On ſuppoſe que la ligne droite XY répreſente l'axe du treuil, O, S les appuis placez ſur cette ligne, MP, NR les directions de la puiſſance & du poids. Il faut concevoir la ligne NM qui prolongée, coupe l'axe XY prolongé ou non au point C, & qui rencontre les directions MP, NR aux points M, N, (ce qui eſt toujours poſſible, puiſque le lieu du point C eſt indéterminé, & que d'ailleurs on peut ſuppoſer que la ligne NM tourne autour du point M juſqu'a ce qu'elle rencontre l'axe XY prolongé en C, ſans diſcontinuer de toucher la direction NR); du point M il faut mener MQ parallele à NR, concevoir un plan TZ ſur lequel eſt l'angle PMQ, & qui coupe l'axe prolongé ou non au point *f*, tirer la ligne *f*M, & du point N mener NF parallele à *f*M qui rencontrera l'axe au point F; car puiſque *f*M, FN ſont paralleles, les angles NM*f*, MNF ſont dans un même plan; donc les trois lignes NM, M*f*, NF ſont dans un même plan, c'eſt-à-dire, dans le plan du triangle CM*f*; or le plan de ce triangle paſſe par l'axe XY, c'eſt-à-dire, que l'axe eſt ſur ce plan; donc la ligne NF qui eſt dans un plan qui paſſe par l'axe, étant prolongée autant qu'il eſt néceſſaire, coupera cet axe au point F. Cela poſé, ſi on conçoit un plan qui paſſe par NR & NF, il ſera parallele au plan TZ, puiſque les angles RNF, QM*f* qui ſont ſur ces plans, ſont formez par des lignes qui deux à deux ſont paralleles, NR eſt parallele à MQ, & NF parallele à M*f*. Donc la direction NR eſt dans un plan parallele au plan TZ, & ces plans paralleles où ſont les directions NR, MP coupent l'axe aux points F, *f*.

106. Le plan M*f*CNFM ſera appellé dans la ſuite *plan par l'axe*, & les plans paralleles qui coupent l'axe & ſur leſquels les directions MP, NR ſont couchées *plans des directions*, les lignes M*f*, NF qui ſont en même-tems ſur le plan par l'axe, & ſur les plans des directions ſeront apellées *communes ſections du plan par l'axe, & des plans des directions*, parce qu'effectivement ce plan & les plans paralleles qui portent les directions MP, NR ſe coupent dans les lignes M*f*, NF.

107. La démonſtration ſuivante ſuppoſe les mouvemens ou forces compoſées.

PROPOSITION DOUZIE'ME.

108. *Si les puiſſances* P,R *ſont en raiſon compoſée de la raiſon réciproque des lignes* Mf, NF, *& de la raiſon réciproque des ſinus des angles que les mêmes lignes ſont avec les directions, il y aura équilibre.*

Fig. 35. 36. 37. 38. 39. DEMONSTRATION. La démonſtration eſt pour tous les cas. Il faut prolonger fM vers G, & former le parallelogramme GQ dont la diagonale MP ſoit ſur la direction de la puiſſance P. Si au lieu de la puiſſance P on applique au point M deux puiſſances G & Q qui tirent ſuivant MG, MQ, elles feront autant que la puiſſance P, (que je ſuppoſe répréſentée par MP) ſi elles ſont exprimées par les côtez MG, MQ du parallelogramme GQ. La force ſuivant MG étant dirigée ſuivant une ligne qui eſt ſur le plan par l'axe ſe perd ſur les appuis O, S, & ne contribue point à ſoutenir le poids R, de ſorte que ſi la puiſſance P eſt en équilibre avec le poids R, c'eſt par l'effort ſuivant MQ qui étant produit ſuivant une direction parallele à la direction NR, eſt tout employé à réſiſter au poids R; d'où l'on voit que ſi l'effort ſuivant MQ eſt en équilibre avec le poids R, la puiſſance P qui produit cet effort ſera auſſi en équilibre avec le poids R. Cela poſé, les directions MQ, NR étant paralleles de même que les lignes Mf, NF, l'angle QMf eſt égal à l'angle que la direction NR forme avec NF, ces deux angles ont donc le même ſinus, l'angle PMG eſt celui que la direction MP forme avec fMG. Si l'on nomme (S) le ſinus de l'angle QMf ou de l'angle RNF, ($ſ$) le ſinus de l'angle PMG, les produits $Mf \times ſ$, $NF \times S$ ſont en raiſon compoſée des lignes Mf, NF, & des ſinus des angles PMG, RNF que les mêmes lignes forment avec les directions; donc par l'hypotheſe de la propoſition préſente, les puiſſances P,R ſont entr'elles réciproquement comme ces produits, en ſorte que $P . R :: NF \times S . Mf \times ſ$. D'ailleurs la puiſſance P & l'effort ſuivant MQ ſont dans la raiſon des côtez MP & MQ ou PG, & les côtez MP, PG dans la raiſon des ſinus des angles PGM, PMG, l'angle PGM eſt égal à l'angle RNF, parce que l'un & l'autre eſt égal à l'angle QMf; donc les puiſſances P, Q ſont entr'elles comme les ſinus de ces angles, & l'on a $Q . P :: ſ . S$. L'on a donc ces proportions. Si après avoir multiplié par ordre, on diviſe les

$P . R :: NF \times S . Mf \times ſ$
$Q . P :: ſ . S$.

deux premiers produits par P, & les deux derniers par le produit $S \times f$, on aura la nouvelle proportion Q . R :: NF . Mf, & parce que les triangles fMC, FNC ſont ſemblables, au lieu de NF, Mf, on peut prendre les côtez NC, MC. Donc Q . R :: NC . MC, c'eſt-à-dire, que les puiſſances Q, R ſont entr'elles réciproquement comme les lignes NC, MC. Maintenant ſi on conſidere le plan par l'axe MfCNFM comme inflexible & parfaitement mobile autour de l'axe XYC, la ligne inflexible MN qui eſt ſur ce plan, pourra être auſſi conſiderée comme un levier dont l'appui eſt en C. Les puiſſances R, Q ſeront donc entr'elles réciproquement comme les bras NC, MC; donc puiſque leurs directions NR, MQ ſont paralleles, elles ſont en équilibre ſur le levier MCN; mais la puiſſance P en ce qui concerne l'équilibre avec la puiſſance R, ne fait rien de plus que la puiſſance Q. Donc la puiſſance P eſt en équilibre avec la puiſſance R.

109. Remarque. Puiſque le poids R & la puiſſance P ſont en équilibre ſur le plan MfCNFM mobile ſur les pivots O, S, il eſt évident que dans les cas où l'on ſuppoſe que l'axe eſt prolongé en C, on peut retrancher de ce plan la partie NCY, & qu'au lieu du plan inflexible, on peut ſubſtituer les verges roides Mf, NF ou telles autres qu'on voudra, pourvu qu'elles rencontrent les directions MP, NR, & qu'elles faſſent un même corps avec l'axe XY. Fig. 35. 38.

110. Corollaires. 1°. *Si les directions* MP, NR *ſont paralleles, les puiſſances* P, R *ſont en équilibre ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les lignes* M f, NF *qu'on a nommé communes ſections du plan par l'axe, & des plans des directions.* Car pour lors les ſinus S, f ſont égaux, puiſque les directions étant paralleles par l'hypotheſe, font des angles égaux avec les paralleles Mf, NF. Donc ſi on multiplie les lignes Mf, NF par les ſinus f, S, les produits M$f \times f$, NF $\times S$ ſont dans la même raiſon que les lignes Mf, NF. Donc les puiſſances P, R qu'on ſuppoſe entr'elles réciproquement comme les lignes Mf, NF ſont auſſi entr'elles réciproment comme les produits M$f \times f$, NF $\times S$. Donc elles ſont en équilibre.

111. 2°. *Si les directions* MP, NR *étant paralleles ſont perpendiculaires au plan par l'axe, & par conſéquent à l'axe même, pour lors les communes ſections* Mf, NF *ſont perpendiculaires aux directions, ou ce qui revient au même, ces directions ſont perpendiculaires à* Mf, NF. Car une ligne qui eſt perpendiculaire à un plan eſt auſſi perpendiculaire à toutes les lignes qui ſont ſur ce plan; donc ſi des points f, F ou les plans des directions coupent l'axe,

on mene aux directions les perpendiculaires Mf, NF, *& que les puiſſances* P, R *ſoient entr'elles réciproquement comme ces perpendiculaires, elles ſeront en équilibre ſuivant le premier Corollaire.*

112. 3°. *S'il n'y a qu'une des directions, par exemple, la direction* NR *qui ſoit perpendiculaire au plan par l'axe, & par conſéquent à l'axe, il y aura encore équilibre entre les puiſſances* P, R. *Si après avoir mené des points* f, F *où les plans des directions coupent l'axe des perpendiculaires aux mêmes directions, les puiſſances* P, R *ſont entr'elles réciproquement comme ces mêmes perpendiculaires.* Pour démontrer ce Corollaire, il faut concevoir que la direction MP eſt prolongée de maniere qu'on puiſſe lui mener du point f la perpendiculaire fA, par-là on formera le triangle rectangle fAM qui a pour côtez fM, fA & MA, (dans la figure en relief il faut imaginer ce triangle, parce qu'il n'y eſt point tracé.) Or le triangle fAM eſt ſemblable au triangle PGM, les angles PMG, fMA formez par la direction MP prolongée, & la ligne GMf ſont oppoſez au ſommet, & par conſéquent égaux; l'angle G eſt droit puiſque les lignes PG, QM qui ſont paralleles à NR ſont perpendiculaires au plan par l'axe de même que NR, l'angle A formé par la direction PM prolongée, & par la perpendiculaire fA, eſt auſſi droit; donc les triangles PGM, fAM ſont ſemblables: or les côtez PG, PM ſont entr'eux comme les ſinus des angles PMG, PGM, ou de ſon égal RNF; donc les côtez fA, fM ſont auſſi dans la même raiſon. On a nommé ci-devant (S) le ſinus de l'angle RNF, & (f) le ſinus de l'angle PMG. Donc l'on a la proportion fM . fA :: S . f. L'on aura auſſi FN . fM :: FN . fM, puiſque les deux premiers termes ſont les mêmes que les deux derniers. Si après avoir multiplié par ordre on diviſe les deux premiers produits par fM, on aura FN . fA :: $S \times$ FN . $f \times f$M. Mais par l'hypotheſe P . R :: FN . fA; donc P . R :: $S \times$ FN . $f \times f$M; donc ſuivant la propoſition les puiſſances P, R ſont en équilibre.

fM . fA :: S . f.
FN . fM :: FN . fM.

113. 4°. *Si les directions ſont l'une & l'autre perpendiculaires à l'axe, & que la puiſſance* P *& le poids* R *ſoient entr'eux réciproquement comme les perpendiculaires* M f, NF *menées des points* f, F *aux directions, ils ſont en équilibre.* La démonſtation eſt la même que pour le Corollaire troiſiéme qui précede. Ce quatriéme Corollaire expoſe le cas que l'on démontre ordinairement, en ſuppoſant que les directions ſont en un même plan.

114. Dans la propoſition qu'on vient de démontrer & ſes Corollaires au lieu du rapport de Mf à NF, on auroit pû ſe ſervir du

rapport

rapport MC à NC, ou de C*f* à CF qui ſont des rapports égaux au rapport de M*f* à NF.

Du moment ou force relative des puissances.

115. Au commencement de ce Livre on a diſtingué la force relative d'une puiſſance d'avec ſa force abſolue; les machines dont on a expoſé les proprietez, auront donné occaſion de remarquer que cette diſtinction eſt bien fondée, puiſque dans le levier & le treuil, un petit poids peut faire équilibre avec un fort grand, & que plus la direction d'une puiſſance eſt éloignée de l'axe ou de l'appui, plus elle fait d'impreſſion ſur la machine. Il eſt donc certain qu'une force qui en elle-même eſt d'un degré fini & limité, & qui étant appliquée à un corps ſeul ne peut produire qu'une certaine quantité de mouvement, peut avoir néanmoins des effets de plus en plus grands, ſi elle agit ſur une machine. Un poids d'une livre ſuſpendu à un bras de levier double, ſoutient un poids de deux livres, ſi le bras qu'il tire eſt dix fois, cent fois plus grand, il ſera équilibre avec un poids decuple, centuple, & ſi on pouvoit allonger ce bras & lui donner une longueur infinie, ce poids toujours d'une livre feroit équilibre avec un poids d'une force infinie. D'où eſt ce que le petit poids peut recevoir ce ſurcroît de force qu'il exerce ſur le grand à meſure qu'on éloigne ce moindre poids de l'appui. On ne peut pas dire que ſa peſanteur ſoit augmentée ni qu'elle faſſe des plus grands efforts pour produire une plus grande quantité de mouvement: car le mouvement ne peut pas exceder la grandeur de la force qui le produit: ainſi que le petit poids ſoit appliqué à un bras de levier, ou qu'il en ſoit détaché, ſa peſanteur ne peut lui faire parcourir un eſpace plus grand, ni lui communiquer une plus grande viteſſe que ſi elle le mouvoit tout ſeul dans un milieu libre & ſans réſiſtance. Puis donc que la peſanteur propre du petit poids ne peut lui donner une plus grande quantité de mouvement lorſqu'il eſt attaché à un levier, que ſéparément & hors de la machine, il s'enſuit que ce petit poids ne tend pas par ſa propre peſanteur à ſe mouvoir plus vite lorſqu'il eſt ſuſpendu à un levier ou bras du treuil, que lorſqu'il eſt poſé ſeul ſur un plan horizontal, & qu'il y eſt en repos. On ne peut donc pas dire que la force relative du moindre poids qui fait équilibre ſur un levier avec un grand, conſiſte dans une tendence au mouvement plus ou moins grande que ce petit poids reçoive de ſa peſanteur propre, ſelon le lieu qu'il occupe ſur le levier. Il eſt vrai que plus la diſtance à l'appui eſt grande, plus le poids qui eſt à cette diſtance eſt ſollicité

de ſe mouvoir vîte, ſuppoſé qu'il faſſe équilibre avec un autre poids, comme on l'a prouvé ci-devant ; mais cette plus grande force qu'il reçoit, a pour principe la peſanteur du grand poids avec lequel il fait équilibre, & non point ſa peſanteur propre : or la force relative du moindre poids ne conſiſte pas dans l'impreſſion qu'il reçoit du grand, puiſqu'au contraire, par cette force il doit réſiſter à l'impreſſion qu'il reçoit du grand poids. La force relative du petit poids ne conſiſte donc ni dans ſa ſeule peſanteur ou dans le ſeul effort que cette force fait pour le mouvoir lors même qu'il eſt appliqué à une machine, ni dans l'impreſſion qu'il reçoit du grand poids ; mais on peut prouver que cette force réſulte & de la peſanteur propre du petit poids & de l'action que le grand exerce ſur le petit : pour cet effet on va ſe ſervir d'un exemple ſenſible & connu de tout le monde, parce qu'il eſt fréquent dans les travaux publics & particuliers : cet exemple qui eſt propre à fixer l'imagination, peut faire concevoir ce qu'il faut entendre par la force relative d'une puiſſance, & la maniere dont cette force eſt formée ; pour plus de clarté on prend les choſes d'un peu haut.

116. Dans le troiſiéme Livre on a diſtingué deux ſortes de réſiſtances, l'une propre & l'autre impropre. La réſiſtance impropre ne détruit pas le mouvement en lui-même, elle ne fait que le diminuer dans la force motrice. Qu'un cheval traîne une pierre de taille ſur un plan horizontal, il éprouve de la réſiſtance, & ſa viteſſe eſt moindre que s'il n'étoit pas obligé d'entraîner la pierre ; mais tout le mouvement qu'il perd eſt communiqué à la pierre : (on ſuppoſe ici qu'il n'y a point de frottement ni aucun autre obſtacle extérieur à vaincre :) il n'en eſt pas ainſi de la réſiſtance propre, elle détruit ou empêche le mouvement de maniere qu'après qu'elle a agi, la quantité reſtante eſt moindre en elle-même. Si lorſque le cheval commence à tirer la pierre, il y a une force qui réagiſſe, & la pouſſe en ſens contraire, elle empêchera que la pierre ne reçoive de l'impulſion du cheval toute la viteſſe qui lui auroit été communiquée ; ſi cette force contraire eſt, par exemple, le quart de la force du cheval, le cheval & la pierre ne ſeront mûs que par un effort égal à la difference de ces deux forces, car la quatriéme partie de la force du cheval ſera employée à réſiſter à la force qui pouſſe la pierre en ſens contraire, & ſera par conſéquent inutile à la production du mouvement. Si la force qui repouſſe la pierre eſt égale à la force du cheval, tout demeurera en repos, & la pierre ſera tenue en équilibre entre le cheval & cette force ; mais ſi la force contraire diminue tant ſoit peu, il y

aura néceſſairement du mouvement produit. Lors donc que deux forces contraires ont leurs directions ſur la même ligne, il ne peut y avoir équilibre, ſi leurs efforts abſolus ne ſont égaux ; mais ſi les directions des forces ſont ſur des lignes differentes, cette égalité n'eſt pas toujours néceſſaire pour l'équilibre. Suppoſons que la pierre eſt attachée à un levier dont l'appui ſoit ſur le plan horizontal où eſt la pierre, que l'on applique auſſi le cheval à l'autre bras du levier, le mouvement ſera circulaire, & les arcs ou eſpaces décrits par le cheval & par la pierre ſeront égaux, ſi les bras du levier ſont égaux ; ſuppoſons, comme auparavant, qu'une force repouſſe la pierre, ſi cette force eſt le quart de la force du cheval, il reſtera encore au cheval les trois quarts de ſa force pour produire le mouvement, car ſi l'on conçoit les eſpaces parcourus par le cheval & par la pierre diviſez en parties égales & très-petites, il y en aura le même nombre de part & d'autre : or ſi à chaque petit eſpace qu'il faut parcourir, le cheval fait effort ſur la pierre, il eſt viſible qu'il aura à ſurmonter la réſiſtance de la force qui s'oppoſe au mouvement ; & comme les eſpaces parcourus ſont égaux de part & d'autre, l'on voit que cette force contraire ne peut faire qu'une réſiſtance proportionnelle à ſon effort abſolu, elle ne peut donc contrebalancer que la quatriéme partie de la force du cheval : mais ſi l'on attache la pierre à une diſtance double de l'appui, l'eſpace qu'elle parcourra ſera double du premier eſpace & de celui que le cheval décrit : or je dis que ſi la force contraire dont l'effort abſolu eſt toujours ſuppoſé être la quatriéme partie de la force du cheval, repouſſe la pierre lorſqu'elle eſt à une diſtance double, elle fera une réſiſtance double, ou ce qui eſt la même choſe, le cheval éprouvera une difficulté ou réſiſtance double, quoique la réſiſtance abſolue ne ſoit pas plus grande. Car ſi l'on conçoit encore que les eſpaces ſont diviſez en parties égales, l'eſpace parcouru par la pierre en contiendra deux fois autant ; donc pendant le même-tems le cheval aura à ſurmonter deux fois plus ſouvent la réſiſtance de la pierre ſuppoſé qu'il aille ou qu'il tende à aller avec la même viteſſe ; & il a la même peine que ſi à chaque petite partie de l'eſpace parcouru, il y avoit un obſtacle ou une force égale qui y fût réſidente : or ſi cela étoit, il eſt viſible que la ſomme des réſiſtances que le cheval auroit à vaincre, ſeroit double ; donc la réſiſtance de la force contraire qui accompagne la pierre, eſt auſſi double, puiſqu'elle eſt équivalente à cette ſomme de forces qui ſeroient répandues au long de l'eſpace parcouru. La force qui repouſſe la pierre réſiſte donc d'autant plus que la

pierre eſt à une plus grande diſtance de l'appui ; ſi cette diſtance eſt quadruple, la réſiſtance ſera quatre fois plus grande, & par conſéquent égale à la force du cheval ; la pierre ſera donc en équilibre ; ſi la diſtance eſt plus que quadruple, le cheval & la pierre ſeront obligez de ceculer, car la force qui repouſſe la pierre eſt plus grande qu'il ne faut pour faire une réſiſtance capable d'arrêter le cheval ; le ſurplus de cette force ſera donc employé à mouvoir le cheval en arriere. Or il eſt aiſé d'appercevoir que la réſiſtance qui retarde la pierre dans ſon mouvement, n'eſt pas l'effet de la ſeule force ou puiſſance P qui la pouſſe en arriere, puiſque l'impulſion qu'elle en reçoit n'eſt pas plus grande, quoique cette puiſſance agiſſe avec le ſecours d'un levier ; il faut donc que le cheval concoure à former cette réſiſtance, non qu'il ajoute quelque choſe à la force de la puiſſance P ou à la réſiſtance qui eſt produite, puiſqu'au contraire il fait effort pour la ſurmonter ; mais il concourt à la réſiſtance de la puiſſance P par la maniere dont il agit ſur la pierre ; lorſque le cheval tire à une diſtance de l'appui qui eſt deux fois, trois fois, quatre fois, &c. moindre, il eſt dans la néceſſité de vaincre l'effort de la puiſſance P deux fois, trois fois, quatre fois, &c. plus ſouvent qu'il ne feroit s'il tiroit à la même diſtance, puiſque pour lors il fait parcourir à la pierre un eſpace double, triple, quadruple dans le même tems, & oblige par conſéquent la puiſſance P de réagir ou réſiſter par un eſpace double, triple, quadruple, &c. la réſiſtance de la puiſſance P n'eſt donc pas augmentée en elle-même : ſi elle eſt plus grande, ce n'eſt que relativement à la force qui s'applique à la ſurmonter. Cette réſiſtance que la puiſſance oppoſe à l'effort du cheval, conſiderée non en elle-même, mais relativement à la maniere dont le cheval s'applique pour la ſurmonter, eſt ce que l'on appelle la *force relative* de la puiſſance P.

117. D'où l'on voit que lorſque deux puiſſances agiſſent l'une contre l'autre, par le moyen d'un levier, il faut diſtinguer dans l'action de chacune, ſa force abſolue & ſa force relative : la force abſolue produit ou tend à produire ſuivant la direction de la puiſſance, une certaine quantité de mouvement tant que la puiſſance n'augmente ni ne diminue la quantité de mouvement que cette force peut communiquer à un corps en le pouſſant ſuivant ſa direction, eſt la même ; mais la force relative de la puiſſance P eſt la réſiſtance qu'elle fait à une autre puiſſance lorſque cette autre puiſſance tend à produire du mouvement contre la direction de la puiſſance P. Or cette réſiſtance eſt plus ou moins grande ſelon que

la puiſſance P eſt ſituée à l'égard de la puiſſance à laquelle elle réſiſte.

118. Lors donc que deux puiſſances appliquées à un levier agiſſent l'une contre l'autre, elles peuvent être conſiderées chacune ſous deux vues differentes, 1°. comme puiſſances agiſſantes en tant qu'elles tendent à produire du mouvement ſuivant leurs directions; 2°. comme puiſſances réſiſtantes en tant que l'une s'oppoſe au mouvement que l'autre tend à produire contre la direction de la réſiſtante.

Si la ſomme des efforts qu'une des puiſſances produit ſuivant ſa direction eſt égale à la ſomme des réſiſtances que l'autre puiſſance lui oppoſe par la maniere dont elle réagit lorſqu'elle eſt ſollicitée à ſe mouvoir contre ſa propre direction, il y a équilibre. Cette propoſition eſt évidente & peut paſſer pour un axiome. Si la puiſſance P tend à ſe mouvoir avec un effort, par exemple, de 10 livres, & qu'elle trouve dans la puiſſance R qui eſt ſollicitée ou preſſée par cet effort de 10 livres, une réſiſtance de 10 livres, il eſt évident qu'il y aura équilibre.

119. *La force relative d'une puiſſance, par exemple, de la puiſſance* P *eſt proportionnelle au produit de ſa force abſolue multipliée par l'eſpace que l'autre puiſſance* R *lui fait parcourir, ou tend à lui faire parcourir contre ſa propre direction.* Car la force relative de la puiſſance P conſiſte dans la peine ou la difficulté que la puiſſance R trouve lorſque la puiſſance P réagit: or la peine ou l'empêchement que la puiſſance R éprouve, eſt proportionnel au produit de la force abſolue de la puiſſance P multipliée par l'eſpace qu'elle parcourt, ou qu'elle eſt preſſée & ſollicitée de parcourir contre ſa direction: car en parcourant cet eſpace, elle agit contre la puiſſance R, de même que ſi à chaque point de l'eſpace parcouru, il y avoit une force qui fît une réſiſtance égale à ſa force abſolue: mais pour avoir la ſomme de toutes ces réſiſtances ainſi diſtribuées le long de l'eſpace parcouru, il faudroit multiplier l'une d'elles ou la force abſolue par l'eſpace parcouru: donc la ſomme des efforts que la puiſſance P fait contre la puiſſance R en parcourant cet eſpace, eſt auſſi égale ou proportionnelle au produit de ſa force abſolue & de l'eſpace parcouru.

120. La force relative d'une puiſſance eſt auſſi proportionnelle au produit de ſa force abſolue multipliée par la diſtance ou la perpendiculaire menée de l'appui ſur ſa direction: car l'arc ou l'eſpace décrit eſt proportionnel au rayon ou à la diſtance de l'appui à la direction.

121. *Si le produit de la force abſolue de la puiſſance* P *multipliée*

par l'eſpace qu'elle eſt preſſée ou ſollicitée de parcourir contre ſa propre direction, eſt égal au produit de la force abſolue de la puiſſance R *multipliée par l'eſpace qu'elle parcourt ou tend à parcourir ſuivant ſa direction, il y a équilibre entre les deux puiſſances.* Car le ſecond produit exprime la ſomme des efforts que la puiſſance R fait ſuivant ſa direction, & le premier exprime la ſomme des réſiſtances de la puiſſance P; ces deux ſommes étant égales, il s'enſuit qu'il y a équilibre.

122. *Si le produit de la force abſolue de la puiſſance* P *multipliée par la diſtance de l'appui à ſa direction, eſt égal au produit de la force abſolue de la puiſſance* R *multipliée par la diſtance du même appui à ſa direction, il y a encore équilibre.* Car l'arc que la puiſſance R tend à décrire, & celui que la puiſſance P eſt ſollicitée de parcourir contre ſa direction, ſont dans la même raiſon que les diſtances de l'appui aux directions; donc les produits de ces arcs multipliez par les forces abſolues des puiſſances, ſeront auſſi égaux; donc il y aura équilibre.

123. Lorſque des puiſſances ſont appliquées au levier, le produit de la force abſolue de chacune d'elles, par la diſtance de l'appui à ſa direction, eſt appellé *moment*. M. Varignon après avoir donné cette définition page 304 de ſa nouvelle mécanique, dit que le mot de *moment* ne peut mieux s'exprimer en françois que par le mot *de force relative* ou *d'impreſſion* ou *d'action* ſur le levier. M. de la Hire donne une définition du *moment* qui préſente auſſi la double idée que M. Varignon y attache; lorſqu'il dit *qu'on appelle moment d'un corps peſant, l'effort avec lequel il peut agir ſur un autre corps quand il eſt appliqué à la machine; & cet effort eſt un compoſé de ſa peſanteur abſolue & de la force dont il agit ſur l'autre*, où par le mot de *force*, il entend la diſtance de l'appui à la direction, laquelle meſure la force du poids ſur l'autre: comme il l'explique dans la propoſition ſixiéme; & par le mot de *compoſé*, il entend la multiplication de la peſanteur abſolue par cette diſtance. MM. Varignon & de la Hire après avoir démontré la propriété du levier ſuivant laquelle un petit poids fait équilibre avec un grand, pourvû qu'il ſoit d'autant plus éloigné de l'appui qu'il eſt plus petit, ils concluent que la force relative du petit poids augmente à meſure que ſa diſtance à l'appui eſt plus grande; mais ils ne diſent point en quoi conſiſte cette force ni comment elle ſe forme; preuve certaine que c'eſt une choſe très-difficile à expliquer en ſuivant leurs principes.

124. Le principe de M. Deſcartes eſt peut-être le ſeul qui puiſſe bien

faire entendre ce que c'eſt que la force relative d'un moindre poids qui fait équilibre avec un grand, & qui faſſe comme toucher au doigt, l'origine & le progrés de cette force, quoique la puiſſance qui la produit n'augmente ni ne diminue: ſuivant le principe de M. Deſcartes, il faut autant de force pour élever un poids d'une livre à une hauteur cent fois plus grande que pour élever un poids cent fois plus grand à une hauteur cent fois moindre, parce que la force motrice éprouve la même réſiſtance dans l'un & l'autre cas: ſi le poids eſt cent fois moindre, il faudra ſurmonter ſa réſiſtance cent fois plus ſouvent, parce qu'il faut le monter à une hauteur cent fois plus grande; & ſi le poids eſt cent fois plus grand, la réſiſtance abſolue ſera à la vérité centuple de celle du petit poids; mais auſſi le nombre de fois qu'il faudra la ſurmonter ſera cent fois moindre, ſi par les principes qu'on vient de poſer on multiplie le poids cent fois moindre par la hauteur centuple à laquelle il faut l'élever; qu'on multiplie le poids cent fois plus grand par l'eſpace cent fois plus petit qu'il faut lui faire parcourir, les produits qui viendront de la multiplication expriment les forces relatives des poids l'un cent fois plus grand que l'autre: or ces produits étant égaux, il s'enſuit que la ſomme des réſiſtances que la force motrice a à ſurmonter d'une part eſt égale à la ſomme des réſiſtances qu'elle a à ſurmonter de l'autre part; de ſorte que ſi dans l'un de ces deux cas elle ne peut produire le mouvement, & qu'il y ait équilibre, il y aura auſſi équilibre dans l'autre cas.

De l'utilité des momens dans la statique.

125. Lorſqu'on a parlé du levier & du treuil, on a ſuppoſé qu'une ſeule force ou puiſſance étoit aſſez grande pour ſoutenir le fardeau qu'il faut élever, ou traîner; mais il arrive aſſez ſouvent qu'il faut appliquer pluſieurs forces à la machine pour produire cet effet: or les momens ſont une voie courte & facile pour s'aſſurer quand eſt-ce qu'il y a équilibre ou non. On va le voir dans les propoſitions ſuivantes.

126. On conſerve la définition ordinaire du moment ſuivant laquelle le moment d'une puiſſance eſt le produit de la force abſolue, par la diſtance ou perpendiculaire menée de l'appui à ſa direction.

127. Lorſque des puiſſances appliquées à un levier tendent à le mouvoir dans le même ſens autour de l'appui, c'eſt-à-dire, ſi étant d'un même côté par rapport à l'appui, elles tirent toutes en bas ou

en haut, ou ſi étant de differens côtez, celles d'un même côté tirent toutes en bas lorſque celles qui ſont de l'autre côté de l'appui tirent toutes en haut : on dit qu'elles tirent toutes dans le même ſens, & qu'elles ſont conſpirantes.

128. *Si deux puiſſances* P,R *ſont en équilibre ſur un levier, le moment de l'une eſt égal au moment de l'autre.*

Car puiſqu'il y a équilibre, la puiſſance P eſt à la puiſſance R comme la diſtance de l'appui à la direction de la puiſſance R eſt à la diſtance du même appui à la direction de la puiſſance P ; donc le produit de la puiſſance P par ſa diſtance à l'appui eſt égal au produit de la puiſſance R par ſa diſtance à l'appui ; donc ſuivant la définition, les momens des puiſſances P & R ſont égaux.

129. *Si les momens des puiſſances* P,R *ſont égaux, elles ſont en équilibre.*

Car ſi les momens ſont égaux, les produits des puiſſances P, R par les diſtances de l'appui aux directions ſont égaux ; donc la puiſſance P ſera à la puiſſance R comme la diſtance de la puiſſance R à l'appui eſt à la diſtance de la puiſſance P au même appui ; donc les puiſſances P, R feront entr'elles réciproquement comme leurs diſtances à l'appui. Donc elles ſont en équilibre.

130. *Si le moment d'une puiſſance eſt plus grand que le moment de l'autre, elles ne ſont point en équilibre.*

Car pour lors les puiſſances ne ſont point entr'elles réciproquement comme leurs diſtances à l'appui ; donc elles ne ſont pas en équilibre, & celle dont le moment eſt plus grand doit l'emporter ſur l'autre : car ſi l'on conſerve à cette puiſſance ſa diſtance à l'appui, & qu'on la diminue, ſon moment pourra être égal à celui de l'autre puiſſance ; & par conſéquent la puiſſance ainſi diminuée, ſera équilibre avec l'autre puiſſance. Donc ſi on rétablit la puiſſance diminuée en lui ajoutant la partie de la force qu'on lui avoit ôtée, il eſt viſible qu'elle rompra l'équilibre, & qu'elle fera pancher la machine de ſon côté.

PROPOSITION TREZIE'ME.

40/41 131. *Trois puiſſances* P,R,Q, *étant appliquées au levier* XY *ſuivant les directions* MP, NR, HQ, *en ſorte que deux d'entr'elles* R, Q *tirent en ſens contraires de la puiſſance* P. *Si la ſomme des momens des puiſſances* R, Q *eſt égale au moment de la puiſſance* P, *elles ſeront en équilibre.* On ſuppoſe que les trois directions ſont en un même plan.

DEMONSTRATION.

Demonstation. Par l'hypotheſe les produits R×FD + Q× FE qui viennent de la multiplication des puiſſances R, Q par leurs diſtances à l'appui F, & qui ſont les momens de ces puiſſances pris enſemble, ſont égaux au moment P×FA de la puiſſance P, lequel eſt le produit de la puiſſance P par ſa diſtance FA.

Pour démontrer l'équilibre dont il s'agit, il faut concevoir que l'effort abſolu de la puiſſance P eſt diviſé en deux efforts partiels r, q, en ſorte que le moment de l'effort partiel r, ſçavoir r×FA ſoit égal au moment R×FD de la puiſſance R, le moment q×FA de l'autre effort partiel q ſera égal au moment Q×FE de la puiſſance Q : car puiſque par l'hypotheſe R×FD+Q×FE=P×FA, ſi on retranche du premier membre de l'égalité le moment R×FD, & du ſecond membre le moment r×FA qui eſt égal au moment R×FD, les reſtes qui ſont les momens Q×FE & q×FA, ſeront auſſi égaux. Cela poſé, il eſt évident que l'effort r fait équilibre avec la puiſſance R, puiſque les momens de ces deux forces ou puiſſances ſont égaux, & que d'ailleurs les directions étant en un même plan une puiſſance tirée en ſens contraire de l'autre ; par une raiſon ſemblable l'effort ou la puiſſance q fait auſſi équilibre avec la puiſſance Q; mais les efforts r, q pris enſemble, ne different point de la puiſſance P. Donc la puiſſance P eſt en équilibre avec les puiſſances R, Q.

132. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie. *Si trois puiſſances* P, R, Q, *ſont en équilibre ſur le levier* XY, *la ſomme des momens des puiſſances* R, Q *qui tirent en ſens contraire de la puiſſance* P, *eſt égale au moment de la puiſſance* P.

Demonstration. Puiſque la puiſſance P eſt en équilibre avec les puiſſances R, Q, il s'enſuit que la puiſſance P peut être partagée en deux efforts r, q, dont l'un faſſe équilibre avec la puiſſance R, & l'autre avec la puiſſance Q ; pour lors l'on aura r. R :: FD . FA, l'on aura encore q . Q :: FE . FA : donc r×FA = R×FD & q×FA = Q×FE : donc la ſomme des momens des efforts r, q eſt égale à la ſomme des momens des puiſſances R, Q ; mais la ſomme des momens des efforts r, q eſt égale au moment de la puiſſance P : car puiſque $r+q$=P, r×FA+q×FA=P×FA : donc la ſomme des momens des puiſſances R, Q eſt égale au moment de la puiſſance P.

133. *Si trois puiſſances* R, Q, S, *tirent dans le même ſens contre la puiſſance* P, *il y aura équilibre ſi la ſomme des momens des trois puiſſances* R, Q, S, *eſt égale au moment de la puiſſance* P. Car il eſt évident que dans cette hypotheſe on peut partager l'effort abſolu.

de la puiſſance P en trois efforts partiels r, q, s, de maniere que le moment de l'effort q ſoit égal au moment de la puiſſance Q, & que le moment de l'effort s ſoit égal au moment de la puiſſance S; ce qui n'eſt pas difficile à concevoir : car ſi de $P \times FA$ on retranche $r \times FA$, il faut que le reſte ſoit égal à la ſomme des momens des puiſſances Q,S;& ſi de ce reſte on retranche le moment $q \times FA$, il faut que le ſecond reſte ſoit égal au moment de la puiſſance S; l'effort partiel r fera donc équilibre avec la puiſſance R, l'effort q avec la puiſſance Q, & l'effort s avec la puiſſance S; mais les trois efforts r, q, s, pris enſemble, ne different point de la puiſſance P; donc cette puiſſance ſera en équilibre avec les trois puiſſances R, Q, S.

134. *On peut donc conclure en général que ſi pluſieurs puiſſances appliquées à un levier tirent contre une ſeule, elles ſeront en équilibre ſi la ſomme des momens eſt égale au moment de la puiſſance qui leur réſiſte.*

Et réciproquement, *ſi toutes ces puiſſances ſont en équilibre avec une ſeule qui réagiſſe contre toutes, la ſomme des momens de toutes celles qui tirent dans un même ſens ſera égale au moment de la puiſſance qui leur réſiſte.* On ſuppoſe toujours que les directions ſont en un même plan.

Fig. 42. 135. *Si deux puiſſances* P, S *tirent en ſens contraire de deux autres* R, Q, *elles ſeront en équilibre, ſi la ſomme des momens d'une part eſt égale à la ſomme des momens de l'autre part.* Car ſuppoſons que le moment de la puiſſance P eſt plus grand que le moment de la puiſſance R, on peut partager l'effort abſolu de la puiſſance P en deux efforts r, x, de maniere que le moment de l'effort r ſoit égal au moment de la puiſſance R. Si du moment de la puiſſance P on retranche le moment de l'effort r, le moment de l'effort x plus le moment de la puiſſance S pris enſemble ſeront égaux au moment de la puiſſance Q, autrement la ſomme des momens d'une part, ne ſeroit pas égale à la ſomme des momens de l'autre part. Cela poſé, il eſt évident que l'effort r ſeroit équilibre avec la puiſſance R, & que la puiſſance Q ſeroit équilibre avec l'effort x & la puiſſance s; donc les puiſſances R, Q ſeront équilibre avec les efforts r, x, & la puiſſance S; donc les puiſſances R, Q ſeront équilibre avec la puiſſance S, & la puiſſance P qui ne differe point des efforts r, x.

136. Réciproquemnet *ſi les puiſſances* R, Q *ſont équilibre avec les puiſſances* P, S, *la ſomme des momens d'une part ſera égale à la ſomme des momens de l'autre part.* Car on pourra toujours diviſer la

puiſſance P en deux efforts r, x, dont l'un ſçavoir r faſſe équilibre avec la puiſſance R, il faudra que la puiſſance Q faſſe équilibre avec l'effort x & la puiſſance S, autrement les quatre puiſſances ne ſeroient pas en équilibre : or il eſt évident que le moment de l'effort r eſt égal au moment de la puiſſance R, & que la ſomme des momens de l'effort x & de la puiſſance S eſt égale au moment de la puiſſance Q ; mais les momens des efforts r, x, pris enſemble, ſont égaux au moment de la puiſſanee P ; donc la ſomme des momens des puiſſances R, Q eſt égale à la ſomme des momens des puiſſances P, S.

137. *S'il y a un plus grand nombre de puiſſances qui agiſſent les unes contre les autres, il y aura équilibre ſi la ſomme des momens des puiſſances qui tirent dans le même ſens eſt égale à la ſomme des momens des puiſſances qui tirent en ſens contraires des précédentes.*

138. *Et ſi un plus grand nombre de puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, la ſomme des momens de celles qui tirent dans un ſens, ſera égale à la ſomme des momens des puiſſances qui tirent en ſens contraire de celles-là.*

139. *Si pluſieurs poids* S, P, R, Q, &c. *ſont ſuſpendus au levier* XY, *dont l'appui eſt en* F, *que la ſomme des momens des poids* P, S, *qui tirent le levier dans le même ſens, ſoit égale à la ſomme des momens des poids* R, Q, *qui tirent le levier en ſens contraire des précedens, ils ſeront en équilibre, & s'ils ſont en équilibre, la ſomme des moyens d'une part ſera égale à la ſomme des momens de l'autre part.* Ces propoſitions n'ont pas beſoin d'être prouvées après ce qui précede & ce que l'on a démontré de l'équilibre de pluſieurs puiſſances appliquées à un levier. Fig. 43.

140. *Lorſque pluſieurs poids ou puiſſances ſont appliquez à un levier, & que les directions ſont ſur un même plan, on peut par le moyen des propoſitions précedentes ſubſtituer une puiſſance à la place de deux, & deux à la place d'une ſeule : ainſi lorſque les poids* S, P, R, Q, *ſont ſuſpendus aux points* V, M, N, H, *du levier* XY, *on peut trouver ſur le levier un point* O *auquel un poids* Z *étant ſuſpendu faſſe le même effort ſur le levier que les deux poids* R, Q *lorſqu'ils ſont appliquez aux points* N, H *du même levier.* Fig. 40. 41. 42. 43.

Concevons que le poids Z eſt compoſé de deux parties r, q, telles que le moment de la partie r ſoit égal au moment du poids R, en ſorte que $r \times FO = R \times FN$; & que le moment de la partie q ſoit égal au moment du poids Q ; en ſorte que $q \times FO = Q \times FH$, il eſt évident que la ſomme des momens des parties r, q, ſera égale à la ſomme des momens des poids R, Q ; qu'ainſi ſi les poids Fig. 43.

Q, R font équilibre avec les poids P, S, les poids partiels r, q feront auſſi équilibre avec les poids P, S, puiſque pour lors la ſomme des momens des poids partiels r, q ſera égale à la ſomme des momens des poids P, S, à laquelle eſt égale la ſomme des momens des poids R, Q dans l'hypotheſe de l'équilibre : or le poids Z fait autant que les parties r, q qui le compoſent ; donc le poids Z ſuſpendu au point O, fera auſſi équilibre avec les poids P, S ; donc on peut le ſubſtituer à la place des poids R, Q.

141. *Le point* O *auquel on veut appliquer le poids* Z *étant donné, on peut auſſi déterminer la grandeur de ce poids en trouvant la grandeur de chacune de ſes parties* r, q, *par les proportions ſuivantes* FO . FN :: R . r ; FO . FH :: Q . q. Il eſt évident que dans ces deux proportions, les trois premiers termes étant connus, les quatriémes termes r, q pourront auſſi être connus, & que de plus les momens des poids partiels r, q ſont égaux aux momens des poids R, Q ; donc ſi on prend un poids Z qui ſoit égal aux poids r, q, il tiendra en équilibre les poids P, S, S étant ſuſpendu au point O.

Fig. 43. 142. *Si on veut que le corps* Z *qui doit faire équilibre avec les poids* P, S, *ſoit égal à la ſomme des poids* R, Q, *pour lors il faut déterminer le point* O *où ce poids doit être ſuſpendu.* Pour cet effet on ſuppoſera que le rapport de l'un des poids, par exemple, du poids Q, à l'autre poids R, eſt égal au rapport de 1 à (n). (n) exprime un nombre entier ou un nombre rompu à volonté, en ſorte que ſi n ſignifie 3, le rapport de Q à R, eſt égal à celui de 1 à 3, ſi (n) ſignifie $\frac{1}{4}$, le rapport de Q à R eſt égal à celui de 1 à $\frac{1}{4}$, &c. Cela poſé, *il faut diviſer* NH *en parties réciproquement proportionnelles à* 1 *& à* n *qui expriment les poids* Q *&* R ; *ce qu'on fait par la proportion* N+1 . 1 :: NH . NO, *c'eſt-à-dire, la ſomme des poids* Q+R *eſt au poids* Q, *comme la diſtance* NH *qu'il faut diviſer, eſt à la diſtance* NO *du poids* R *qui n'entre point dans la proportion. Les trois premiers termes étant connus, le quatriéme* NO *ſera auſſi connu, & par conſéquent le point* O *où il faut appliquer le poids* Z *qui eſt égal à* R+Q. Pour le prouver il faut démontrer que le moment du poids Z, c'eſt à-dire, que Z×FO eſt égal à la ſomme des momens des poids R, Q. Puiſque l'on trouve NO en diviſant NH par $n+1$, on peut exprimer NO par la fraction $\frac{NH}{n+1}$ & parce que l'on a encore 1 . n :: Q . R, on peut auſſi exprimer le poids R par la fraction $\frac{nQ}{1}$; en ſorte que R $=\frac{NQ}{1}$ ou R $= nQ$. Cela poſé, la ſomme des momens des poids R & Q eſt $nQ \times FN + Q \times FN + Q \times NH$, le premier produit eſt le moment du poids R,

& les deux derniers produits qui réſultent de la multiplication du poids Q par FH ou ſon égale FN + NH eſt le moment du poids Q. Le moment du poids Z eſt $Z \times FN + \frac{Z \times NH}{n+1}$: car le moment du poids Z eſt égal au produit de Z par FO ou ſon égale $FN + \frac{NH}{n+1}$: or le moment du poids Z eſt égal à la ſomme des momens des poids R & Q. 1°. $Z \times FN = nQ \times FN + Q \times FN$, car Z eſt égal à la ſomme des poids $nQ + Q$; donc ſi on multiplie de part & d'autre par la même grandeur FN, l'on formera des produits égaux. 2°. $\frac{Z \times NH}{n+1} = Q \times NH$: car ſi on ôte la fraction $n+1$, c'eſt-à-dire, qu'on multiplie l'une & l'autre grandeur par $n+1$, le rapport demeurera le même, & l'on aura $Z \times NH$ & $nQ \times NH + Q \times NH$: or ces deux grandeurs ſont égales, puiſque $Z = nQ + Q$; donc ſi on multiplie ces deux grandeurs égales par la même grandeur NH, les produits ſeront égaux ; donc le moment du poids Z eſt égal à la ſomme des momens des poids R, Q ; donc le moment du poids Z eſt auſſi égal à la ſomme des momens des poids P, S. Donc le poids Z étant ſuſpendu au point O, eſt en équilibre avec les poids P, S. De cette maniere on pourra réduire tous les poids qui ſont d'un même côté de l'appui à un ſeul, quel qu'en ſoit le nombre. Fig. 40.

143. Si les directions des puiſſances Q, R ſont inclinées l'une à l'autre, & au levier XY, pour avoir la diſtance FO à laquelle il faut appliquer la puiſſance Z, il faudra diviſer par la force abſolue de Z, la ſomme des momens $FE \times Q + FD \times R$, & le quotient donnera la diſtance FO qui étant multipliée par Z ſera le moment de cette puiſſance, lequel étant égal à la ſomme des momens $FE \times Q + FD \times R$, il eſt certain que cette puiſſance étant appliquée au point O ſuivant une direction OZ perpendiculaire au levier ſera équilibre avec la puiſſance P ou les puiſſances P, S. On auroit pû ſuivre la même méthode pour le cas où les directions ſont paralleles & perpendiculaires au levier. 41. 42.

144. Le treuil étant une eſpece de levier, on peut ſe ſervir des momens pour s'aſſurer s'il y a équilibre ou non entre les puiſſances qui ſont appliquées à cette machine. 1°. Si les directions ſont perpendiculaires à l'axe, on peut les rapporter toutes ſur un même plan auſſi perpendiculaire à l'axe; *& ſi du point où ce plan coupe l'axe, on mene des perpendiculaires à ces directions qu'on multiplie chaque puiſſance ou ſon effort abſolu par ſa diſtance ou perpendiculaire, on formera par-là les momens de toutes les puiſſances ;* car

des puiſſances appliquées au treuil agiſſent les unes ſur les autres de même que ſi leurs directions étoient ſur un ſeul plan, & que le levier qu'elles tirent eût pour appui le point où le plan ſur lequel les directions ſont couchées, coupe l'axe. Cela poſé ſelon les principes qu'on vient d'établir, *ſi la ſomme des momens des puiſſances qui tirent dans un ſens eſt égale à la ſomme des momens des puiſſancee qui tirent en ſens contraire des précedentes, il y aura équilibre. Et s'il y a équilibre la ſomme des momens d'une part ſera égale à la ſomme des momens de l'autre part.* 2°. Si les directions ſont inclinées à l'axe, il eſt plus court de recourir à la décompoſition des forces ſelon la méthode qu'on a employée dans la ſeconde démonſtration du treuil, elle conſiſte à faire paſſer par l'axe un ou pluſieurs plans, (deux ſuffiſent pour cela) qui rencontreront les directions des puiſſances, & concevoir que ces puiſſances tirent ces plans, & par conſéquent l'axe du treuil qui eſt leur commune ſection ſuivant des directions obliques l'effort abſolu de chaque puiſſance ſera donc décompoſé en deux autres efforts dont l'un ſera perpendiculaire au plan qui coupe la direction, & par conſéquent à l'axe ; l'autre effort ſera parallele au même plan, & ira rencontrer l'axe prolongé ou non : ce ſecond effort ſe perd ſur les appuis, & ne contribue en rien à l'équilibre des puiſſances : car par cet effort parallele au plan, chaque puiſſance tire l'axe lequel eſt immobile étant retenu en tout ſens par les appuis du treuil, les puiſſances n'agiſſent donc les unes ſur les autres que par les efforts perpendiculaires au plan par l'axe. Cela poſé, il faut concevoir comme dans le cas précedent que les directions des efforts perpendiculaires ſont ſur un même plan perpendiculaire à l'axe, ou concevoir que ces directions ſont chacune ſur un plan perpendiculaire à l'axe. Si du point où chaque plan coupe l'axe on mene une perpendiculaire à la direction qui eſt ſur ce plan, qu'on multiplie l'effort perpendiculaire dont il s'agit ici par ſa diſtance, on formera les momens de tous ces efforts ; *de ſorte que ſi la ſomme des momens des efforts perpendiculaires qui tirent en un même ſens, eſt égale à la ſomme des momens des efforts perpendiculaires qui tirent en ſens contraires des précedens, il y aura équilibre entre ces efforts, & par conſéquent entre les puiſſances qui les produiſent ;* car on vient de voir que les efforts paralleles au plan par l'axe, ne peuvent produire aucun mouvement, tout leur effet ſe réduit à augmenter la charge des appuis. Réciproquement ſi pluſieurs puiſſances qui tirent le treuil ſuivant des directions obliques à l'axe ſont en équilibre, après avoir décompoſé chaque puiſſance dans

ſes deux efforts, l'un perpendiculaire au plan par l'axe, l'autre parallele au même plan, on doit trouver que la ſomme des momens des efforts perpendiculaires qui tirent dans un même ſens, eſt égale à la ſomme des momens des efforts perpendiculaires qui tirent en ſens contraire des précedens. Toutes ces propoſitions ſont évidentes par ce que l'on a démontré des momens des puiſſances appliquées au levier.

145. On remarquera que la poſition du plan par l'axe qui coupe les directions des puiſſances eſt arbitraire; ce qui ne change rien ni dans le rapport des puiſſances, ni dans l'équilibre, ni dans la charge des appuis; cela ne ſouffre aucune difficulté, ſi on fait réflexion que des puiſſances peuvent ſans changer leurs directions & le rapport qu'elles ont entr'elles faire équilibre ſur une infinité de levier differens, ſur autant qu'on peut tirer par l'appui des lignes qui rencontrent les directions, & cependant dans toutes ces poſitions differentes de levier, la charge de l'appui ſera la même.

DES APPUIS.

146. Dans les trois machines précedentes on a ſuppoſé que les appuis étoient des points fixes & inébranlables qui pouvoient réſiſter aux plus grands efforts; mais comme tous les corps ſont fragiles, il eſt bon dans la pratique de connoître au moins à peu près juſqu'où cette réſiſtance peut aller : or pour cela il faut que l'on ſçache la grandeur de la charge que des puiſſances en équilibre font porter à la machine : quant à préſent il ſuffira de déterminer cette charge, réſervant d'expliquer dans le ſecond Traité, la réſiſtance des ſolides. Le levier n'a qu'un appui, mais il y en a deux au treuil ou tour. On expliquera premierement ce qui regarde l'appui dans le levier, on traitera enſuite des appuis dans le treuil.

De l'appui dans le levier.

147. Il y a deux choſes à conſiderer dans l'appui du levier, la charge qu'il porte & la direction de cette charge. La charge de l'appui réſulte des efforts des puiſſances qui ſont en équilibre ſur le levier.

148. Lorſque deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, leurs efforts ſe compoſent néceſſairement en un, & c'eſt c'et effort qui fait la charge de l'appui.

149. Il eſt aiſé de concevoir la vérité de cette propoſition, car

deux puiſſances en équilibre ſur un levier ont néceſſairement leurs directions en un même plan, comme on l'a prouvé (*Liv.*I. 188.) indépendamment des mouvemens compoſez. Le levier n'a donc d'autre liberté que celle de tourner autour du point fixe ſur le plan même des directions : or ſi au lieu du point fixe on conçoit que le levier eſt retenu par un cordon flexible, il y a un point ſur le levier où le cordon venant à le rencontrer, une puiſſance ne pourra pas l'emporter ſur l'autre & ne pourra pas déterminer le levier à tourner ; il y aura donc équilibre entre les deux puiſſances & la réſiſtance du cordon qui eſt l'appui du levier ; mais puiſque le cordon ne réſiſte que ſuivant une direction, il eſt néceſſaire que les efforts par leſquels les puiſſances en équilibre tirent le levier, ſe compoſent en un ſeul effort qui faſſe la charge de l'appui.

150. Il eſt évident que le cordon qui ſoutient le levier doit être ſur le plan des directions des puiſſances en équilibre, autrement il ne pourroit réſiſter à leurs efforts. Si, par exemple, le levier étoit ſur un plan horizontal (que je ſuppoſe être celui des directions,) & que le cordon fût en l'air attaché à un point fixe hors du plan horizontal, le levier auroit liberté d'obéir aux impreſſions des puiſſances, il n'y auroit donc point équilibre. Non ſeulement le cordon qui retient le levier eſt ſur le plan des directions ; mais il paſſe par le point où elles concourent. Cette propoſition a été prouvée (*Liv.*I. 194.) ſans les mouvemens compoſez avec la ſeule ſuppoſition que ſi un point ou un corps eſt tiré par deux puiſſances dont les directions font un angle, ce point ou ce corps ſera néceſſairement mû ; car deux puiſſances ne peuvent ſe réſiſter totalement ſi leurs directions font un angle, & ſi elles ne ſont diametralement oppoſées ; ce que l'expérience confirme encore en pluſieurs manieres.

151. Si au cordon qui retient le levier on applique une puiſſance ou un poids qui le tire & le bande avec la même force que lorſqu'il eſt attaché au point fixe qui eſt hors du levier, il eſt évident que l'équilibre ne ſera point interrompu ; d'où l'on voit que ſi deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier au lieu de la réſiſtance de l'appui on peut toujours ſubſtituer une puiſſance ou un poids, & que la réſiſtance de l'appui eſt égale à cette puiſſance ou à ce poids.

152. Lors donc que deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier qui eſt ſupporté par un appui, on peut conſiderer ce levier comme étant tiré par trois puiſſances.

153. Lorſque

153. Lorſque trois puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, chacune d'elles peut être conſiderée comme faiſant l'office d'appui. Si l'on peut ſubſtituer une puiſſance à la place d'un appui, rien n'empêche qu'on ne puiſſe ſuppoſer un appui au lieu d'une puiſſance : car comme on a remarqué pluſieurs fois, dans l'équilibre où il ne s'agit pas de la production du mouvement, puiſque tout eſt en repos, l'action de chaque puiſſance ne differe point de la réſiſtance qu'elle oppoſe aux autres puiſſances : or il eſt viſible qu'un appui peut faire une réſiſtance égale à celle de cette puiſſance.

PROPOSITION QUATORZIE'ME.

154. *Si deux puiſſances* P, R *ſont en équilibre ſur le levier* XY *dont l'appui eſt en* F, *la réſiſtance de cet appui & une des puiſſances, par exemple, la puiſſance* R *ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées du point* M *où la puiſſance* P *eſt appliquée au levier, ménées, dis-je, ſur les directions de la réſiſtance & de la puiſſance* R.

Demonstration. On ſuppoſe que les puiſſances P, R tirent le levier ſuivant les directions MP, NR, & que la réſiſtance de l'appui F eſt ſuivant FC. Du point M où la puiſſance P tire le levier : ſoient menées les perpendiculaires ME, MG aux directions FC, NR. Il faut prouver que la réſiſtance F eſt à la puiſſance R comme MG eſt à ME, c'eſt-à-dire, que F . P :: MG . ME. Au lieu de l'appui il faut concevoir qu'une puiſſance F tire le levier ſuivant FC, l'équilibre ſubſiſtera encore ſi cette puiſſance fait un effort égal à la réſiſtance de l'appui, & au lieu de la puiſſance P ſuppoſer qu'au point M il y a un appui qui réſiſte ſuivant MP aux efforts des puiſſances F & R ; pour lors l'on aura deux puiſſances F, R qui ſont en équilibre ſur le levier XY dont l'appui eſt en M. Or ces puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires ME, MG ; donc la réſiſtance de l'appui qui ne differe pas de la puiſſance F, eſt à la puiſſance R comme la perpendiculaire MG eſt à la perpendiculaire ME. Fig. 44. 45.

On démontrera de la même maniere que la réſiſtance de l'appui & la puiſſance P ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées du point N où la puiſſance R eſt appliquée au levier ſur les directions FC, MP

155. Suppoſant encore que l'équilibre de deux puiſſances appliquées à un levier qui eſt ſupporté par un appui ne differe point de

l'équilibre de trois puiſſances, dont l'une feroit la même réſiſtance que l'appui ; on peut démontrer immédiatement par le principe de de M. Deſcartes le rapport de ces trois puiſſances. Pour cela il faut concevoir que l'une des trois, par exemple, la puiſſance P tient le levier tellement aſſujetti au point M auquel elle eſt appliquée que ce point demeure immobile tandis que la puiſſance R fait effort pour le faire tourner autour du point M, & que la puiſſance F réſiſte à cet effort. On concevra enſuite que la puiſſance R tient le levier aſſujetti au point N, en ſorte qu'il ne peut être mû qu'en tournant autour de ce point par l'effort de la puiſſance P auquel la puiſſance F réſiſte ; concevant ainſi que chaque puiſſance ſert d'appui tour à tour : on démontrera que ſi deux d'entr'elles ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires menées de l'appui aux directions, elles ſont en équilibre ; & que ſi elles ſont en équilibre elles ſont entr'elles réciproquement comme ces mêmes perpendiculaires.

156. COROLLAIRES. 1°. Si du point C ou les directions FC, NR concourent, on mene une ligne au point M, qu'avec le rayon CM, & du point C comme centre, on décrive un arc de cercle qui rencontre les directions des puiſſances F, R, les perpendiculaires ME, MG ſeront les ſinus des angles PCF, PCR que ces directions forment avec la ligne CP : *C'eſt pourquoi on peut dire que les puiſſances* F, R *qui ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires* ME, MG *ſont auſſi entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles, que leurs directions forment avec la ligne* CM ; *donc la réſiſtance de l'appui & la puiſſance* R *ſont auſſi dans cette raiſon.* On prouvera de la même maniere que la réſiſtance de l'appui & la puiſſance P ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles que leurs directions forment avec la ligne menée du point N conſideré comme appui au point de concours des mêmes directions.

157. 2°. Parce que les directions des trois puiſſances F, P, R, doivent concourir en un même point C, comme il a été prouvé, ſans le ſecours des mouvemens compoſez, il s'enſuit que les lignes MC, NC ſont ſur les directions des puiſſances P, R. *C'eſt pourquoi la réſiſtance de l'appui qui eſt la même que l'effort de la puiſſance* F *eſt aux puiſſances* P, R *réciproquement comme les ſinus des angles que la direction* FC *forme avec les directions* CP, CNR, *eſt au ſinus de l'angle* PCR *des directions* CP, CNR.

158. 3°. Si ſur les directions CP, CR, FC, on décrit le pa-

rallelogramme CISB, les côtez CB, BS, CS du triangle CBS ſont entr'eux dans la raiſon des ſinus des angles formez par les directions. *Donc la réſiſtance de l'appui & les puiſſances* P, R *ſont dans la raiſon des côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions. Réciproquement ſi les puiſſances* F, P, R *ſont dans la raiſon des côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, elles ſont en équilibre ſur le levier* XY, autrement lors qu'elles ſont en équilibre, elles ne ſeroient pas entr'elles comme les côtez d'un parallelogramme fait ſur leurs directions. D'où l'on voit que l'on arrive à une conſéquence qui eſt immédiatement liée avec les mouvemens ou forces compoſées : ſi trois puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, elles ſont entr'elles comme les trois côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, & ſi elles ſont entr'elles comme les trois côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, & qu'elles ſoient appliquées à un levier, elles ſont en équilibre ſi l'une d'elles tire en ſens contraire des deux autres. On peut donc faire uſage de la conſéquence que l'on vient de déduire, ſans qu'il ſoit néceſſaire de la prouver par la compoſition des mouvemens comme on a fait dans le premier Livre.

159. Le premier Corollaire peut être encore démontré d'une maniere fort aiſée par les mouvemens ou les forces compoſées, ſuppoſant toujours que la réſiſtance de l'appui tient lieu d'une puiſſance F, l'on aura trois puiſſances F, P, R en équilibre ſur le levier XY, elles ſeront auſſi en équilibre ſur le point C ou leurs directions doivent concourir (*Liv.* I. 195) : or les puiſſances F, P, R ne peuvent être ainſi en équilibre ſur le point C qu'elles ne ſoient entr'elles comme les côtez CF, CE, CB du parallelogramme EB formé ſur leurs directions (*Liv.* I. 190), ou comme les côtez CF, BF, BC du triangle BCF en prenant BF au lieu de ſon égale CE, l'on aura donc ces deux proportions 1°. F. P :: CF. BF. 2°. F. R :: CF. CB. Or les côtez CF, BF ſon entr'eux comme les ſinus des angles CBF, BCF auxquels ils ſont oppoſez ; d'ailleurs l'angle CBF à même ſinus que l'angle BCE qui eſt ſon ſupplement à deux droits ; donc les côtez CF, BF ſont entr'eux comme les ſinus des angles BCE, BCF ; donc la puiſſance F eſt à la puiſſance P comme le ſinus de l'angle BCE eſt au ſinus de l'angle BCF ; c'eſt-à-dire, que la puiſſance F & la puiſſance P ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles que leurs directions forment avec la direction de la puiſſance R. Fig. 67.

On démontrera de la même maniere que la puiſſance F & la puiſſance R ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des

angles que leurs directions forment auec la direction de la puiſſance P.

Fig. 44. 45. 160. 4°. Si les directions des puiſſances P, R tournent autour des points M, N, de maniere que le point C de concours s'éloigne du levier, il eſt évident que l'angle MCN deviendra de plus en plus petit, en ſorte que le point C étant à une diſtance infinie, l'angle MCN ſera infiniment petit, de même que les angles FCM, FCN, qui ont leur ſommet au point C. Cela poſé, ſi l'on conçoit que du point de concours C, il y ait un arc de cercle décrit avec le rayon CM qui coupe les directions, que du point M, il y ait des perpenduculaires MG, ME menées aux directions CR, FC, & que du point L ou l'arc coupe la direction CR, il y ait LH perpendiculaire ſur la direction FC; ces trois perpendiculaires ſeront les ſinus des angles MCN, FCM, FCN, par conſéquent les puiſſances F, P, R qui ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles formez par leurs directions, ſeront auſſi exprimées par les perpendiculaires NG, NE, LH. *Or je dis que dans l'hypotheſe que le point de concours* C *eſt à une diſtance infinie, la charge de l'appui répréſentée par la puiſſance* F *eſt égale à la ſomme ou à la difference des puiſſances* P, R; *cette charge eſt égale à la ſomme des puiſſances* P, R, *ſi l'appui eſt entre les directions* CP, CR; *mais elle ſera ſeulement égale à la difference des puiſſances* P, R, *ſi l'appui eſt extérieur aux directions* CP, CR. Car lorſque les directions des puiſſances F, P, R concourent à une diſtance infinie, elles peuvent être conſiderées comme paralleles, les lignes MG, ME, LH ſont donc pour lors perpendiculaires aux trois directions, puiſque chacune de ces trois lignes eſt perpendiculaire à l'une des trois directions, l'on aura donc trois perpendiculaires compriſes dans trois eſpaces paralleles dont l'une eſt égale à la ſomme des deux autres; donc la perpendiculaire qui eſt compriſe dans le grand eſpace eſt égale à la ſomme des perpendiculaire enfermées dans les deux autres eſpaces; or dans dans le cas de la Fig. 44, MG qui joint les paralleles les plus éloignées, eſt égale à la ſomme des perpendiculaires ME, LH; donc la puiſſance F ou la charge de l'appui qui eſt exprimée par MG, eſt égale à la ſomme des puiſſances P, R qui ſont répréſentées par les perpendiculaires ME, LH, au contraire dans la Fig. 45, la perpendiculaire ME qui joint les paralleles les plus éloignées eſt égale à la ſomme des perpendiculaires MG, LH; donc MG eſt eſt ſeulement égale à la difference des perpendiculaires ME, LH; donc pareillement la puiſſance F ou la réſiſtance de l'appui eſt ſeu-

lement égale à la difference des puiſſances R, P. Par conſéquent dans l'hypotheſe que les directions des puiſſances P, R, ſont paralleles, la charge de l'appui eſt égale à la ſomme ou à la difference des puiſſances P, R.

161. 5°. Lorſque les directions des puiſſances P, R ſont paralleles, les perpendiculaires compriſes entre ces directions & celle de la réſiſtance de l'appui ſont entr'elles comme les parties du levier pareillement compriſes entre ces directions paralleles; donc les puiſſances F, R, P qui ſont entr'elles comme les perpendiculaires MG, ME, LH, ſeront entr'elles comme les parties correſpondantes MN, MF, NF.

162. 6°. Il eſt évident que le rapport de la perpendiculaire MG aux perpendiculaires ME, LH, varie ſelon que les angles des directions changent; donc la charge de l'appui répréſentée par MG varie de même.

163. 7°. *Lorſque les directions ſont paralleles & que l'appui eſt entre les directions* CP, CR, *la charge de l'appui eſt la plus grande qu'il eſt poſſible.* Car lorſque les directions ſont paralleles MG eſt égale à la ſomme des perpendiculaires ME, LH; c'eſt-à-dire, que le ſinus de l'angle MCN eſt pour lors égal à la ſomme des ſinus des angles partiels FCM, FCN; mais le ſinus MG eſt le plus grand qu'il eſt poſſible lorſqu'il eſt égal à la ſomme des ſinus ME, LH, ce qui arrive lorſque les directions des puiſſances ſont paralleles ou qu'elles concourent à une diſtance infinie; dans tous les autres cas où les directions forment des angles d'une ouverture finie & déterminée, le ſinus de l'angle MCN eſt moindre que la ſomme des ſinus des angles partiels FCM, FCN; donc lorſque les directions ſont paralleles MG eſt la plus grande qu'il eſt poſſible par rapport aux perpendiculaires ME, LH; donc la charge de l'appui qui eſt répréſentée par MG, eſt auſſi pour lors la plus grande qu'il eſt poſſible, pourvu que l'appui ſoit entre les directions des puiſſances P, R. Fig. 44.

164. 8°. *Au contraire lorſque les directions ſont paralleles, & que l'appui eſt à une des extrémitez du levier, la charge de cet appui eſt la moindre qu'il eſt poſſible.* Car pour lors MG ſinus de l'angle MCN ou de ſon ſupplément PCR, eſt ſeulement égal à la difference des ſinus ME, LH des angles FCM, FCN, ou bien ME ſinus de l'angle FCM eſt égal à la ſomme des ſinus des angles MCN, FCN: or ce n'eſt que dans le cas où les directions ſont paralleles que le ſinus MG eſt ſeulement égal à la difference des ſinus ME, LH, ou que le ſinus ME eſt égal à la ſomme des ſinus Fig. 45.

MG, LH; dans tous les autres cas ME eſt moindre que la ſomme des ſinus MG, LH; donc ſi on retranche LH de ME lorſque les directions ſont paralleles, le reſte ſera égal à MG; mais ſi on retranche LH de ME lorſque les directions ne ſont pas paralleles, le reſte ſera moindre que MG puiſque la ſomme des perpendiculaires LH+MG eſt plus grande que ME; donc MG eſt plus petite lorſque les directions des puiſſances ſont paralleles ou qu'elles ſont un angle infiniment petit que lorſqu'elles ſont un angle d'une grandeur déterminée; donc la charge de l'appui eſt moindre lorſque les directions ſont paralleles que lorſqu'elles ſont un angle fini.

165. 9°. Si l'angle PCR des directions CP, CR eſt infiniment grand, les puiſſances P, R ſeront directement oppoſées, de ſorte que l'appui ne ſupportera qu'une charge égale à la difference des puiſſances P, R; mais ſi l'angle MCN Fig. 45 étoit infiniment grand, pour lors les directions CP, CR feroient l'angle PCR, infiniment petit, & étant appliquées l'une ſur l'autre, les puiſſances P, R ne compoſeroient plus qu'une ſeule force qui ſeroit la charge de l'appui.

Fig. 43. 166. Si les puiſſances qui ſont équilibre ſur le levier XY, ſont au nombre de plus de deux, & que leurs directions ſoient paralleles, la charge de l'appui ſera égale à leur ſomme ou à leur difference, cette charge ſera égale à leur ſomme ſi elles tirent toutes au-deſſus ou au-deſſous du levier; mais ſi les unes tirent au-deſſus & les au-deſſous du levier, la charge de l'appui ſera ſeulement égale à la difference de la ſomme de celles qui tirent au-deſſus à la ſomme de celle de celles qui tirent au-deſſous. Ce qui eſt évident après tout ce qui précede. Si les directions des puiſſances ou poids en équilibre ſur le levier XY, Fig. 46, ſont inclinées les unes aux autres & au levier, pour avoir la charge de l'appui il faut les réduire toutes à deux, enſubſtituant une puiſſance au lieu de deux, ainſi ſi les puiſſances P, R, Q, ſont en équilibre ſur le levier XY dont l'appui eſt en F, & que les directions des puiſſances R, Q concourent au point C, il faut décrire ſur les directions le parallelogramme BI, dont les côtez BC, CI ſoient proportionnels aux puiſſances R, Q, & dont la diagonale ſoit CS, laquelle étant prolongée rencontre le levier au point O: ſi l'on applique ſur la direction COZ une puiſſance Z qui ſoit exprimée par cette diagonale, elle ſera équilibre avec la puiſſance P, & elle chargera l'appui F comme feroient les puiſſances R, Q. Car ſi la puiſſance Z tiroit en ſens contraire des puiſſances R, Q, elles ſeroit en équilibre avec elles

ſur le levier GN (158), & elle déchargeroit l'appui F des efforts des puiſſances Q, R, & la puiſſance P ne porteroit aucune partie de ces efforts. Or puiſque la puiſſance Z ſoutient ſeule les efforts que les puiſſances R, Q font tant ſur l'appui que ſur la puiſſance P, il s'enſuit que ſi elle tire ſuivant COZ dans le ſens des puiſſances R, Q, elle chargera l'appui F de même que les puiſſances R, Q, & qu'elle ſera équilibre avec la puiſſance P. En ſuivant cette méthode on pourra réduire à deux toutes les puiſſances qui ſont en équilibre ſur un levier & avoir le rapport de la charge de l'appui à l'une ou à l'autre de ces puiſſances.

167. Remarque. Suppoſons qu'un poids de 6 livres faſſe équilibre ſur un levier avec un poids de 1 livre placé à une diſtance de l'appui 6 fois plus grande : les directions des poids étant parallele, l'appui ſera chargé de la ſomme des poids ſuivant les principes qu'on vient d'établir, mais puiſque le petit poids fait équilibre avec un poids de 6 livres, il s'enſuit que l'effort qu'il fait ſur le poids de 6 livres doit être auſſi de 6 livres, par conſéquent l'appui doit être chargé de 12 liv. & non pas ſeulement de 7 liv.

On répond 1°. que quand même on ne pourroit pas répondre à la difficulté propoſée, les principes qu'on vient d'établir touchant la charge de l'appui n'en ſeroient pas moins certains, puiſqu'ils ſont fondez ſur la démonſtration & ſur l'expérience. 2°. Il eſt vrai que ſi le petit poids ne peut faire équilibre avec le grand qu'en produiſant ſuivant ſa direction un effort de 6 livres, il doit charger l'appui par un effort de 6 livres ; mais à quelque diſtance de l'appui que le petit poids ſoit attaché, il ne fait jamais qu'un effort d'une livre : or cet effort d'une livre devient d'autant plus difficile à vaincre qu'il eſt produit à une plus grande diſtance de l'appui, cette plus grande difficulté ou réſiſtance n'eſt point abſolue, ſi cette réſiſtance étoit plus grande en elle-même, l'appui ſeroit plus chargé ; mais elle n'eſt plus grande que relativement au grand poids, & à la maniere dont il s'applique au petit : ainſi c'eſt le grand poids qui pour ſoutenir le petit, fait un effort de 6 livres qui doit charger l'appui par cet effort de 6 livres ; mais le petit ne doit le charger que par un effort de 1 livre, puiſqu'il ne fait qu'un effort de 1 livre.

Des appuis dans le tour ou treuil.

168. M. Varignon dans ſa nouvelle mécanique pour déterminer la charge ou réſiſtance des appuis dans le treuil, conſidere cette machine comme un levier ordinaire, c'eſt-à-dire, qu'il ſup-

poſe que les directions de la puiſſance & du poids ou fardeau qu'elle ſoutient, ſont dans un même plan ; mais il eſt viſible que cette ſuppoſition n'eſt vraie que dans le cas où les directions ſont paralleles ; d'ailleurs dans ce cas là même, on ne détermine point la portion que chaque appui ſupporte de la charge totale qui réſulte des efforts de la puiſſance & du poids : on ne dit rien non plus des directions ſuivant leſquelles les appuis réſiſtent. M. Varignon eſt le premier que je ſçache qui ait entrepris de déterminer à la faveur des mouvemens compoſez la charge de l'appui dans le treuil : on va ſe ſervir de la même méthode & de ce qui a été démontré du levier pour arriver à la vraie détermination de cette charge & des directions ſuivant leſquelles elle pouſſe chaque appui. Lorſqu'on cite M. Varignon dans cet endroit, ce n'eſt pas pour relever quelque mépriſe où il ſoit tombé : s'il y en a, c'eſt tout au plus dans la ſuppoſition qu'il fait, & non pas dans les conſéquences qu'il en tire : ainſi tout ce qu'on ſe propoſe en cette occaſion, eſt ſeulement d'avertir que ce que M. Varignon a écrit de la charge des appuis dans le treuil eſt inſuffiſant, & que l'article de ſon Livre qui regarde cette machine a beſoin d'un ſupplément qu'il feroit lui-même mieux que perſonne s'il étoit en vie.

On va faire quelques réflexions préliminaires qui pourront ſervir au deſſein que l'on a.

169. 1°. Lorſqu'on veut mettre en équilibre une puiſſance F par le moyen de deux autres P, R généralement parlant, celles-ci ſont indéterminées, car elles ne peuvent faire équilibre avec la puiſſance F, à moins qu'elles ne ſoient entr'elles & à la puiſſance F comme les côtez d'un parallelogramme formé ſur leurs directions, ſont entr'eux & à la diagonale : or dans ce parallelogramme il n'y a que la diagonale qui exprime la puiſſance F, qui ſoit déterminée, les directions des puiſſances P, R, de même que les côtez du parallelogramme ne le ſont pas, puiſque ſur une même diagonale on peut conſtruire une infinité de parallelogrammes ; donc les puiſſances P, R qui ſont répréſentées par les côtez de tous ces differens parallelogrammes ſont indéterminées.

170. 2°. Cette indétermination dont on a donné une idée (*Liv.* I. 197.) peut être plus ou moins grande ſelon le nombre des conditions exprimées dans le problême, c'eſt-à-dire, qu'il peut y avoir plus ou moins de cas poſſibles : ainſi ſi l'une des puiſſances ou P ou R eſt donnée, ou bien une des directions, l'indétermination ne ſera pas ſi grande que ſi le problême étoit propoſé indéfiniment, & ſans aucune condition.

171. 3°. Si

171. 3°. Si deux puiſſances P, R ſont actuellement en équilibre avec la puiſſance F, on peut dire qu'elles ſont déterminées en un ſens, & indéterminées en un autre ſens, elles ſont déterminées parce qu'elles ſont d'une certaine grandeur & meſure, & en ce qu'il n'y a qu'elles qui puiſſent réſiſter à la puiſſance F tant qu'elles agiront ſuivant les mêmes directions ; mais elles ſont indéterminées par leur nature, parce qu'elles ne ſont pas les ſeules qui puiſſent faire équilibre avec la puiſſance F, puiſqu'a leur place on en peut ſubſtituer une infinité d'autres qui produiront le même effet : ainſi les puiſſances P, R ſont déterminées ou par le choix que l'on en fait, ou par quelque autre circonſtance ; mais elles ſont indéterminées par leur nature, parce qu'elles n'excluent pas une infinité d'autres puiſſances qu'on peut mettre à leur place, qui produiront de même l'équilibre.

172. 4°. Une puiſſance qui eſt en équilibre avec deux autres, eſt déterminée, parce qu'elle ne fait que réſiſter à l'effort qui réſulte de leur action conjointe, lequel eſt unique ; mais l'effort d'une même puiſſance peut ſe décompoſer ſuivant une infinité de directions differentes ; de-là vient l'indétermination : ſi un poids eſt retenu en équilibre au moyen de deux cordons, par deux puiſſances qui leur ſont appliquées, l'angle des directions marquées par les deux cordons, pourra être plus ou moins ouvert à l'infini, ce qui prouve qu'une même force peut ſe décompoſer ſuivant une infinité de directions differentes, & que les puiſſances qui réſiſtent à ces efforts derivez, ſont indéterminées dans le ſens du nombre 3.

173. 5°. Ce qu'on vient de dire de la détermination de deux puiſſances qui réſiſtent à une troiſiéme, eſt encore vrai à l'égard des réſiſtances que feroient deux obſtacles qui ſeroient purement paſſifs ou privez de toute action, c'eſt-à-dire, que ces réſiſtances ſont indéterminées au moins dans le ſens qu'on en peut ſubſtituer une infinité d'autres, au lieu de celles qui concourent actuellement à la production de l'équilibre.

174. 6°. Il y a néanmoins de la difference entre l'indétermination ou la détermination des puiſſances R, P, & celles de deux obſtacles qui réſiſtent actuellement à la même puiſſance F. Car lorſqu'on met en équilibre la puiſſance F, en lui oppoſant deux autres puiſſances R, P, celles-ci reçoivent par-là une eſpece de détermination qui eſt toute arbitraire & uniquement fondée ſur le choix qu'on en fait, elles ne doivent point leur naiſſance ou leur éxiſtance à la puiſſance F, puiſqu'au contraire elles déterminent par leur action la puiſſance F à agir contre elles-mêmes ; mais il n'en

eſt pas ainſi lorſque la puiſſance F preſſe deux obſtacles : car comme ils ſont purement paſſifs ou ſans action, leur réſiſtance eſt un effet, ou plutôt elle réſulte de la preſſion que la puiſſance F exerce ſur eux, c'eſt cette preſſion qui la fait naître, & elle lui eſt en quelque façon poſterieure ; d'où l'on voit que ſi les réſiſtances actuelles des obſtacles qui arrêtent ou retiennent la puiſſance F, ſont déterminées, c'eſt-à-dire, ſi elles ſont d'une certaine meſure, leur détermination eſt bien plus grande que celle des puiſſances R, P ; & que ſi on peut connoître les preſſions que la puiſſance F exerce ſur les obſtacles, on eſt aſſuré de pouvoir trouver leurs vraies réſiſtances, c'eſt-à-dire, celles que la puiſſance F fait naître, encore qu'on puiſſe toujours leur en ſubſtituer une infinité d'autres qui concourront également à l'équilibre actuel.

175. 7°. Lorſqu'une puiſſance tient un poids en équilibre ſur le treuil au lieu des réſiſtances actuelles des appuis, on peut ſuppoſer une infinité de puiſſances ou d'autres réſiſtances qui maintiendront la machine dans la même ſituation, c'eſt-à-dire, en équilibre comme on verra bien-tôt : on ſe propoſe néanmoins de montrer que les preſſions cauſées ſur les appuis par la puiſſance & le poids, ſont d'une meſure fixe & déterminée, & que parmi ce nombre innombrable de puiſſances ou réſiſtances, il n'y en a que deux qui ſoient les vraies, c'eſt-à-dire, celles que la puiſſance & le poids font naître.

Fig. 34. 176. 8°. On ſuppoſe que XY, eſt une verge inflexible ſans épaiſſeur parfaitement liſſe & polie, & exempte de tout frottement, de même que les anneaux M, N dans leſquels elle paſſe, je dis que ſi elle eſt tirée ſuivant une direction FG qui lui ſoit oblique, elle gliſſera dans les anneaux : car ſi on ôte la puiſſance qui tire ou pouſſe ſuivant FG, & qu'on en mette deux autres dont l'une tire ſuivant FC, & l'autre ſuivant FN ; il eſt évident que cette derniere force fera gliſſer la verge XY dans les anneaux, puiſque rien ne s'oppoſe à ce mouvement ; mais le principe des forces compoſées, montre que la puiſſance qui tire ſuivant FG, fait tout autant pour mouvoir le point F, ou la ligne XY que les puiſſances dirigées ſuivant FC, FN ; donc la verge XY étant tirée ou pouſſée ſuivant la direction oblique FG, gliſſera dans les anneaux M, N. Cette propoſition eſt d'ailleurs conforme à l'expérience, & on peut la faire fort facilement.

177. 9°. Si la verge XY eſt tirée ſuivant une direction FC qui lui ſoit perpendiculaire, elle ſera retenue en équilibre par la réſiſtance des anneaux. Car puiſque la direction FC eſt perpendicu-

laire à la verge XY, cette verge n'eſt déterminée à gliſſer ni vers la droite ni vers la gauche : or le mouvement qui ſe fait en gliſſant, eſt le ſeul qu'elle puiſſe avoir ; donc la verge ſera retenue en équilibre par la réſiſtance des anneaux. Cette propoſition eſt encore conforme à l'expérience.

178. 10°. Lorſque la verge XY eſt tirée ſuivant une direction qui lui eſt perpendiculaire, les réſiſtances des anneaux M, N ſont auſſi dirigées ſuivant les lignes MP, NR perpendiculaires à la verge XY. Car puiſqu'un obſtacle ne réſiſte qu'autant qu'il eſt preſſé, & dans un ſens directement oppoſé à celui ſuivant lequel il eſt preſſé, il s'enſuit que ſi les preſſions que la ligne ou verge XY, exerce ou bien la puiſſance F qui la tire, ſont dirigées parallelement à FC, les réſiſtances des anneaux ſeront auſſi dirigées parallelement à FC en des ſens oppoſez, & ſont par conſéquent perpendiculaires à XY : or les preſſions que les anneaux ſupportent, ſont paralleles à FC, ou perpendiculaires à XY, car ces preſſions ne peuvent être obliques à XY que cette ligne ne ſoit pouſſée ou tirée ſuivant des directions obliques à la même XY, ce qui eſt contre l'hypotheſe ; d'ailleurs ſi les preſſions dont il s'agit ici étoient obliques à XY, cette ligne gliſſeroit dans les anneaux M, N ſelon le nombre 8e ; donc les anneaux M, N réſiſtent ſuivant des directions paralleles à FC, & par conſéquent perpendiculaires à XY.

179. 11°. Lorſque la ligne ou verge XY, eſt tirée ſuivant une direction qui lui eſt perpendiculaire, les réſiſtances des anneaux ſont déterminées, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont d'une meſure ou grandeur fixe & certaine : car lorſque les directions de trois puiſſances ſont données avec une des puiſſances, les deux autres ſont déterminées : or dans l'hypotheſe préſente, les trois directions FC, MP, NR, ſont données avec la puiſſance F ; donc les puiſſances qui tireroient ſuivant MP, NR, & qui feroient équilibre avec la puiſſance F, ſont déterminées ; donc les réſiſtances des anneaux qui dans l'équilibre font autant que les puiſſances dirigées ſuivant MP, NR, ſont auſſi déterminées, c'eſt-à-dire, d'une grandeur définie & certaine.

180. 12°. Si la verge ou ligne XY étant tirée ſuivant une direction FG oblique à la même ligne eſt en équilibre, les réſiſtances des anneaux ſont indéterminées. Car l'effort que la puiſſance qui tire ſuivant FG, fait ſur la ligne eſt équivalent à deux efforts, dont l'un ſeroit dirigé ſuivant la perpendiculaire FC, & l'autre ſuivant la ligne XY, ſelon le nombre 8e ; il faut donc que les anneaux réſiſtent dans l'hypotheſe préſente, & à l'effort ſuivant FC,

& à l'effort ſuivant FN, les réſiſtances que les anneaux font à l'effort ſuivant FC ſont déterminées ſelon le nombre 11ᵉ; mais la réſiſtance que les mêmes anneaux font à l'effort ſuivant FN ſont indéterminées : car comme la verge & les anneaux ſont ſuppoſez parfaitement polis, il eſt néceſſaire d'oppoſer une réſiſtance à l'effort qui tend à faire gliſſer la verge, ſans quoi il n'y auroit pas équilibre. Or il peut ſe faire que par la conſtruction particuliere des anneaux & de la verge dans le cas ſuppoſé, il n'y ait qu'un anneau qui réſiſte à l'effort ſuivant FN, ou bien qu'ils réſiſtent l'un & l'autre ou également ou inégalement. L'on voit donc que les réſiſtances que les anneaux font à l'effort ſuivant FN ſont indéterminées, par conſéquent les réſiſtances totales que les mêmes anneaux font à la force ſuivant FG, ſont auſſi indéterminées.

181. 13°. Si la verge XY & les anneaux ſont conſtruits de maniere qu'il n'y en ait qu'un qui réſiſte à l'effort par lequel la verge tend à gliſſer, pour lors les réſiſtances des anneaux ſont déterminées, c'eſt-à-dire, d'une grandeur définie & certaine, puiſque les preſſions que la puiſſance F produit ſur les anneaux, ſont d'une meſure déterminée.

182. 14°. Lors qu'on a parlé de l'analogie du tour, c'eſt-à-dire, du raport de la puiſſance au poids, on a fait voir que la force d'une des puiſſances étoit décompoſée en deux efforts dont l'un ſe perd ſur les appuis, & qui ne contribue en rien à l'équilibre, & l'autre qui fait équilibre avec l'autre puiſſance : or comme il peut arriver que les directions de l'une & de l'autre de ces efforts, ſoient obliques à l'axe, il ſuivroit des réflexions précedentes que les réſiſtances que les appuis font à ces efforts, ſeroient indéterminées : cependant ſi on remarque que les treuils & cabeſtans ſont conſtruits pour l'ordinaire de maniere qu'il n'y a qu'un des appuis qui réſiſte aux impreſſions que le rouleau reçoit, & par leſquelles il eſt ſollicité de gliſſer & de ſe mouvoir ſuivant la longueur de l'axe, il faudra conclure des mêmes obſervations qu'on vient de faire, que les réſiſtances que les appuis font aux efforts dont on vient de parler, ſont déterminées.

183. 15°. Lorſqu'on dit que les réſiſtances des appuis dans le treuil ſont déterminées, on ne prétend pas dire que les réſiſtances actuelles que les appuis font aux preſſions de la puiſſance & du poids, ſoient les ſeules qui puiſſent tenir la machine en état, & ſupporter les efforts qui les pouſſent : car on convient au contraire qu'il y en a une infinité d'autres qui peuvent produire le même effet, comme on a déja obſervé pluſieurs fois dans les réflexions

précedentes ; mais lorſqu'on dit que les réſiſtances des appuis dans le treuil, ſont déterminées, on entend ſeulement que la puiſſance & le poids ſont ſur eux des efforts d'une meſure connue & certaine, quoiqu'il ſoit d'ailleurs indubitable qu'on peut oppoſer à ces efforts une infinité de puiſſances ou réſiſtances differentes. Ceci paroîtra encore mieux dans les propoſitions ſuivantes.

184. 1°. Pour déterminer la charge de chaque appui dans le treuil, il faut faire attention aux efforts dérivez de la puiſſance P dont l'un eſt ſur le plan par l'axe, & eſt dirigé ſuivant fMG, & l'autre ſuivant MQ, & à l'effort de la puiſſance R. Fig. 34. 35. 36. 37. 38. 39.

DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DE LA DIRECTION & de la charge des appuis dans le treuil.

185. On ſe ſervira des figures dont on s'eſt déja ſervi pour déterminer le rapport de la puiſſance au poids.

186. On peut ſuppoſer que les directions MP, NR ſont l'une & l'autre perpendiculaires à l'axe, ou bien que l'une d'elles, par exemple, la direction MP eſt oblique, ou bien qu'elles le ſont toutes deux.

PREMIER CAS, *lorſque les directions* MP, NR *ſont perpendiculaires à l'axe.*

187. 1°. Il faut d'un point pris à volonté ſur l'axe, mener une perpendiculaire à la direction NR, on ſuppoſe que cette perpendiculaire rencontre NR au point N ; par là on déterminera la ſituation du plan par l'axe auquel la direction NR ſera perpendiculaire, car cette direction ſera perpendiculaire à la ligne qu'on aura menée, & à l'axe : or l'axe & la ligne menée d'un point du même axe, ſont dans un même plan ; donc la direction NR étant perpendiculaire à deux lignes qui ſont dans un même plan, eſt auſſi perpendiculaire à ce plan, (on ne marque point dans la figure la perpendiculaire dont il s'agit ici, pour éviter la confuſion des lignes.) 2°. Du point N il faut mener ſur le plan par l'axe la ligne NM qui rencontre la direction MP au point M ; des points M, N mener les lignes Mf, NF perpendiculaires à l'axe ; il eſt évident que les perpendiculaires Mf, NF ſont dans le plan par l'axe, car elles ſont dans le plan des lignes NM, XY qui ſont l'une & l'autre dans le plan par l'axe ; les perpendiculaires Mf, NF, avec les directions MP, NR, déterminent la ſituation des plans paralleles, dans leſquels ſont les directions MP ; NR, & que l'on a nommez plans des directions ; les plans fMP, FNR ſont perpendiculaires à l'axe XY, & au plan par l'axe, car l'axe Fig. 35. 36. 37. 38.

eſt perpendiculaire aux directions MP, NR, & aux lignes fM, FN; par conſéquent l'axe eſt perpendiculaire aux plans ſur leſquels ces lignes ſont ſituées deux à deux. Le plan par l'axe eſt auſſi perpendiculaire aux plans fMP, FNR, puiſque l'axe qui eſt dans ce plan, eſt perpendiculaire aux plans fMP, FNR. 3°. Après avoir décrit ſur le plan fMP, de la direction MP, le parallelogramme rectangle GQ, dont la diagonale MP exprime l'effort abſolu de la puiſſance P (voyez l'art. 104 & les ſuivans), il faut prolonger la ligne NM, juſqu'à ce qu'elle rencontre au point C, l'axe auſſi prolongé s'il eſt néceſſaire, il faut élever CH perpendiculaire au plan par l'axe. Si l'on conçoit que l'on applique à la direction CH une puiſſance H qui ſoit à la puiſſance R & à l'effort ſuivant MQ que la puiſſance P exerce ſur le poids R, comme MN eſt à CM, CN, cette puiſſance fera un effort égal à la charge que la puiſſance R & la force ſuivant MQ font porter au point C (par la propriété du levier,) de ſorte qu'au lieu de la réſiſtance que le point C fait à cette charge, on peut ſubſtituer la puiſſance H qui doit tirer en ſens contraire des directions NR, MQ, lorſque le point C eſt entre les points M, N, & en ſens contraire de NR, ou de MQ, ſelon que le point N eſt entre les points M, C, ou que c'eſt le point M qui eſt entre deux. Il eſt évident que la puiſſance H eſt égale à la ſomme ou à la difference des efforts ſuivant NR, MQ ſelon que NM eſt égale à la ſomme ou à la difference de MC & NC. 4°. Il eſt viſible que la charge de chaque appui doit réſulter des efforts ſuivant CH & ſuivant fMG : on vient de voir que la puiſſance H eſt égale à la ſomme ou à la difference des efforts ſuivant NR, MQ, par leſquels les puiſſances R, P ſe contrebalancent & font équilibre ſur le point C de l'axe, l'effort ſuivant fMG, lequel eſt exprimé par MG, étant dirigé ſuivant le plan par l'axe, ne fait rien ni pour ni contre la puiſſance R; mais il eſt entierement ſoutenu par les appuis O, S. Ces appuis ſont donc chargez par les puiſſances P, R, de même que ſi on appliquoit aux points C, f de l'axe deux puiſſances dirigées ſuivant CH & fMG dont la premiere ſçavoir H fut égale à la ſomme ou à la difference des efforts ſuivant NR, MQ, & l'autre ſçavoir G, fut exprimée par MG. Les directions CH, fMG étant perpendiculaires à la ligne inflexible XY, que l'on peut conſiderer comme engagée dans deux anneaux O, S, dans leſquels elle peut gliſſer ſans aucun empêchement, les puiſſances H, G produiſent ſur les appuis O, S, des preſſions d'une grandeur déterminée dans le ſens des réflexions précedentes, c'eſt-à-dire, des preſſions qui ſont

dirigées parallelement à CH & *f* MG, & que l'on peut déterminer par la propriété du levier ; c'eſt pourquoi, 5°. il faut des points O, S mener ſur le plan par l'axe deux paralleles à *f* MG, & des mêmes points élever deux perpendiculaires au même plan qui ſeront paralleles à CH, & faire enſuite deux proportions pour déterminer les efforts que les puiſſances G, H font ſur les appuis, ſuivant les lignes qu'on vient de tirer. Ainſi ſi l'on dit OS. *Of*:: G, ou GM eſt à un quatriéme terme, on aura l'effort que la puiſſance G fait ſur l'appui S. Si de l'effort ſuivant *f* MG, c'eſt-à-dire, ſi de GM on retranche l'effort déterminé par la proportion, le reſte ſera l'effort que la puiſſance G fait porter à l'appui O, ſi le point *f* eſt entre les appuis O, S ; mais ſi l'appui O eſt entre les points *f*, S, pour avoir la preſſion cauſée ſur cet appui par la puiſſance G, il faudra ajouter l'effort exprimé par MG à l'effort déterminé par la proportion. On déterminera par une opération ſemblable les efforts que la puiſſance H fait ſur les appuis O, S. 6°. Sur les paralleles à *f* MG, il faut prendre OL, SE qui expriment les efforts que la puiſſance G fait ſur les appuis, & que l'on vient de déterminer, ces efforts ſont dirigez en ſens contraires de l'effort de la puiſſance G, lorſque le point *f* eſt entre les appuis O, S ; mais lorſque l'appui O eſt entre les points *f*, S, il n'y a que l'effort OL qui ſoit dirigé en ſens contraire de l'effort MG, car l'effort SE eſt dans le même ſens que MG ; il faut prendre auſſi ſur les paralleles à CH, les parties OI, SD qui expriment les efforts que la puiſſance H fait ſur les appuis O, S. Si le point C eſt entre les appuis O, S, les efforts OI, SD ſont dirigez dans le même ſens que l'effort de la puiſſance H, puiſque cette puiſſance réſiſte aux efforts ſuivant NR, MQ, & que d'ailleurs les appuis O, S tiennent lieu de la puiſſance H. Mais ſi l'un des appuis, par exemple, l'appui S Figure 38. eſt entre les points C, O, l'effort SD eſt dirigé en ſens contraire de l'effort ſuivant CH. 7°. Si ſur les lignes OI, OL ; SE, SD, on conſtruit deux parallelogrammes IL, ED, dont les diagonales ſont OV, SB, elles exprimeront les preſſions ou charges que les deux puiſſances G, H, & conſéquemment, les puiſſances P, R font porter enſemble aux appuis O, S, & les réſiſtances ou efforts contraires ſeront dirigez ſuivant OV, SB. Il eſt évident que les directions OV, SB ſont perpendiculaires à l'axe XY, & qu'elles ſont dans des plans perpendiculaires au même axe, puiſque les efforts OI, OL ; SE, SD ſont perpendiculaires à l'axe.

Fig. 38.

188. SECOND CAS, *lorſque la ſeule direction* NR *eſt perpendiculaire à l'axe.*

Fig. 39. Ce ſecond cas ne differe du précedent qu'en ce que l'effort que la puiſſance P fait ſuivant *f*MG eſt oblique à l'axe, cet effort preſſe donc les appuis, & tend en même-tems à faire gliſſer l'axe. Si l'on ſuppoſe que ſelon la conſtruction ordinaire du treuil, il n'y ait qu'un des appuis qui arrête le mouvement qui ſe fait en gliſſant, les preſſions que la puiſſance G cauſe ſur les appuis ſeront déterminées comme dans le cas précedent. Car pour lors la force ou puiſſance G preſſera l'un des appuis ſuivant la perpendiculaire à l'axe, & l'autre, ſçavoir celui qui réſiſte au mouvement en gliſſant, ſuivant une direction oblique au même axe. Comme on ſuppoſe encore que la direction NR eſt perpendiculaire à l'axe, la ſituation du plan par l'axe eſt la même que dans le premier cas: ainſi les directions NR, MQ, CH, OI, SD ſont encore perpendiculaires au plan par l'axe, il ne s'agit donc plus que de déterminer les efforts que la puiſſance G fait ſur les appuis. On ſuppoſe que c'eſt l'appui S qui réſiſte au mouvement en gliſſant: par conſéquent l'appui O ſera preſſé ſuivant une ligne *om* perpendiculaire à l'axe, ſuppoſons qu'elle rencontre la direction *f*MG au point *m*. De l'appui S il faut mener par le point *m* la ligne S*m* prolongée vers *q*, prendre ſur *f* MG la partie *mg* égale à MG; par le point *g* tirer *gp*, *gq* paralleles aux lignes S*m*, *om*, par là on formera le parallelogramme *pq*, ſi l'on conçoit que deux puiſſances tirent le point *m* ſuivant *pm*, *qm*, & qu'elles ſoient exprimées par les côtez *pm*, *qm* du parallelogramme décrit, elles feront équilibre avec la puiſſance G, puiſque cette puiſſance eſt exprimée par MG, ou ſon égale *mg*, & que d'ailleurs elle tire en ſens contraire des deux autres; mais puiſqu'on ſuppoſe que l'appui O réſiſte ſuivant *opm* perpendiculaire à l'axe, il eſt néceſſaire que l'appui S réſiſte ſuivant S*qm*, car les directions de ces réſiſtances doivent concourir en un même point *m* de la direction *f*MG: par conſéquent les réſiſtances des appuis O, S qui ſont à la place des puiſſances qu'on vient de ſuppoſer, ſont exprimées par les côtez du parallelogramme *pq*. C'eſt pourquoi ſi on prend OL=*mp* & SE=*mq*, que l'on décrive comme dans le premier cas les parallelogrammes rectangles IL, ED dont les diagonales ſont OV, SB; elles exprimeront les réſiſtances des appuis O, S, & indiqueront leurs directions.

189. TROISIÉME CAS, *lorſque les directions* MP, NR *ſont obliques à l'axe.*

Dans ce troiſiéme cas la direction NR eſt néceſſairement oblique au plan par l'axe (on peut déterminer la ſituation de ce plan de la même maniere que dans le premier & le ſecond cas.) Or puiſque

puiſque la direction NR eſt oblique à l'axe, la direction MQ qui eſt parallele à NR, eſt auſſi oblique à l'axe, de même que la direction CH de la puiſſance H qui fait équilibre avec les puiſſances R, Q. Cela étant, on déterminera les efforts que la puiſſance H fait ſur les appuis comme on a fait pour la puiſſance G dirigée ſuivant MG : ainſi on ne s'arrête pas d'avantage à ce troiſiéme cas. On remarquera ſeulement que dans ce cas les directions des réſiſtances ſont dans des plans obliques au plan par l'axe ; & parce que les côtez des parallelogrammes IL, ED, ont une ſituation connue, on a auſſi celles des plans ſur leſquels ils ſont, & qui ſont auſſi les plans des réſiſtances.

191. *Maniere de déterminer par le calcul les réſiſtances des appuis dans le treuil, & leurs directions.*

On peut déterminer par le calcul les réſiſtances des appuis dans le treuil, & leurs directions. Ainſi 1°. dans le cas où les directions MP, NR ſont perpendiculaires à l'axe, il s'agit de trouver le lieu du point C auquel la puiſſance H eſt appliquée. Les longueurs des bras *f*M, FN auxquels les puiſſances P, R ſont appliquées, ſont connues de même que la partie *f*F de l'axe qui eſt entre deux, c'eſt pourquoi ſi on fait la proportion, la ſomme ou la difference des lignes *f*M, FN eſt à l'une d'elles, ainſi *f*F eſt à *f*C, ou FC, on connoîtra par là cette diſtance, & par conſéquent celle qu'il y a du point C à chaque appui ; la diſtance du point *f* aux mêmes appuis, eſt auſſi connue, la puiſſance R & l'effort ſuivant MQ ſont connus ; donc la force ou réſiſtance ſuivant CH ſera auſſi connue, & par la proportion énoncée au nombre 5 de l'art. 188, on aura les côtez OI, SD, ou LV, EB des rectangles IL, ED : on aura pareillement les côtez OL, SE ; ainſi dans les triangles rectangles OLV, SEB, on connoîtra deux côtez & les angles compris qui ſont droits ; donc les diagonales SB, OV qui expriment les réſiſtances, ſeront connues, les angles LOV, ESB ſeront auſſi connus, & par conſequent les directions des mêmes réſiſtances ou les angles qu'elles ſont avec le plan par l'axe, car pour ce qui eſt des angles qu'elles ſont avec l'axe, il eſt viſible qu'ils ſont droits. 2°. Si l'une des pa- Fig. 37. 38.
directions, par exemple MP, eſt oblique à l'axe, les lignes M*f*, Fig. 39.
NF qui ſont les communes ſections du plan par l'axe, & des plans ralleles qui portent les directions MP, NR, ſont auſſi obliques, & il peut arriver que les points *f*, F, ſoient à une fort grande diſtance des appuis, & qu'on ne puiſſe pas meſurer actuellement l'intervalle *f*F qui eſt entre les communes ſections M*f*, NF ; pour lors

il faut former les triangles rectangles CM l, fM l dans leſquels on connoît le côté lM qui eſt la diſtance de la direction MQ à l'axe, l'angle droit l, & les angles lMC, lMf que l'on peut obſerver; donc on pourra trouver lC & lf; d'ailleurs on peut meſurer bO; donc les parties CO & fO ſeront connues, par là on aura le point d'application C de la puiſſance H qui fait équilibre avec les puiſſances R, Q. Il faut enſuite trouver le point de concours m des directions des réſiſtances ſuivant Om, Sm. Les triangles ſemblables omf, lMf donnent lf. of:: lM. om. Ce quatriéme terme étant connu, on aura deux triangles rectangles Ofm, O S m dans leſquels on connoît deux côtez & l'angle droit O; donc l'angle S & les angles en m ſeront connus, comme auſſi les angles du triangle pmg ou qmg, le côté gm qui exprime l'effort ſuivant fMG eſt auſſi connu; donc on determinera les côtez pm, qm qui expriment les preſſions que la force ſuivant fMG cauſe ſur les appuis. On achevera le reſte comme dans le nombre précedent. 3°. Si la direction NR eſt oblique à l'axe, la direction MQ ſera auſſi oblique, de même que la direction CH; or on trouvera (comme pour la force ſuivant MG,) les efforts que la puiſſance H fait ſur les appuis, les diagonales OV, SB, enſemble les angles qu'elles font avec l'axe & le plan par l'axe.

192. S'il y avoit plus de trois puiſſances qui fiſſent équilibre ſur le treuil pour trouver les réſiſtances des appuis, il faudroit décompoſer chacune d'elles en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan par l'axe, & l'autre dirigé ſuivant le même plan comme on a fait pour la puiſſance P, enſuite réduire tous les efforts perpendiculaires à deux ou même à un ſeul, en ſe ſervant de la propriété des momens, & tous les efforts dirigez ſuivant le plan par l'axe auſſi en un ſeul en employant le principe des forces compoſées; & on trouveroit enſuite les réſiſtances des appuis comme pour le cas de deux puiſſances en équilibre.

193. D'où l'on voit que ſi grand que puiſſe être le nombre de puiſſances qui tirent un corps, & de quelque maniere quelles ſoient dirigées; elles peuvent être retenues en équilibre par deux réſiſtances; car ſi lon conçoit un plan qui coupe le corps, on peut ſuppoſer qu'il rencontre toutes les directions quand ce ne ſeroit qu'à une diſtance infinie; chaque force pourra donc être décompoſée en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan, & l'autre dirigé ſuivant le plan, l'on conçoit que l'on peut tirer ſur ce plan une ligne qui ſoit ſituée à l'égard des directions perpendiculaires, de maniere que les efforts que l'on y ſuppoſe placez, ſoient en équilibre ſur le plan conſideré comme mobile autour de cette ligne, &

ſoutenu ſur deux appuis : à l'égard des efforts dirigez ſuivant le plan, il n'y a aucun doute qu'ils ne puiſſent être retenus en équilibre ſur une ligne inflexible à laquelle ils ſont appliquez, & qui a deux appuis ; donc tant de puiſſances que l'on voudra ſuppoſer, étant appliquées à un corps, de quelque maniere que ce ſoit, peuvent être retenues en équilibre par deux réſiſtances ou par deux puiſſances.

194. Les réſiſtances qu'on vient de trouver ne ſont pas les ſeules qu'on puiſſe oppoſer aux puiſſances P, R pour les tenir en équilibre ſur le treuil ; mais elles ſont les ſeules vraies & naturelles, c'eſt-à-dire, celles que les puiſſances P, R font naître lorſqu'elles preſſent les appuis : pour ſentir la vérité de cette propoſition, ſuppoſons que la force ſuivant MG, ſoit perpendiculaire à l'axe, il eſt certain qu'on peut lui oppoſer aux points O, S, une infinité de paires de puiſſances qui lui réſiſteront, & elles ſeront toutes dans le même plan ; c'eſt-à-dire ; dans le plan par l'axe qui eſt auſſi celui de la direction MG : or toutes ces puiſſances ſeront dirigées obliquement à l'axe, excepté deux, elles pourront donc être décompoſées chacune en deux efforts, dont l'un ſera perpendiculaire à l'axe de même que la direction MG, & l'autre ſera dirigé ſuivant l'axe même ; il eſt évident qu'il n'y a que les efforts perpendiculaires à l'axe qui réſiſtent à la force ſuivant MG, & que les efforts qui ſont dirigés ſuivant l'axe tendent à le mouvoir ſuivant ſa longueur, & parce qu'on ſuppoſe que tout eſt en repos ou en équilibre, il eſt néceſſaire que les efforts dirigez ſuivant la longueur de l'axe, ſoient égaux entr'eux & en ſens contraires, autrement l'axe ſeroit mû ſuivant ſa longueur. On voit donc que toutes ces puiſſances qui peuvent réſiſter à la force ſuivant MG, ne different entr'elles deux à deux ; que par les efforts plus ou moins grands, par leſquels elles tendent à mouvoir l'axe en ſens contraires ſuivant ſa longueur, du reſte les efforts perpendiculaires par leſquels elles réſiſtent à la force ſuivant MG, ſont tous égaux entr'eux, en ſorte que ceux qui ſont produits par une paire de puiſſances, ne ſont ni plus ni moins grands que ceux qui ſont produits par une paire differente de celle là. Cela poſé, qui ne voit que ce n'eſt pas la force ſuivant MG, qui fait naître toutes ces differentes paires de puiſſances, il eſt vrai qu'elle peut réſiſter à chaque paire qu'on lui oppoſera ; mais ce n'eſt pas elle qui les produit, puiſque pour agir contr'elles il faut qu'elles exiſtent en même-tems, comme on a déja obſervé dans les réflexions qui précedent ; mais lorſque la force MG preſſe les appuis O, S, on conçoit que c'eſt elle qui fait naître les réſiſtances qu'ils font, car la ſimple réſiſtance ſans action

eſt poſterieure à la preſſion : or il eſt bien certain que la force MG ne preſſe les appuis que dans un ſens, & qu'ils ne réſiſtent auſſi que dans un ſens ; il eſt viſible que lorſque la direction de cette force eſt perpendiculaire à l'axe, elle ne tend pas à mouvoir cette ligne en des ſens oppoſez ſuivant ſa longueur, comme cela ſeroit ſi les réſiſtances des appuis étoient obliques au même axe, car les appuis ne réſiſtent que dans le ſens qu'ils ſont preſſez. Puis donc que la force MG ne fait que preſſer les appuis ſuivant une direction perpendiculaire à l'axe lorſque ſa direction propre eſt auſſi perpendiculaire, & que ſi la même direction eſt oblique, elle preſſe les appuis, & tend auſſi à mouvoir l'axe ſuivant ſa longueur, il s'enſuit que les réſiſtances que l'on a trouvées, leſquelles ſont directement oppoſées à ces preſſions & au mouvement par lequel l'axe gliſſe ou tend à gliſſer, ſont les ſeules vraies & naturelles, c'eſt-à-dire, celles que les puiſſances qui ſont en équilibre ſur le treuil, font naître en preſſant les appuis.

195. On remarquera que toutes les réſiſtances que l'on peut oppoſer aux puiſſances P, R ont leurs directions en un même plan, car on vient de voir que toutes ces réſiſtances ou puiſſances ſe décompoſent en deux efforts, dont l'un eſt perpendiculaire à l'axe, & l'autre ſuivant la longueur de cette ligne, & que chaque paire ne differe d'une autre paire, qu'en ce que les efforts produits ſuivant la longueur de l'axe, ſont plus ou moins grands dans un cas qu'ils ne le ſont dans un autre cas, les efforts perpendiculaires produits par toutes ces differentes paires de puiſſances, étant préciſément les mêmes, ils ſeront pour chaque changement ou ſubſtitution qu'on fera d'une nouvelle paire de réſiſtances dans le même plan, les efforts qui ſont dirigez ſuivant l'axe, ſont auſſi dans le même plan, quoiqu'ils different entr'eux, puiſqu'ils ſont tous dans le plan par l'axe, les efforts ſimples ſeront donc pour tous les cas poſſibles dans le même plan ; donc les réſiſtances qui en réſultent ſeront auſſi toutes dans le même plan. Ainſi lorſqu'on aura les plans des deux réſiſtances en particulier, on aura auſſi ceux de toutes les autres qu'on pourra oppoſer aux puiſſances en équilibre ſur le treuil.

Fig. 37. 38. 196 Par le moyen des quantitez qu'on a déterminées dans les trois cas qui précedent, & par leſquelles on a trouvé les réſiſtances des appuis, on peut former des rapports qui expriment ou qui ſoient égaux aux rapports qui ſont entre ces mêmes réſiſtances, & les puiſſances P, R ou celles qui en dérivent. Ainſi dans le cas où les deux directions MP, NR ſont perpendiculaires à l'axe, la réſiſtance de l'appui O eſt à la puiſſance R, comme le produit de *f*F par CO & par le ſinus de l'angle IOL eſt au produit de *f*C par

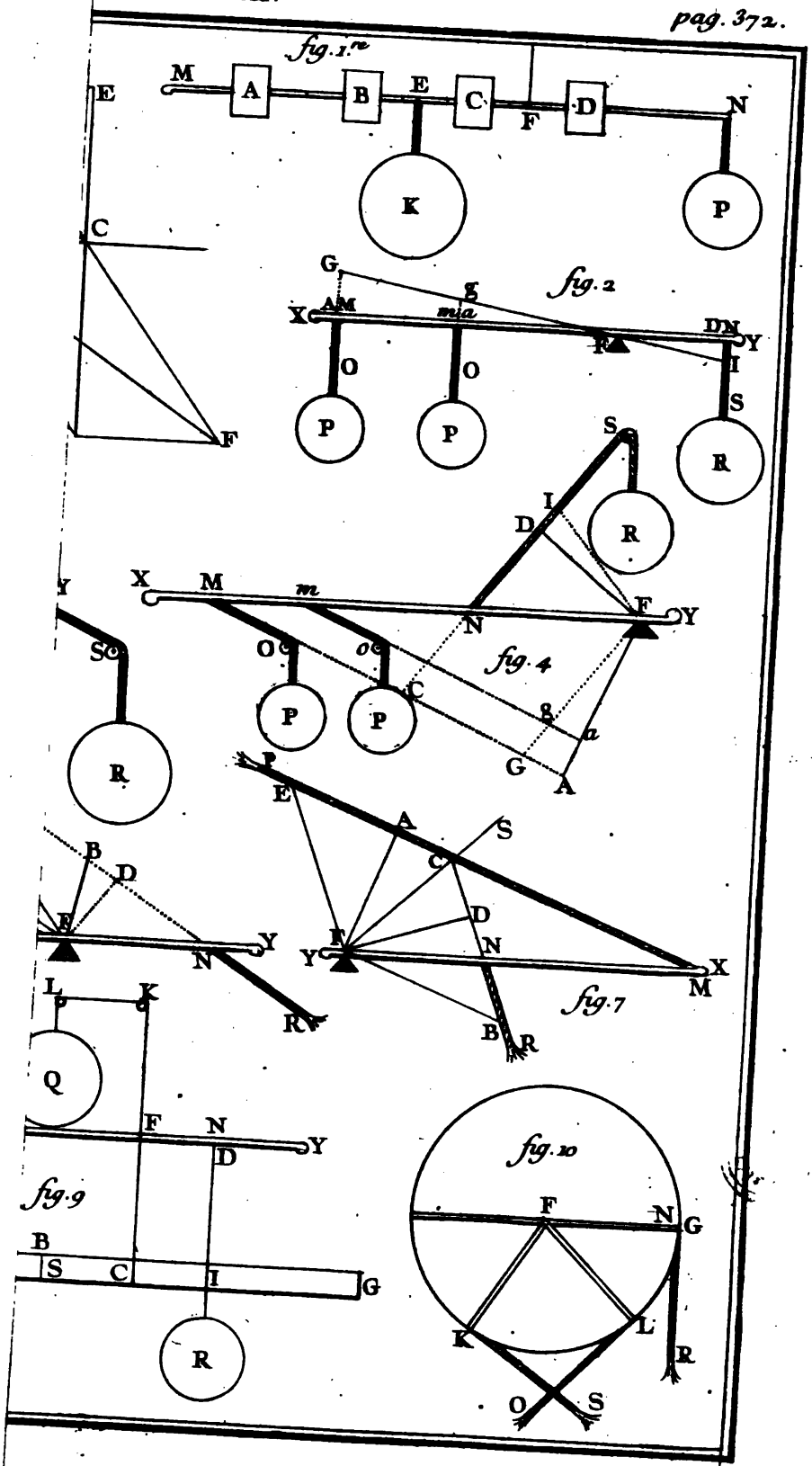


fig. 1re
M
A
B
E
C
F
D
N
E
K
P
C
F
G
fig. 2
X
AM
mia
DN
Y
O
O
P
P
I
S
R
S
R
I
D
X
M
m
F
Y
N
fig. 4
O
O
P
P
C
a
G
A
R
E
A
S
B
D
C
D
E
Y
N
R
Y
N
X
M
fig. 7
B
R
L
K
Q
F
N
Y
D
fig. 9
B
S
C
I
G
R
fig. 10
F
N
G
K
L
R
O
S

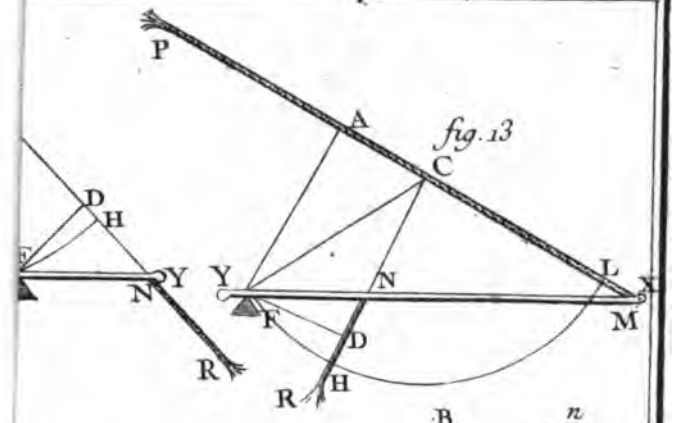


fig. 13

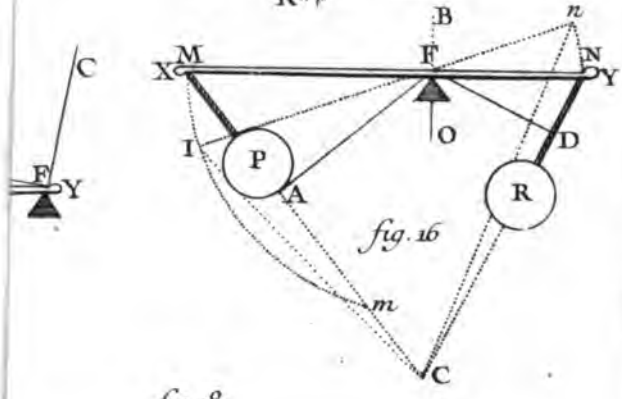


fig. 16

fig. 18

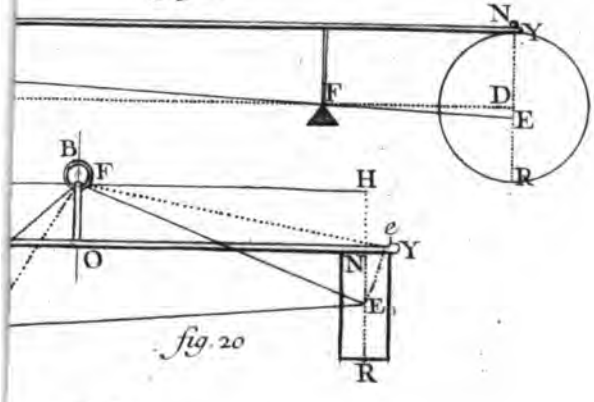


fig. 20

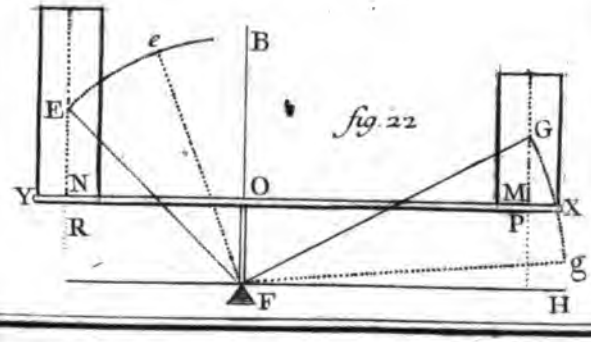


fig. 22

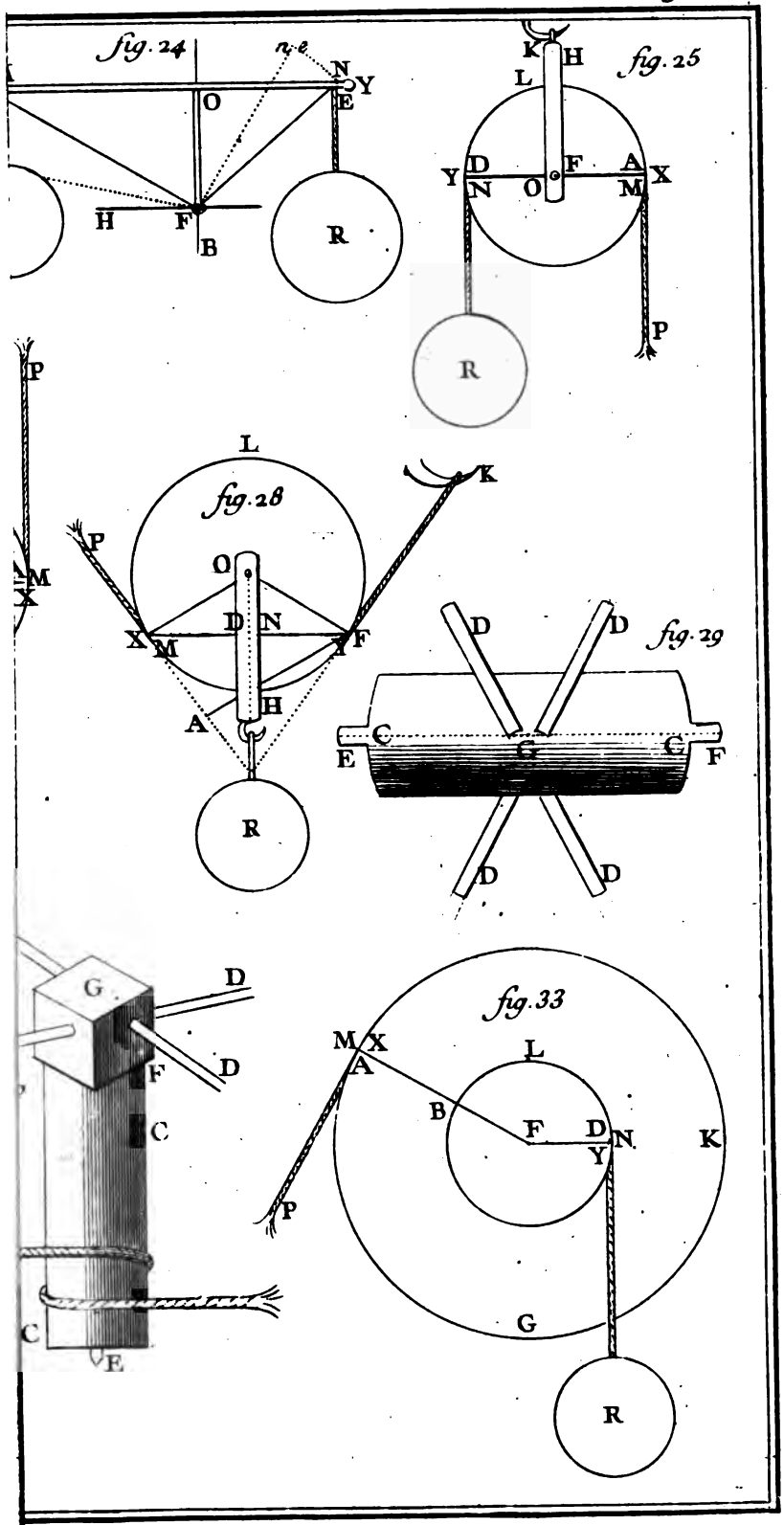
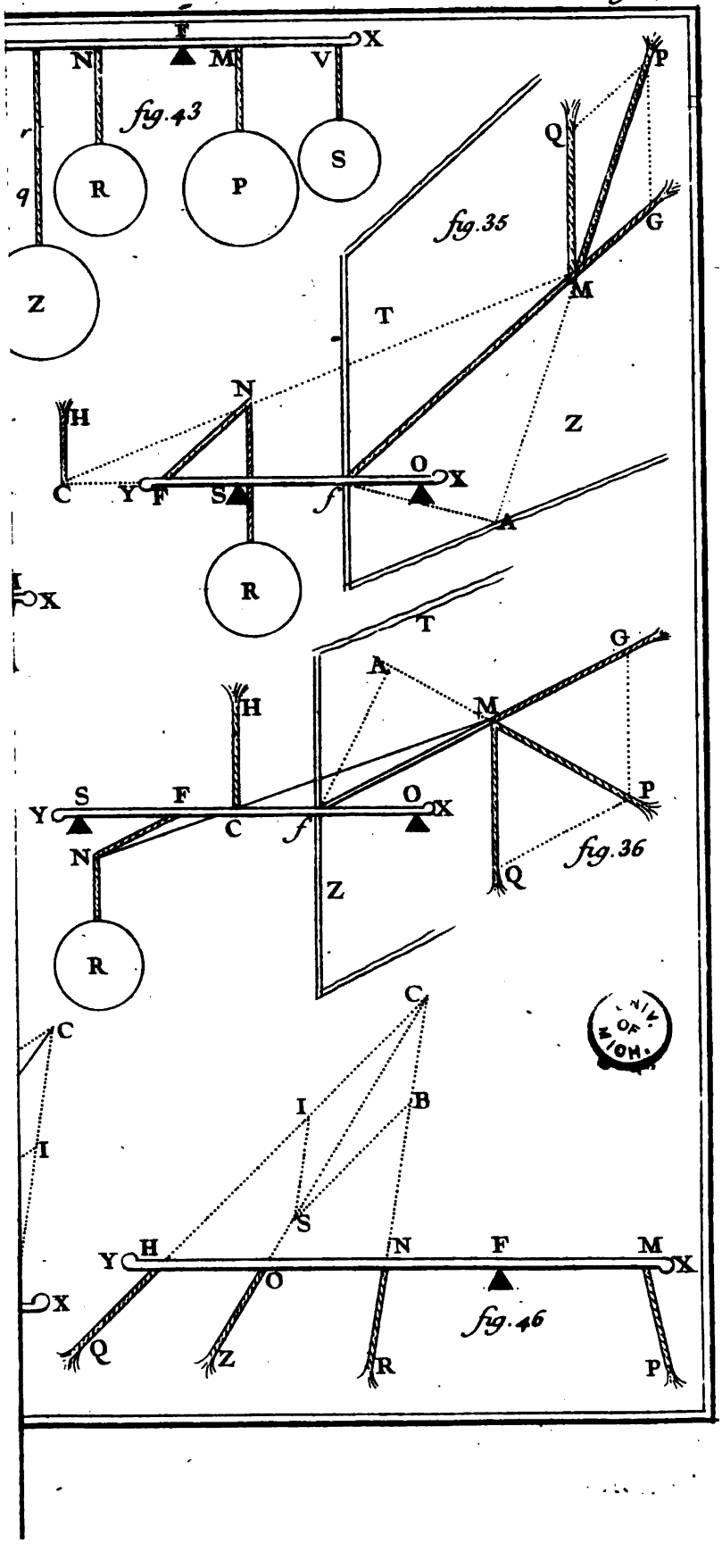


fig. 24
n e
N
Y
O
E
H
F
B
R
fig. 25
K
H
L
Y
D
F
A
X
N
O
M
P
R
P
L
fig. 28
K
P
O
M
X
D
N
X
M
F
H
A
R
fig. 29
D
D
C
G
E
F
D
D
G
D
F
D
C
C
E
fig. 33
M
X
A
L
B
F
D
N
K
Y
P
G
R


F
X
N
M
V
fig. 43
R
P
S
q
Z
fig. 35
Q
P
G
M
T
N
H
Z
O
X
C
Y
F
S
f
A
R
X
T
G
A
H
M
S
F
O
X
P
Y
C
f
N
Z
Q
fig. 36
R
C
C
I
B
I
S
Y
H
N
F
M
X
O
X
Q
Z
R
P
fig. 46

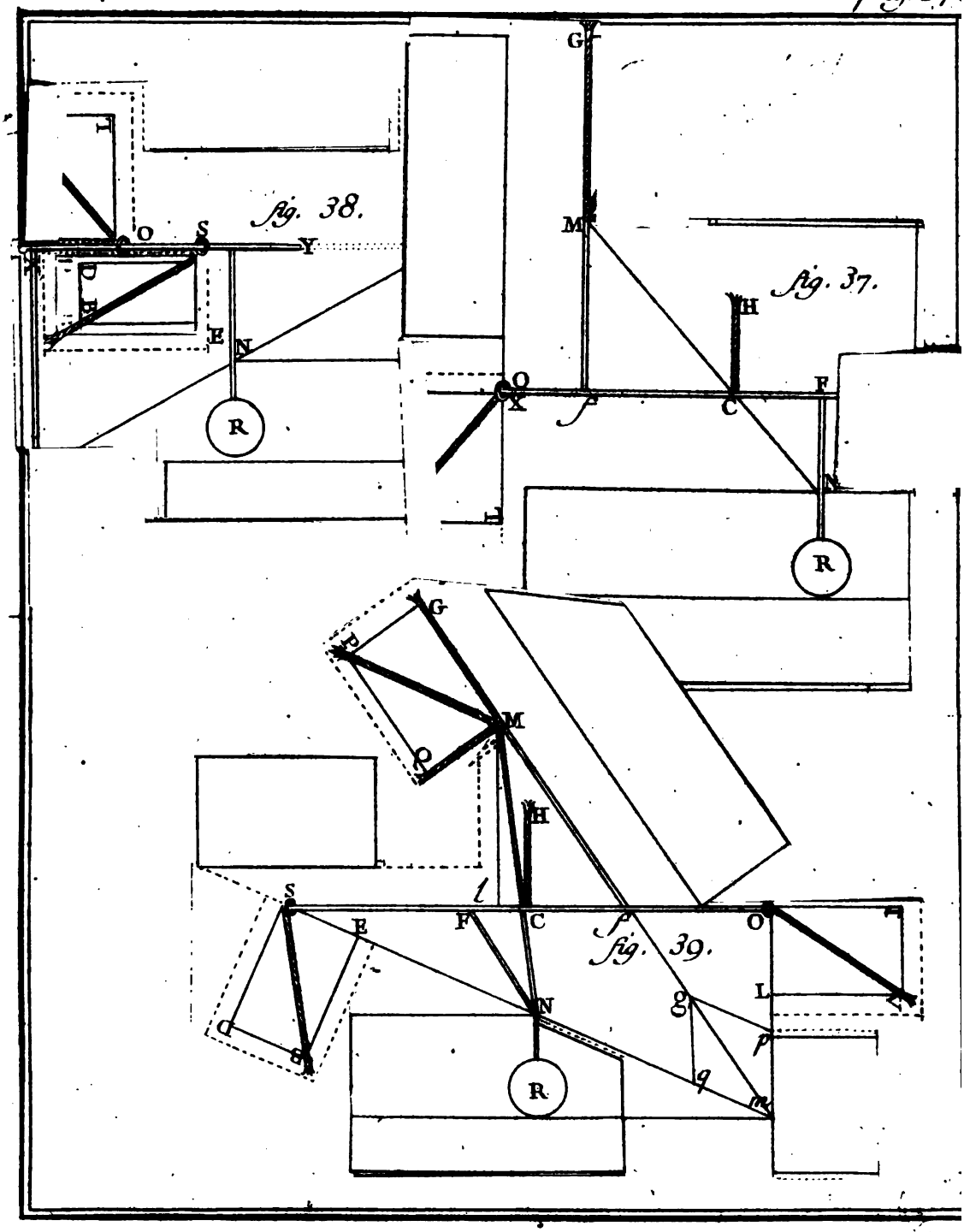


fig. 38.
fig. 37.
fig. 39.
G
M
H
O
S
Y
E
N
R
F
C
L
P
Q
l
g
p
q
m

OS, & par le ſinus de l'angle LOV. En ſorte que ſi on nomme O la réſiſtance de l'appui O de même nom, r la réſiſtance ſuivant OI, $\int$LOV le ſinus de l'angle LOV, $\int$IOL le ſinus de l'angle IOL, on aura O.R :: fF×CS×$\int$IOL . fC×OS×$\int$LOV ; car la puiſſance R eſt à la puiſſance H, comme CM eſt à MN, ou comme fC eſt à fF. La puiſſance H eſt à la réſiſtance ſuivant OI comme OS eſt à CS, la réſiſtance r, eſt à la réſiſtance ſuivant OV comme OI ou LV eſt à OV, ou comme le ſinus de l'angle LOV eſt au ſinus de l'angle OLV ou de ſon ſuplément IOL. Voici ces proportions de ſuite. Si on multiplie par ordre les termes de ces proportions, & que l'on diviſe les deux premiers termes par H×r : on aura la quatriéme ou la cinquiéme de ces proportions. On trouvera de la même maniere le rapport de la réſiſtance de l'appui S au poids R. On déterminera auſſi le rapport de ces réſiſtances à la puiſſance P, & cela nonſeulement dans le cas où les directions des puiſſances P, R ſont perpendiculaires à l'axe ; mais auſſi lorſqu'elles lui ſont obliques. Il y auroit encore bien des réflexions à faire ſur la pratique ou l'uſage du tour ou treuil par rapport aux appuis, mais la crainte d'être trop long fait qu'on les paſſe. Peut-être ſe préſenteront-elles une autre fois lorſqu'on aura à parler de nouveau de cette machine.

R . H :: fC . fF.
H . r :: OS . CS.
r . O :: $\int$LOV . $\int$IOL.

R . O :: fC×OS×$\int$LOV . fF×CS×$\int$IOL
ou O . R :: fF×CS×$\int$IOL . fG×OS×$\int$LOV

CHAPITRE SECOND.

DU PLAN INCLINÉ, DE LA VIS, DU COIN, & des poids ſoutenus avec des cordes.

ON a rémarqué dans le premier Chapitre de ce Livre que la poulie & le treuil étoient des eſpeces de levier, & qu'on pouvoit les conſiderer ſous cette idée commune ; on fera ici une réflexion ſemblable à l'égard des machines qu'on ſe propoſe d'expliquer dans ce Chapitre, c'eſt-à-dire, qu'elles peuvent être raportées au plan incliné ; il eſt viſible que la vis & le coin ſont des eſpeces de plan incliné, leur figure le montre aſſez ; pour ce qui eſt des poids ſoutenus avec des cordes ou de la machine funiculaire, elle peut être auſſi ramenée au plan incliné : car que fait

une corde qui ſoutient un poids, ſinon ce que feroit un plan, puiſque le poids la tire avec la même force & de la même maniere que s'il preſſoit un plan comme on aura occaſion de l'obſerver plus particulierement l'orſqu'on traitera de cette machine. Ainſi toutes les machines que l'on nomme ſimples, peuvent être réduites à deux claſſes, au levier & au plan incliné, & en cela on ne fait que ſuivre la route qu'ont tenue & que tiennent encore pluſieurs grands Géometres.

Du plan incliné.

Comme la théorie du plan incliné eſt fondamentale, on s'appliquera d'une maniere particuliere à en démontrer avec ſoin les proprietez, conformément à la méthode qu'on a ſuivie pour le levier, c'eſt-à-dire, qu'on appliquera à cette machine les principes dont on a fait uſage lors qu'on a traité du levier; & on en donnera trois démonſtrations qui ſeront indépendantes les unes des autres; la premiere ſera fondée ſur le mouvement ſuivant le principe de M. Deſcartes; la ſeconde ſera tirée des mouvemens ou des forces compoſées; dans la troiſiéme on ſuivra la méthode des anciens, qui conſiſte à rapporter toutes les machines au lévier, par ce moyen on aura traité la ſtatique ſuivant trois principes differens, & l'on pourra en ſuivre un d'un bout à l'autre, ſans qu'on ſoit obligé lorſqu'une fois on l'aura pris pour guide, de l'abandonner pour en prendre un autre; car l'un des trois principes peut s'appliquer à toutes les machines. On a parlé du plan incliné dans le ſecond Livre, & on l'a conſideré comme une ſurface où les corps peſans ne peuvent ſe ſoutenir ſans le ſecours de quelque obſtacle ou puiſſance qui arrête l'effort de la peſanteur: ici on regardera le plan incliné comme un inſtrument ou organe qui ſoulage la puiſſance en tant qu'il ſoutient une partie du poids ou fardeau auquel cette puiſſance s'applique.

197. On ne s'arrête pas à faire ici une nouvelle deſcription du plan incliné, ni à remarquer que les corps peſans y ſont ſollicitez de deſcendre: on peut voir ce qui en a été dit au commencement du quatriéme chapitre du ſecond Livre, art. 158, & ſuivans.

198. *Dans tous les corps il y a un centre de gravité où toute la peſanteur eſt comme réunie*, ce qui ſignifie que ce centre étant ſoutenu, la peſanteur du corps l'eſt auſſi; en ſorte que toutes les parties ſont en équilibre autour de ce point, à moins que quelque nouvelle force ne trouble leur repos.

199. *Lorſqu'un corps eſt ſur un plan incliné, il le touche par une*

partie de ſa ſurface, dans les corps dont la ſuperficie eſt courbe, comme la ſphere, cette partie n'eſt que comme un point dans les autres corps, cette ſurface eſt une figure plane, on peut l'appeller *baſe* du corps, ſoit qu'elle ſoit grande ou petite, parce qu'elle lui ſert d'appui, & qu'elle ſoutient ſa peſanteur en tout ou en partie.

200. *Lorſqu'une puiſſance tient un poids en équilibre ſur un plan incliné, leurs directions & celle de la réſiſtance doivent concourir en un même point, & être toutes trois couchées ſur un même plan, ſans quoi l'équilibre ſeroit impoſſible.* On en a donné la preuve aux art. 188, 194 du premier Livre, il eſt vrai qu'on a ſuppoſé que les puiſſances étoient appliquées à un levier ; mais ſi on fait attention que des puiſſances qui ſont appliqués à un corps, agiſſent de même que ſi elles tiroient un levier comme on verra bien-tôt, il n'y a aucun doute que les raiſonnemens qu'on a faits aux endroits qu'on vient de citer, ne conviennent au cas préſent.

201. Lors qu'on ne conſidere dans le levier que la réſiſtance réciproque de la puiſſance & du poids, & que dans leur équilibre on ne fait point entrer celle de l'appui, on ſuppoſe tacitement que le point ſur lequel le levier eſt poſé, peut réſiſter également en tout ſens, & qu'il ne doit pas ceder à l'effort de la preſſion de quelque côté qu'elle vienne : cette ſuppoſition eſt très poſſible lorſque le point d'appui eſt iſolé, & qu'il n'eſt pas attaché à une ſurface : or dans le plan incliné il y a un appui de même que dans le levier, *mais parce que cet appui eſt ſur une ſurface, il ne peut réſiſter que dans un ſens* : car comme il ne peut être preſſé que ſuivant la perpendiculaire à la ſurface où il eſt, il ne peut auſſi réſiſter que ſuivant la méme perpendiculaire, la direction de la force qui preſſe peut bien être oblique au plan, mais la preſſion qu'elle exerce eſt dirigée ſuivant la perpendiculaire au même plan, ainſi qu'on va voir : c'eſt pourquoi pour l'équilibre ſur le plan incliné, il ne ſuffit pas de déterminer le rapport de la puiſſance au poids comme dans le levier, il faut de plus fixer la direction de la réſiſtance. C'eſt ce qu'on fera dans l'article ſuivant.

202. Un corps qui eſt poſé ſur un plan incliné, & qui n'eſt point retenu deſcend, quand même la direction du centre de gravité, rencontreroit la baſe du corps, par la ſeule raiſon que la direction de la peſanteur eſt oblique au plan. *D'où il ſuit qu'un plan ne réſiſte que ſuivant la perpendiculaire* : dès-là que la direction de la force devient inclinée, le mouvement eſt inévitable, parce que le plan ne réſiſte qu'en partie à la force qui le preſſe, (on fait ab-

ſtraction de tout frottement.) L'ors donc qu'une puiſſance tient en équilibre un corps ſur un plan incliné, la preſſion qui réſulte de leur action conjointe, eſt néceſſairement perpendiculaire au plan, car ſi elle étoit dérigée ſuivant une ligne oblique, le corps ſeroit mû par cet effort de la même maniere que la peſanteur le fait deſcendre lorſqu'il n'eſt point retenu ſur le plan incliné.

203. *Lorſqu'un corps eſt en équilibre ſur un plan incliné, non-ſeulement la preſſion ou la charge que le plan ſupporte, doit être dirigée ſuivant la perpendiculaire, mais elle doit encore rencontrer la baſe du corps.* Car ſi la direction de la charge ne rencontre pas cette baſe, il eſt néceſſaire que le corps qui eſt pouſſé par cet effort, & qui n'eſt point appuyé, ſoit renverſé.

204. *Si un corps de figure ſphérique eſt tenu en équilibre ſur un plan incliné, la preſſion ou charge du plan eſt dirigée ſuivant une ligne qui paſſe par le centre.* Car la direction de cette chargé eſt perpendiculaire au plan incliné, elle doit de plus rencontrer la baſe du corps, ou le point d'attouchement; or on ſçait qu'une telle ligne paſſe par le centre, la direction de la charge du plan, paſſe donc par le centre de la ſphere.

205. *Lorſqu'une puiſſance tient en équilibre un corps de figure ſphérique ſur un plan incliné, ſa direction paſſe par le centre de la ſphere.* Car la direction de la peſanteur ou du centre de gravité y paſſe, d'ailleurs la direction de la charge ou de la réſiſtance que le plan fait à cet effort, y paſſe auſſi; donc celle de la puiſſance paſſe de même par le centre: car les directions de la puiſſance du poids, & de la réſiſtance, doivent concourir en un même point.

206. *Lorſqu'un corps qui eſt terminé par des ſurfaces planes, eſt tenu en équilibre ſur un plan incliné, & qu'il s'applique contre le plan par une de ces ſurfaces qu'on ſuppoſe d'une gradeur déterminée, il n'eſt pas néceſſaire que la direction de la puiſſance, paſſe par le centre de gravité comme pour la ſphere.* Car pour l'équilibre il ſuffit que les trois directions conçourent en un point, que celle de la réſiſtance ſoit perpendiculaire au plan incliné, & qu'elle rencontre la baſe du corps: or comme cette baſe eſt ſuppoſée d'une certaine étendue, il eſt viſible qu'on peut y élever pluſieurs perpendiculaires qui rencontreront la direction du centre de gravité en differens points, & la direction de la puiſſance dans le d'quilibre, pourra paſſer par ces differens points de concours.

207. *Si on fait abſtraction des frottemens, tous les corps qui ſont également peſants ont la même facilité à deſcendre par un plan incliné, ſoit en roulant, ſoit en gliſſant, quelles que ſoient leurs figures.*

C'eſt

C'eſt pourquoi il faut employer la même force pour les tenir en équilibre ſur le même plan, pourvû que la puiſſance tire ſuivant la même direction, ou ſuivant des directions qui faſſent les mêmes angles avec celle de la peſanteur.

208. Un corps qui eſt ſur un plan incliné, peut être de figure à rouler comme une ſphere, ou à gliſſer comme un cube, ou bien à être renverſé, par exemple, une pyramide qui ſeroit appuyée ſur le plan par ſon ſommet.

209. *Lorſqu'un poids tel que* R *eſt en équilibre ſur le plan incliné* SH, *l'effort qu'il fait contre la puiſſance* P *qui tire ſuivant la direction* CM, *eſt le même que ſi toute la peſanteur étoit comme ramaſſée au centre de gravité* C, *& qu'il ne reſtât de la maſſe que la ligne inflexible* CF, *ſuivant laquelle la charge ou preſſion du plan eſt dirigée.* Car puiſque l'effort ſuivant CN qui eſt la direction du poids R eſt ſuppoſé toujours le même, la puiſſance P doit trouver la même réſiſtance. Fig. 47. 48. 49. 50.

210. Ces réflexions préliminaires ont lieu dans les trois démonſtrations qu'on va donner du plan incliné, & leur ſont communes; on les ſuppoſera donc dans chacune en particulier.

Préparation pour la premiere Demonstration du plan incliné.

211. 1°. Lorſque le poids R eſt tenu en équilibre ſur le plan incliné SH, on peut concevoir que la perpendiculaire CF ſuivant laquelle la preſſion ou charge du plan eſt dirigée, tourne un inſtant ſur le point d'attouchement F ſans le quitter, en décrivant par ſon extrêmité C où eſt le centre de gravité, l'arc très-petit ou comme infiniment petit CL; FD perpendiculaire à la direction CN de la peſanteur, décrira en même-tems le petit arc DI, ſemblable à l'arc CL. Cela poſé, ſi du point L on tire LE perpendiculaire à la direction CN, CE ſera égale à DI: car ſi on conſidere les lignes CF, DF dans leur mouvement autour du point F comme faiſant entr'elles toujours le même angle, il eſt néceſſaire que les points C, D décrivent dans le ſens de la direction CN de la peſanteur les eſpaces égaux CE, DI. Fig. 47.

212. 2°. Il eſt évident que tandis que le poids R ou ſon centre de gravité C parcourt l'eſpace CL ſuivant la longueur du plan incliné, il deſcend de la hauteur CE ou DI ſuivant ſa direction naturelle.

213. 3°. *Si le poids ou la puiſſance* P *tire ſucceſſivement contre le poids* R *ſuivant deux directions differentes* CM, Cm *les réſiſtances*

que le poids R *éprouve, c'eſt-à-dire, les réſiſtances relatives du poids* P *dans le cas de l'équilibre, ſont entr'elles comme les perpendiculaires* FA, Fa *menées du point d'attouchement* F *ſur les directions* CM, Cm.

Suppoſons que le centre de gravité C puiſſe par ſon effort parcourir dans un inſtant le petit arc CL, en ſorte que ce mouvement ſoit plutôt une tendence qu'un mouvement réel, il eſt néceſſaire que les perpendiculaires FA, F*a* décrivent en tems égaux les arcs ſemblables AG, Ag, & par conſéquent que le poids P en tirant ainſi ſuivant les directions CM, C*m* ſoit ſollicité à parcourir en tems égaux contre ſa propre direction, des eſpaces égaux aux arcs AG, Ag: or les réſiſtances relatives du poids P, ſont entr'elles comme les eſpaces qu'on tend à lui faire parcourir en tems égaux contre ſa propre direction; donc elles ſont entr'elles comme les arcs AG, Ag, ou bien comme les perpendiculaires FA, F*a*, qui ſont proportionnelles aux arcs AG, *ag*.

PREMIERE DEMONSTRATION DU PLAN INCLINÉ.

PROPOSITION QUINZIE'ME.

Fig. 47. 214. *Si les directions* CM, CN *de la puiſſauce* P *& du poids* R *concourent en un point* C; *que de ce point on mene* CF *perpendiculaire au plan incliné* SH, *laquelle rencontre la baſe du corps au point* F, *on ſuppoſe de plus qu'elle eſt dans le plan des directions: je dis que ſi la puiſſance* P *& le poids* R *ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires* FA, FD *menées du point* F *aux directions* CM, CN, *en ſorte que l'on ait* P . R :: FD . FA, *il y aura équilibre.*

DEMONSTRATION. On a remarqué qu'il pourroit ſe faire que les puiſſances P, R fuſſent dans le rapport néceſſaire pour faire équilibre, en ſuppoſant que le point F réſiſte également en tout ſens, & que cependant l'équilibre fût impoſſible en tant que ce point eſt ſur le plan incliné SH: cependant ſuppoſons pour un moment que le point F peut réſiſter en tout ſens, on démontrera enſuite que dans l'hypotheſe de la propoſition qu'il s'agit de prouver, ce point réſiſte dans le ſens convenable pour maintenir l'équilibre. Cela poſé, que le poids P tire d'abord ſuivant la direction C*m*, de maniere que la perpendiculaire F*a* ſoit égale à la perpendiculaire FD: je dis que ce poids contrepeſera dans le poids R une partie égale à ſa peſanteur propre; pour le prouver concevons que le poids R eſt égal au poids P lorſque ce dernier tire ſuivant C*m*, il eſt certain qu'il y aura équilibre, car le poids R ou ſon centre de gravité C ne peut tendre à ſe mou-

voir ſuivant ſa direction naturelle CN par l'eſpace DI qu'il ne ſollicite le poids P à parcourir en même-tems contre ſa propre direction, l'eſpace *ag* égal à l'eſpace DI, & qu'il n'éprouve par conſéquent une réſiſtance égale à l'effort qu'il fait ſuivant ſa direction, puiſqu'il y a égalité dans les maſſes, les peſanteurs & les eſpaces, l'un des poids ne pouvant ſe mouvoir ſuivant ſa direction naturelle qu'il ne contraigne l'autre poids de parcourir contre la ſienne le même eſpace ou un eſpace égal. Donc le poids R trouve dans le poids P une réſiſtance égale à l'effort qu'il fait ſuivant CN ; d'ailleurs comme la tendence que le poids R a à deſcendre le long du plan incliné, n'eſt que l'effet de l'effort ſuivant CN, il s'enſuit que cet effort étant empêché, il y auroit équilibre entre les poids P, R ſuppoſez égaux.

Je dis en ſecond lieu que ſi le poids P tire contre le poids R, ſuivant la direction CM, il contrepeſera par ſa réſiſtance relative le poids R tel qu'on l'a dabord ſuppoſé dans l'énoncé de la propoſition. Car les réſiſtances que le poids P oppoſe au poids R en tirant ſuivant les directions *cm*, CM, ſont entr'elles comme les perpendiculaires F*a* ou FD & FA ; donc les parties du poids R contrepeſées par le poids P lorſqu'il tire ſuivant C*m* & CM ſont dans la même raiſon, c'eſt-à-dire, ſelon l'hypotheſe dans la raiſon du poids P au poids R : or la partie contrepeſée par la réſiſtance ſuivant C*m*, eſt égale au poids P, comme il vient d'être prouvé ; donc la partie contrepeſée par la réſiſtance ſuivant CM, eſt égale au poids R. Donc ſi le poids P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des diſtances FA, FD, ils ſont en équilibre en ſuppoſant que le point F peut réſiſter en tout ſens ; mais il faut faire voir en troiſiéme lieu, que la charge du point F eſt dirigée ſuivant la perpendiculaire au plan incliné.. Dans l'équilibre entre les puiſſances P, R ſur le point F, la direction de la charge ou de la réſiſtance, paſſe par le point de concours C des directions CM, CN (*Liv.* I. 194.), elle paſſe auſſi par le point F, extrêmité de la perpendiculaire CF qui rencontre la baſe du corps, puiſque le mouvement que l'on a ſuppoſé au poids R, ſe fait autour du point F. Donc la charge du plan eſt dirigée ſuivant FC, & par conſéquent ſuivant la perpendiculaire au plan incliné SH ; donc ce plan réſiſte totalement à la charge ou preſſion cauſée par les puiſſances P, R ; d'ailleurs la direction de cette réſiſtance eſt dans le plan des directions CM, CN, puiſque la perpendiculaire CF eſt ſuivant l'hypotheſe dans ce plan ; donc les puiſſances P, R ſont en équilibre, non-ſeulement en tant qu'elles agiſſent l'une contre l'autre, mais encore avec la réſiſtance du plan incliné.

215. Remarque. Si le poids R touche le plan SH par plusieurs points, que de chacun d'eux on mene des perpendiculaires aux directions CM, CN, les puissances P, R seroient en équilibre successivement sur tous ces points, si elles étoient entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées, en supposant que chacun de ces points peut résister également en tout sens, & on peut prouver cet équilibre entre les puissances P, R de la même maniere qu'on vient de le prouver dans l'hypothese de la proposition présente; mais parce que de toutes les lignes menées du point de concours C à ces differens points, il n'y a que la ligne CF qui soit perpendiculaire au plan SH, dans tous ces cas la direction de la charge qui passe par le point de concours C, & par le point d'appui, c'est-à-dire, par le point de la base d'où l'on suppose que les perpendiculaires aux directions sont menées, seroit oblique au plan incliné, & par conséquent l'équilibre seroit impossible, excepté dans le cas où les perpendiculaires aux directions sont menées de l'extrêmité F de la perpendiculaire CF. C'est là le cas qu'on vient de démontrer.

Seconde demonstration du plan incliné.

216. Cette seconde démonstration est fondée sur les forces composées.

Fig. 48. *Si la puissance* P *tire contre le poids* R *posé sur le plan incliné* SH, *que du point* C *où l'on suppose que les directions* CM, CN *concourent, on puisse mener une ligne* CF *qui soit dans le plan des directions, & qui étant perpendiculaire au plan incliné, rencontre la base du poids au point* F; *je dis que si la puissance* P *& le poids* R *sont dans la raison réciproque des perpendiculaires* FA, FD *menées du point* F *aux directions* CM, CN, *en sorte que* P. R :: FD. FA, *il y aura équilibre.*

Demonstration. Du point F il faut mener FG, FI paralleles aux directions, par là on formera le parallelogramme GI qui aura pour diagonale CF perpendiculaire au plan SH, & les deux triangles AGF, DIF qui sont semblables, les angles A, D sont droits, & les angles G, I sont égaux, parce qu'ils sont supplémens de l'angle GCI; donc l'on a DF. AF :: IF. GF; l'on a aussi par l'hypothese P. R :: DF. AF; donc P. R :: IF. GF, c'est-à-dire, que la puissance P & le poids R sont dans la raison des côtez IF, GF, ou des côtez CG, CI du parallelogramme GI formé sur les directions CM, CN; donc la puissance P & l'effort de la pesanteur étant immédiatement appliquez au point de concours C, tendent à lui faire décrire la diagonale CF (*Liv.* 1. 156.), laquelle par l'hypo-

theſe eſt perpendiculaire au plan SH ; ce plan qui réſiſte ſuivant la perpendiculaire FC, s'oppoſe totalement au mouvement du point C, & l'arrête tout court, la réſiſtance du plan SH eſt donc en équilibre avec l'effort moyen que la puiſſance P & la peſanteur produiſent conjointement ſur le point C pour le mouvoir ſuivant CF : or il eſt évident que le point C étant en repos, les puiſſances P, R qui tendent chacune à le mouvoir ſuivant ſa direction, ſeront en équilibre; mais parce que dans le cas d'équilibre la puiſſance P agit également à tous les points de ſa direction, il s'enſuit que ſi au lieu de tirer immédiatement le point C comme on vient de ſuppoſer, elle tire ſuivant la même direction à quelque autre point M, l'équilibre continuera de même ; donc ſi la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires FA, FD, il y a équilibre.

217. La remarque qu'on a faite à la fin de la premiere demonſtration a auſſi lieu dans cette ſeconde maniere de démontrer l'équilibre ſur le plan incliné.

Troisiéme demonstration du plan incliné.

218. *Si la puiſſance* P *tire contre le poids* R *poſé ſur le plan incliné* SH, *que du point* C *où l'on ſuppoſe que les directions* CM, CN *concourent, on mene* CF *perpendiculaire au plan* SH, *laquelle rencontre la baſe du poids au point* F, *& ſoit auſſi dans le plan des directions* CM, CN; *je dis que ſi la puiſſance* P *& le poids* R *ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires menées du point* F *aux directions, il y aura équilibre.* Fig. 47. 48.

Demonstration. On peut concevoir & ſuppoſer que toute la peſanteur du poids R eſt comme réunie au centre de gravité C, en ſorte que de la maſſe C il ne reſte que la ligne inflexible CF ſans peſanteur, & le point C qu'on ſuppoſe peſer autant que tout le poids R, & qui eſt tiré ſuivant la direction CN avec un effort égal à la peſanteur de ce poids. Cela étant, on pourra conſiderer la ligne CF comme un levier qui eſt tiré au point C ſuivant les directions CM, CN, ce levier n'a qu'un bras, parce que les directions de la puiſſance & du poids le rencontrent au même point C, & l'appui eſt F, (il faut ſuppoſer pour un moment que ce point peut réſiſter également en tout ſens, on démontrera enſuite qu'il réſiſte dans le ſens convenable pour l'équilibre ſur le plan incliné.) Cela poſé, on ſçait que ſi deux puiſſances appliquées aux bras d'un levier, ſont dans la raiſon réciproque des diſtances ou des perpendiculaires menées de l'appui aux directions, elles ſont en

équilibre (41.) : or par l'hypotheſe, la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires FA, FD, de plus leurs directions CM, CN ſont dans un même plan, puiſqu'elles concourent au point C ; donc la puiſſance P & le poids R ſont en équilibre ſur le levier CF dont l'appui eſt en F, en ſuppoſant que ce point réſiſte également en tout ſens ; mais il faut démontrer que ce point réſiſte ſuivant la perpendiculaire CF, ce qui eſt évident ; car puiſque les puiſſances P, R ſont en équilibre entr'elles, que l'une ne l'emporte pas ſur l'autre, la direction de la charge & de la réſiſtance du plan paſſe par le point de concours C (*Liv.* 1. 194.), il eſt évident qu'elle paſſe auſſi par le point F, puiſque c'eſt le point F qui réſiſte ; donc la direction de la charge ou de la réſiſtance du plan SH, eſt perpendiculaire à ce plan, cette charge eſt donc totalement ſoutenue ; donc les puiſſances P, R ſont non-ſeulement en équilibre entr'elles, mais encore avec la réſiſtance du plan. Donc ſi la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires AF, DF ſuivant les conditions exprimées dans la propoſition, il y aura équilibre.

On peut faire encore ici la remarque de l'article (215).

219. Au lieu de conſiderer les puiſſances P, R comme appliquées au levier droit CF, on auroit pû ſuppoſer qu'elles ſont attachées aux points A, D du levier angulaire AFD, dont les bras ſont les perpendiculaires AF, DF, & que le bras DF eſt tiré ſuivant CDN avec un effort égal à la peſanteur du poids R, & on auroit prouvé comme on vient de faire, que ces puiſſances ſont en équilibre ſur le levier AFD.

On va démontrer la propoſition inverſe.

PROPOSITION SEZIE'ME.

220. *Si la puiſſance* P *& le poids* R *ſont en équilibre ſur le plan incliné* SH, *ils ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires menées du point d'attouchement* F *aux directions* CM, CN.

Fig. 47. 48. DEMONSTRATION. Puiſque les puiſſances P, R ſont ſuppoſées être en équilibre, 1°. leurs directions & celle de la réſiſtance du plan concourent en un même point, & ſont auſſi dans un même plan, (*Liv.* 1. 188. 194.) de plus il eſt néceſſaire que la direction de la réſiſtance ſoit perpendiculaire au plan SH, & qu'elle rencontre la baſe du corps au point d'attouchement F. Cela poſé, je dis que dans le cas d'équilibre les puiſſances P, R ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires FA, FD, en ſorte que P . R :: FD . FA. Car ſi on ſuppoſe que ces puiſſances ſont dans un rapport diffe-

rent plus petit ou plus grand que le rapport inverſe de FA à FD, on démontrera que l'équilibre eſt impoſſible : ſuppoſons que la raiſon de P à R eſt moindre que celle de DF à AF, il eſt certain par la propoſition précedente que ſi la raiſon de P à R étoit égale à celle de DF à AF, il y auroit équilibre ; mais puiſque ſelon l'hypotheſe, la raiſon de P à R eſt moindre que celle de DF à AF pour égaler la premiere de ces raiſons à la ſeconde, il faudroit augmenter la puiſſance P, d'où il ſuivroit que la puiſſance P étant en équilibre avec le poids R, ce même équilibre pourroit ſubſiſter quoiqu'on augmentât la puiſſance P, ce qui eſt contraire à la notion de l'équilibre ſuivant laquelle, ſi des puiſſances ſont retenues en repos par leur réſiſtance mutuelle, l'équilibre ceſſe auſſi-tôt que l'on augmente ou que l'on diminue l'une d'elles ſans rien changer aux autres (ſuppoſé qu'elles tirent ſuivant les mêmes directions). On démontrera de la même maniere que le rapport de la puiſſance P au poids R ne peut être plus grand que celui de DF à AF. Par conſéquent ſi la puiſſance P & le poids R ſont en équilibre ſur le plan incliné SH, ils ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires AF, DF menées du point d'attouchement F aux directions.

On peut démontrer la même propoſition d'une maniere directe par les forces compoſées. Fig. 48.

On ſuppoſe que les puiſſances P, R ſont en équilibre ſur le plan incliné SH ; donc les directions concourent en un point C auquel ces puiſſances étant immédiatement appliquées, tendent à faire décrire la diagonale d'un parallelogramme formé ſur les directions CM, CN, avec un effort exprimé par cette même diagonale, & auquel le plan incliné réſiſte (*Liv.* 1. 190. 156.) ; donc cet effort eſt pirigé ſuivant la perpendiculaire CF menée du point C au plan SH, où elle doit rencontrer la baſe du corps, les puiſſances P, R & la réſiſtance du plan ſont donc exprimées par les trois côtez d'un parallelogramme formé ſur les directions CM, CN, CF, c'eſt-à-dire, comme les côtez CG, CI, CF, & la puiſſance P en particulier eſt au poids R comme CG eſt à CI, ou comme IF eſt à GF. Cela poſé, ſi on mene du point F les lignes AF, DF perpendiculaires aux directions CM, CN, on aura deux triangles AGF, DIF qui ſont ſemblables, les angles A & D ſont droits, les angles G, I qui dans le parallelogramme GI ſont oppoſez, ſont égaux, puiſqu'ils ſont ſuppléments de l'angle GCI ; donc ces triangles ſont ſemblables ; donc IF . GF :: DF . AF : or on vient de prouver que P . R :: IF . GF ; donc P . R :: DF . AF ;

c'eſt-à-dire, que ſi les puiſſances P, R ſont en équilibre ſur le plan incliné SH, elles ſont dans la raiſon réciproque des diſtances ou perpendiculaires menées du point d'attouchement aux directions CM, CN.

Fig. 49. 221. COROLLAIRES. 1°. *Si la direction de la puiſſance* P *eſt parallèle au plan incliné, & que cette puiſſance ſoit au poids* R *comme la hauteur* OS *du plan eſt à la longueur* SH, *il y aura équilibre.* On ſuppoſe comme dans la propoſition, que les directions ſont en un même plan, qu'elles concourent en un point C, & que la ligne CF qui eſt perpendiculaire au plan incliné SH, rencontre la baſe du corps, & qu'elle eſt dans le plan des directions. Du point F il faut mener FA, FD perpendiculaires aux directions CM, CN, & parce que la direction CM eſt parallele au plan SH, CF qui eſt perpendiculaire à ce plan, elle eſt auſſi perpendiculaire à CM; par-conſéquent FA qui eſt perpendiculaire à CM, ne differe point de FC. D'ailleurs les triangles OHS, DCF ſont ſemblables, car le triangle DCF eſt ſemblable au triangle FCL, ils ſont rectangles, & ils ont l'angle FCL commun : or le triangle FCL eſt ſemblable au triangle OHS; ils ſont rectangles, & les angles alternes CLF, OSH ſont égaux; donc l'angle FCL eſt égal à l'angle OHS; d'où il ſuit que le triangle DCF eſt ſemblable au triangle OHS. Cela poſé, l'hypotheſe donne P. R :: OS. SH, & les triangles ſemblables OHS, DCF donnent auſſi la proportion FD. FC ou FA :: OS. SH; donc P. R :: FD. FC ou FA; c'eſt-à-dire, que la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires FA, FD menées du point F aux directions. Donc il y a équilibre.

222. 2°. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie. *Si la puiſſance* P *& le poids* R *ſont en équilibre ſur le plan incliné* SH, *& que la direction* CM *ſoit parallele à ce plan, la puiſſance* P *ſera au poids* R *comme la hauteur du plan eſt à la longueur.* Car dans l'hypotheſe de l'équilibre il faut que les directions concourent en un point C, que la ligne CF qui eſt tirée du point de concours perpendiculairement ſur SH, & ſuivant laquelle la charge ou preſſion du plan eſt dirigée, rencontre la baſe du corps, & qu'elle ſoit dans le plan des directions. Cela poſé, dans le cas d'équilibre, la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires FA ou FC & FD qui ſont les côtez du triangle rectangle DCF, lequel étant ſemblable au triangle OHS, on conclura que la puiſſance P eſt au poids R comme la hauteur OS eſt à la longueur SH du plan.

223.

223. 3°. *Si la puiſſance* P *tire contre le poids* R *ſuivant la direction* CM *parallele à la baſe du plan* SH, *il y aura équilibre, ſi cette puiſſance eſt au poids* R *comme la hauteur eſt à la baſe du plan incliné.* Fig. 50.

On ſuppoſe encore que les directions ſont en un même plan, qu'elles concourent au point C, & que la perpendiculaire CF menée du point de concours C ſur le plan SH, rencontre la baſe du corps, & qu'elle eſt dans le plan des directions. Puiſque CM eſt parallele à la baſe du plan SH, elle eſt perpendiculaire à la direction CN de la peſanteur; car CN eſt perpendiculaire à la baſe du plan; donc DF & CM qui ſont perpendiculaires à CN, ſont paralleles: FA & DC ou CN ſont auſſi perpendiculaires à CM; donc AFDC eſt un parallelogramme; donc FA=DC. Cela poſé, l'hypotheſe donne P. R :: OS. OH; & parce que les triangles OHS, DCF ſont ſemblables, l'on a encore OS. OH :: DF. DC ou FA. Donc P. R :: DF. DC ou FA, c'eſt-à-dire, que la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires menées du point F où FC rencontre la baſe du corps; donc il y a équilibre.

224. 4°. *Si la puiſſance* P *& le poids* R *ſont en équilibre ſur le plan incliné* SH, *& que la direction* CM *ſoit parallele à la baſe du plan, la puiſſance eſt au poids comme la hauteur eſt à la baſe.* Car dans l'hypotheſe de l'équilibre, il faut que les directions concourent, & que la charge ou preſſion ſupportée par le plan SH ſoit dirigée ſuivant la perpendiculaire CF menée du point de concours C ſur le plan, & que la même CF rencontre la baſe du corps, & ſoit auſſi dans le plan des directions. Cela étant ainſi, on prouvera que la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des perpendiculaires FA ou DC, & FD qui ſont les côtez du triangle DCF, lequel eſt ſemblable au triangle OHS, d'où l'on conclura que la puiſſance P eſt au poids R comme la hauteur OS eſt à la baſe OH.

225. Ces quatre Corollaires qui ne ſont que des cas particuliers des deux propoſitions générales qui précedent, pourroient être démontrez immédiatement & de la même maniere que les deux propoſitions dont on les a déduits en leur appliquant de point en point les mêmes raiſonnemens.

226. 5°. *Lorſqu'une puiſſance* P *tient en équilibre un poids* R *ſur un plan incliné ſuivant une direction parallele au même plan, l'effort qu'elle fait eſt le moindre qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, que ſi cette puiſſance agit ſuivant toute autre direction differente de celle qui eſt po-* Fig. 49.

elle au plan incliné, il faudra qu'elle emploie plus de force pour y retenir le poids R. Car lorſque la direction CMP eſt parallele au plan SH, la perpendiculaire FA ne differe point de FC qui eſt perpendiculaire à ce plan : dans tous les autres cas poſſibles FC, qui eſt perpendiculaire au plan incliné, eſt oblique à la direction CMP ; elle eſt donc dans tous ces cas plus grande que la perpendiculaire FA : or dans toutes les ſituations poſſibles de la direction CMP, la perpendiculaire FD eſt la même, parce que la direction du poids R eſt invariable. Lors donc que la direction de la puiſſance P eſt parallele au plan SH, non-ſeulement la perpendiculaire FA eſt la plus grande qu'il ſoit poſſible ; mais le rapport de la même FA à FD eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, ou le rapport de FD à FA le plus petit qu'il eſt poſſible : or dans l'équilibre le rappport de la puiſſance P au poids R eſt égal au rapport de la perpendiculaire FD à la perpendiculaire FA. Donc lorſque la direction de la puiſſance P qui tient le poids R en équilibre ſur le plan incliné, eſt parallele au même plan, le rapport de cette puiſſance au poids R eſt le plus petit qu'il eſt poſſible : c'eſt-à-dire, que l'effort que la puiſſance doit faire pour lors dans l'équilibre, eſt le moindre qu'il puiſſe être.

Fig. 49. 227. 6°. *Lorſque la direction de la puiſſance* P *eſt parallele au plan incliné* SH, *l'effort qu'elle fait contre le poids* R, *eſt moindre que la peſanteur de ce corps.* Car lorſque la direction CMP eſt parallele au plan incliné, dans l'équilibre, la puiſſance P eſt au poids R comme la hauteur du plan eſt à ſa longueur : or il eſt évident que ſi l'inclinaiſon du plan ou l'angle OHS eſt d'un degré fini & déterminé, la hauteur OS qui répréſente la puiſſance P, eſt moindre que la longueur SH qui repréſente la peſanteur du poids R ; donc la puiſſance P eſt moindre que la peſanteur du corps R.

Fig. 48. 228. 7°. Si la direction CMP ceſſe d'être parallele au plan incliné SH, la puiſſance P pourra être moindre, égale ou plus grande que la peſanteur du poids R, ſelon que la perpendiculaire FD ſera moindre, égale ou plus grande que la perpendiculaire FA.

Fig. 50. 229. 1°. Si la direction de la puiſſance eſt parallele à la baſe OH, & que l'angle H ſoit de 45 degrez, la hauteur OS ſera égale à la baſe OH, ou la perpendiculaire FD, égale à la perpendiculaire FA. Car ſi dans un triangle il y a des angles égaux, les côtez oppoſez à ces angles ſont égaux : *Donc la puiſſance* P *ſera dans l'équilibre un effort égal à la peſanteur du poids* R. Si l'angle H eſt moindre que l'angle de 45 degrez, la hauteur OS ſera plus petite que la baſe OH. *Donc dans l'équilibre la puiſſance* P *ſera moindre que la peſanteur du poids* R.

230. 2°. *Si la direction* CMP *ceſſe d'être parallele au plan* SH, *& qu'elle ſoit ſituée au-deſſous de la parallele au plan, la puiſſance* P *ſera d'autant plus grande que l'angle* FCP *ſera plus petit* : car plus cet angle ſera petit, plus auſſi la perpendiculaire FA ſera petite; donc le rapport de FD à FA augmentera; donc dans l'équilibre le rapport de la puiſſance P au poids R étant égal au rapport de FD à FA, l'effort de cette puiſſance ſera auſſi plus grand. Or il eſt viſible que la perpendiculaire FA peut diminuer juſqu'à ce que la direction CM faſſe avec FC un angle infiniment petit, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce que la direction CMP ſoit ſenſiblement perpendiculaire au plan incliné SH. Et dans tous ces changemens de direction, il faudra pour maintenir l'équilibre, que l'effort de la puiſſance P augmente dans la même raiſon que FA diminue par rapport à FD, ou que FD augmente par rapport à FA : or il eſt évident que lorſque l'angle FCP ſera infiniment petit, la perpendiculaire FA ſera infiniment petite par rapport à FD, ou FD infiniment grande par rapport à FA; donc la puiſſance P ſera infiniment grande par rapport au poids R, c'eſt-à-dire, que l'effort néceſſaire pour maintenir dans l'équilibre le poids R, devra être infiniment plus grand que la peſanteur de ce poids. Ce qui ne doit pas paroître ſurprenant, ſi on fait attention que dans le cas où la direction CMP eſt perpendiculaire au plan SH, preſque toute la force de cette puiſſance eſt employée à preſſer le plan, en ſorte que celle qui eſt tranſmiſe au poids R, & qui doit empêcher ce poids de deſcendre, eſt infiniment petite par rapport à celle qui preſſe le plan.

231. 3°. *Plus l'angle* FCP *deviendra grand, plus la perpendiculaire* FA, *augmentera, & le rapport de* FD *à* FA *ira en diminuant; donc plus l'angle* FCP *ſera grand, dans le cas de l'équilibre, la puiſſance* P *ſera d'autant plus petite*; mais la perpendiculaire FA ne peut augmenter que juſqu'à ce que l'angle FCP ſoit droit, c'eſt-à-dire, juſqu'à ce que la direction MCP ſoit parallele au plan incliné SH; auquel cas, comme on l'a déja remarqué, la perpendiculaire à la direction CMP, ſe confond avec CF perpendiculaire au plan SH au point F. La puiſſance P ne peut donc diminuer que juſqu'à ce que l'angle FCP ſoit droit. Si cet angle eſt plus grand que l'angle droit, la ligne FC ſera oblique à la direction CMP, & par conſéquent FA perpendiculaire à CMP ſera moindre que FC : le rapport de FD à FA ſera donc plus grand, la puiſſance P ſera donc dans l'équilibre un effort plus grand que lorſque l'angle FCP eſt droit, & il faudra que cet effort augmente

d'autant plus que l'angle FCP ſurpaſſera l'angle droit : or cet angle peut augmenter juſqu'au point qu'étant ajouté à l'angle FCN, leur ſomme ſoit égale à deux angles droits, & dans tous ces changemens d'angles, la direction CMP ſera de plus en plus oblique à FC ; donc la perpendiculaire FA diminuera d'autant plus, ou la perpendiculaire FD augmentera relativement à la perpendiculaire FA ; donc la puiſſance P ſera dans l'équilibre des efforts qui iront en augmentant : or lorſque l'angle FCP compoſera avec l'angle FCN deux angles dont la ſomme ſera égale à deux angles droits, la direction de la puiſſance & celle du poids ſeront ſur une même ligne droite ; donc la perpendiculaire FA ſera pour lors égale à la perpendiculaire FD ; donc la puiſſance P ſera alors un effort égal à la peſanteur du poids R. Ce qui doit être ainſi ; car comme dans l'hypotheſe préſente la direction de la puiſſance eſt diamétralement oppoſée à celle du poids, elle doit en ſoutenir tout l'effort, & le plan SH en être entierement déchargé.

232. 8°. Il ſuit du Corollaire précedent & des differens cas qu'il contient, que le paralleliſme de la direction CMP à l'égard du plan SH eſt un terme au-deſſus & au-deſſous duquel l'effort de la puiſſance P étant dirigé, doit croître à meſure que cette direction s'éloigne de ce terme. Lorſqu'elle s'en éloigne en deſſous, il peut augmenter juſqu'à devenir infiniment plus grand que la peſanteur du poids R ; mais ſi la puiſſance tire au-deſſus, l'effort qu'elle fait ne peut croître que juſqu'à être égal à la même peſanteur.

233. 9°. Si l'on conſidere la ligne CF perpendiculaire au plan SH comme le ſinus total ou le rayon d'un cercle dont le centre ſeroit au point de concours C des directions CMP, CN, les perpendiculaires FA, FD ſont les ſinus des angles FCP, FCN ; c'eſt pourquoi toutes les conſéquences que l'on a fondées ſur le rapport des perpendiculaires FA, FD peuvent être auſſi établies ſur le rapport des ſinus des angles FCP, FCN.

234. Ainſi 1°. dans l'équilibre la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des ſinus des angles FCP, FCN.

235. 2°. Lorſque l'angle FCP eſt infiniment petit, le ſinus de cet angle eſt infiniment petit par rapport au ſinus de l'angle FCN qui eſt toujours le même, la puiſſance P qui eſt répréſentée par le ſinus de l'angle FCN eſt donc infiniment grande par rapport à la peſanteur du poids R qui eſt répréſenté par le ſinus de l'angle FCP.

236. 3°. Si l'angle FCP augmente juſqu'à compoſer avec l'angle FCN deux angles, qui pris enſemble ſoient égaux à deux

droits, pour lors les directions CP, CN ſeront couchées ſur une même ligne droite, & les deux angles FCP, FCN ſeront ſupplément l'un de l'autre, ils auront donc le même ſinus : or puiſque dans l'équilibre la puiſſance P & le poids R ſont dans la raiſon réciproque des ſinus des angles FCP, FCN, il eſt évident que dans l'hypotheſe préſente, la puiſſance P eſt égale au poids R, car le ſinus de l'angle FCP eſt le même que le ſinus de l'angle FCN.

237. *Si deux puiſſances égales* Q, P *ſoutiennent deux poids* G, R *ſur deux plans inégalement inclinez* SM, SH *qui ont même hauteur* OS, *ſuivant des directions paralleles aux plans* SM, SH, *je dis que les poids* R, G *ſont entr'eux comme les longueurs* SH, SM. Fig. 51. Les directions des puiſſances Q, P étant paralleles aux plans inclinez SM, SH, chacune d'elles dans l'équilibre eſt au poids qu'elle ſoutient comme la hauteur du plan eſt à la longueur; on aura donc les deux proportions.

Q . G :: OS . SM
R . P :: SH . OS.

Si après avoir multiplié par ordre les termes de ces proportions on diviſe les deux premiers produits par Q & P qui par l'hypotheſe ſont deux grandeurs égales, & les deux derniers par la même grandeur OS, on aura la nouvelle proportion R . G :: SH . SM, c'eſt-à-dire, que les poids R, G ſont dans la raiſon des longueurs des plans inclinez.

238. *Si les poids* R, G *ſont attachez à un cordon* ACB *qui paſſe par deſſus le point fixe* C, *& dont les branches* AC, CB *ſoient paralleles aux plans* SH, SM, *dans le cas d'équilibre ces poids ſont entr'eux comme les longueurs des plans ſur leſquels ils ſont.* Car comme le cordon ACB eſt ſuppoſé parfaitement ſouple & ſans frotement, de maniere qu'il peut gliſſer ſans aucun empêchement par deſſus le point fixe C, il eſt évident qu'il eſt également tendu dans toute ſa longueur, de même que ſi les puiſſances égales P, Q le tiroient chacune ſuivant ſa direction ; donc dans l'équilibre les poids R, G ſe réſiſtent l'un à l'autre, de même que s'ils étoient retenus ſur les plans par des puiſſances égales : or dans cette hypotheſe les poids R, G ſeroient entr'eux comme les longueurs SH, SM ; donc ſi ces poids ainſi poſez ſur les plans SH, SM, tirent l'un contre l'autre ſuivant des directions paralleles aux plans dans l'équilibre, ils ſont auſſi entr'eux comme les mêmes longueurs SH, SM.

239. *Si deux puiſſances égales* P, Q *tiennent en équilibre les poids* R, G *ſur les plans inclinez* SH, SM *qui ont la même hauteur* OS, *ſuivant des directions* AP, BQ *paralleles aux baſes* OH, OM. Je dis que les poids R, G ſont dans la raiſon des baſes. Cette Fig. 52.

propoſition ſe démontre de la même maniere que la précedente en faiſant deux proportions, ſuivant leſquelles la puiſſance P ou Q eſt au poids quelle ſoutient ſur le plan incliné, comme la hauteur eſt à la baſe. D'où l'on conclura que les poids R, G ſont dans la raiſon des baſes OH, OM.

240. On déduira encore que ſi deux poids R, G ſont en équilibre ſur les plans inclinez SH, SM au moyen d'un cordon AB auquel ils ſont attachez, & que le cordon ſoit parallele aux baſes OH, OM, les poids ſont entr'eux comme ces mêmes baſes.

De la charge du plan incliné.

241. Lorſqu'un poids eſt poſé ſur un plan incliné, il le charge & y cauſe une preſſion à laquelle le plan réſiſte; ſi le poids y eſt retenu en équilibre par une puiſſance, elle peut par la maniere dont elle agit ſur ce poids, contribuer à augmenter ou à diminuer la charge; ſi elle tire au-deſſous d'une ligne parallele au plan, il eſt certain qu'elle le preſſe; ſi elle tire en-deſſus, elle le ſoulage; & ſi ſa direction eſt parallele au plan incliné, elle ne fait qu'arrêter l'effort que le poids fait par la pente qu'il a à deſcendre le long du plan. Il paroît donc que la charge ou preſſion ſupportée par le plan incliné, n'eſt pas l'effet du ſeul poids qui y eſt poſé, mais que la puiſſance peut concourir à rendre cette charge plus ou moins peſante; ainſi la charge du plan incliné ne conſiſte pas ſeulement dans la partie du poids qui eſt portée par le plan. On va voir de quelle maniere on peut déterminer cette charge.

242. Il eſt certain que la charge du plan incliné, eſt perpendiculaire à ce plan; car quoiqu'il puiſſe ſe faire que la direction de la puiſſance qui preſſe ſoit oblique au plan, l'effort de la preſſion eſt ſuivant la perpendiculaire au plan: car ſi cet effort étoit oblique au plan, il ne ſeroit pas tout employé à le preſſer, puiſqu'un corps qui eſt pouſſé contre un plan ſuivant une direction oblique, gliſſe, & qu'il n'eſt entierement ſoutenu que lorſqu'il eſt pouſſé ſuivant la perpendiculaire au plan, pour lors il ne peut avancer, parce que le plan lui réſiſte totalement.

PROPOSITION DIX-SEPTIE'ME.

Fig. 47. 48. 49. 50. 243. *Si la puiſſance* P *tient le poids* R *en équilibre ſur le plan incliné* SH *ſuivant quelque direction* CP *qu'on voudra ſuppoſer, la charge du plan eſt à l'une des puiſſances* P *ou* R, *par exemple, à la puiſſance* P *comme le ſinus de l'angle* NCM *formé par les directions* CN, CM, *eſt au ſinus de l'angle* FCN *fait par la perpendiculaire*

CF menée du point de concours C ſur le plan SH, & la direction CN; c'eſt-à-dire, que cette charge eſt à l'une des puiſſances comme le ſinus de l'angle de leurs directions eſt au ſinus de l'angle formé par la perpendiculaire CF eſt à la direction de la puiſſance qui n'entre point dans la proportion.

DEMONSTRATION. 1°. Dans le cas d'équilibre les directions CM, CN concourent en un point C. 2°. La direction de la puiſſance réſiſtante dont le plan SH fait l'office, paſſe par le point de concours C, & par le point d'attouchement F, (car quelle que ſoit la baſe du corps grande ou petite, on peut concevoir & ſuppoſer qu'elle eſt réduite au ſeul point d'attouchement F par où la perpendiculaire CF rencontre le plan SH,) ainſi dans le cas d'équilibre la charge ou la réſiſtance qui eſt l'effort contraire, eſt dirigée ſuivant CF ou FC, comme il a été prouvé (215.217.219.). Cela poſé, l'équilibre entre la puiſſance P & le poids R, poſé ſur le plan SH, ſe fait de la même maniere que ſi la maſſe du poids R étoit détruite, & qu'il ne reſtât que la ligne inflexible CF, ou le levier angulaire AFD, & qu'à l'extrêmité C par où la direction de la peſanteur paſſe, il y eût une puiſſance dirigée ſuivant CN, & dont l'effort fût égal à l'action de la peſanteur du poids R, ou bien qu'il y eût au point D où la direction CN rencontre le bras FD, un poids ſuſpendu égal au poids R, on auroit pour lors le levier droit CF ou le levier angulaire AFD poſé ſur l'appui F, & ſur lequel les puiſſances P, R ſeroient en équilibre; mais l'on a démontré (157.) que la charge ou réſiſtance de l'appui dans le levier eſt à l'une des puiſſances comme le ſinus de l'angle formé par leurs directions eſt au ſinus de l'angle fait par la direction de la réſiſtance, & celle de la puiſſance qui n'entre pas dans la proportion; donc dans l'équilibre ſur le plan incliné, on aura un rapport tout ſemblable, puiſque la charge ou la réſiſtance du plan eſt ſuivant la perpendiculaire FC.

SECONDE DEMONSTRATION de la charge du plan incliné déduite de la compoſition des forces.

244. Lorſque la puiſſance P tient en équilibre le poids R ſur le plan incliné SH, leur action conjointe produit un effort moyen, qui fait la charge du plan incliné, cet effort eſt néceſſairement dirigé ſuivant la diagonale d'un parallelogramme CGFI formé ſur les directions; d'ailleurs parce qu'on ſuppoſe qu'il y a équilibre entre la puiſſance P & le poids R, il eſt néceſſaire que le plan SH réſiſte à cet effort, lequel eſt par conſéquent dirigé ſuivant la perpendiculaire CF; c'eſt pourquoi ſi on fait le parallelogramme Fig. 48. 49. 50.

qui ait pour diagonale CF, dans l'équilibre la puiſſance P & le poids R ſeront exprimez par les côtez CG, CI, & la charge ou réſiſtance du plan par la diagonale CF ; & parce que CI eſt égal à GF, ces trois efforts ſeront répréſentez par les trois côtez CG, GF, CF du triangle CGF : or ces trois côtez ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſez ; l'angle oppoſé au côté CF, a le même ſinus que ſon ſupplément GCI, l'angle CFG oppoſé au côté CG, a le même ſinus que ſon alterne FCI, le côté CF eſt donc au côté CG comme le ſinus de l'angle GCI eſt au ſinus de l'angle FCI ; donc la charge du plan répréſentée par CF eſt à la puiſſance P répréſentée par le côté CG comme le ſinus de l'angle GCI eſt au ſinus de l'angle FCI ; c'eſt-à-dire, comme le ſinus de l'angle des directions, eſt au ſinus de l'angle fait par la perpendiculaire CF, & la direction du poids R qui n'entre pas dans la proportion.

COROLLAIRES. Il ſuit des deux démonſtrations que l'on vient de donner de la charge du plan incliné.

Fig. 49. 245. 1°. *Que ſi la direction de la puiſſance* P *eſt parallele au plan* SH, *la charge qu'il ſupporte eſt à la puiſſance* P *comme la baſe* OH *eſt à la hauteur* OS. *Mais cette même charge eſt au poids* R *comme la même baſe* OH *eſt à la longueur* SH. Car cette charge eſt à la puiſſance P comme le ſinus de l'angle GCI ou de l'angle CGF qui eſt ſon ſupplément, au ſinus de l'angle FCI, ou de ſon égal GFC. Et la même charge ou réſiſtance du plan eſt au poids R comme le ſinus de l'angle GCI, ou de ſon ſupplément CGF eſt eſt au ſinus de l'angle GCF, c'eſt-à-dire, que la charge ou réſiſtance du plan eſt à la puiſſance P & au poids R comme le ſinus de l'angle CGF eſt aux ſinus des angles GFC, GCF : or dans le triangle CGF, le côté CF eſt aux côtez CG, GF comme le ſinus de l'angle CGF eſt aux ſinus des angles GFC, GCF ; donc la charge ou réſiſtance du plan SH eſt à la puiſſance P & au poids R comme le côté CF eſt aux côtez CG, GF du triangle CGF ; mais le triangle CGF eſt ſemblable au triangle OSH, l'angle GCF & l'angle O ſont droits, l'angle G eſt égal à l'angle S, car ils ſont égaux l'un & l'autre à l'angle GFS qui eſt alterne à l'un & à l'autre, parce que GF eſt parallele à la direction CN & à la hauteur OS ; donc la charge du plan incliné SH eſt à la puiſſance P & au poids R comme la baſe OH eſt à la hauteur OS & à la longueur SH.

Fig. 50. 246. 2°. *Lorſque la direction de la puiſſance* P *eſt parallele à la baſe, la charge du plan* SH *eſt à la puiſſance* P *comme la longueur du*

du plan SH *eſt à la hauteur* OS ; *mais cette charge eſt au poids* R *comme la longueur* SH *eſt à la baſe* OH. Car lorſque la direction CP eſt parallele à la baſe, le triangle CGF dont les côtez CF, CG, GF répréſentent la charge du plan, la puiſſance P & le poids R, eſt ſemblable au triangle OSH, les angles G, O ſont droits, & l'angle GCF égal à l'angle S, puiſqu'ils ſont égaux l'un & l'autre à l'angle GFS ; l'angle S eſt alterne à GFS, & l'angle GCF joint à l'angle GFC vaut un angle droit ; pareillement l'angle GFS joint au même angle GFC vaut auſſi un angle droit ; donc ſi on retranche de part & d'autre GFC, les reſtes qui ſont les angles GCF, GFS ſont égaux ; les triangles GCF, OSH ſont donc ſemblables : d'où l'on conclura que la charge du plan, la puiſſance P & le poids R qui ſont répréſentez par les côtez CF, CG, GF, ſont auſſi répréſentez par la longueur SH, la hauteur OS, & la baſe OH du plan ; qu'ainſi la charge du plan incliné eſt à la puiſſance P & au poids R comme la longueur SH eſt à la hauteur OS & à la baſe OH.

Ce ſecond corollaire ſervira à déterminer la force du coin, ou le rapport de la puiſſance qui le pouſſe à la réſiſtance qu'elle a à ſurmonter.

247. *Si le poids* R *eſt ſoutenu par deux plans inclinez* SH, IH, *il y produit des preſſions qui ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles* FCN, ACN *formez par la direction* CN *du poids, & les perpendiculaires* CF, CA *menées aux points d'attouchement* F, A. Fig. 53.

Demonstration. Il eſt certain que le poids R ne preſſe les plans SH, IH que ſuivant les perpendiculaires CF, CA, & ces plans réſiſtent auſſi ſuivant les mêmes perpendiculaires, & rien n'empêche que l'on ne conçoive que ces réſiſtances ſont produites par deux puiſſances dont les actions ſoient directement oppoſées aux preſſions cauſées ſuivant les perpendiculaires CF, CA : ainſi la réſiſtance du plan HI eſt égale ou équivalente à une puiſſance P qui réſiſte à la preſſion que le poids R produit ſur le plan, & qui en réagiſſant ſuivant ACP, empêche que le plan HI ne ſoit preſſé : la réſiſtance du plan SH eſt auſſi équivalente à l'action de la puiſſance G qui réagit ſuivant FCG, & empêche que le plan SH ne ſoit preſſé. Cela poſé, ſuppoſons que l'on ôte pour un moment le plan HI, & que la puiſſance P prenne la place pour réſiſter à la preſſion ou charge que le poids R produit ſuivant CA, pour lors le poids R ſera tenu en équilibre ſur le plan SH par la puiſſance P, & la charge de ce plan ou la preſſion cauſée par le

poids R, & la réſiſtance de la puiſſance P ſera au poids R comme le ſinus de l'angle PCN ou de ſon ſupplément ACN, eſt au ſinus de l'angle FCP ou de l'angle ACF qui eſt ſon ſupplément (243). On prouvera auſſi par un raiſonnement ſemblable que la charge ou preſſion ſupportée par le plan HI eſt au poids R comme le ſinus de l'angle GCN ou FCN eſt au ſinus de l'angle ACG, ou de ſon ſupplément ACF. Si on nomme O la charge ou preſſion du plan SH; *o* celle du plan HI, *ſ* le ſinus de l'angle ACF, S le ſinus de l'angle FCN, *s* le ſinus de langle ACN, on aura les deux proportions.

O . R :: *s* . *ſ*
R . *o* :: *ſ* . S

Si on multiplie par ordre, & qu'on diviſe enſuite les deux premiers produits par R, & les deux derniers par *ſ*, on aura la nouvelle proportion O . *o* :: *s* . S, c'eſt-à-dire; que la charge ou preſſion du plan SH, eſt à celle du plan HI, comme le ſinus de l'angle ACN eſt au ſinus de l'angle FCN, c'eſt-à-dire, que ces deux charges ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles formez par la direction CN, & les perpendiculaires CF, CA.

O . *o* :: *s* . S

248. REMARQUE. Tout ce qui vient d'être dit de la charge du plan incliné, fait aſſez comprendre qu'elle n'eſt pas toujours la même, & qu'elle varie ſuivant que la direction de la puiſſance change; ainſi lorſque cette direction eſt parallele au plan SH, cette charge eſt au poids R comme la baſe OH eſt à la longueur SH; ſi la direction de la puiſſance P eſt parallele à la baſe OH, la charge du plan eſt au poids R comme la longueur SH eſt à la baſe OH. Dans le premier cas la charge eſt moindre que le poids R, dans le ſecond elle eſt plus grande, il en ſera de même dans les autres changemens de direction de la puiſſance P; cette charge augmentera ou diminuera dans la raiſon du ſinus de l'angle GCI au ſinus de l'angle GCF. D'où l'on voit que par la charge ou preſſion cauſée ſur le plan, il ne faut pas entendre la peſanteur du poids R, ou une partie de cette peſanteur. La raiſon en eſt que la preſſion que le plan ſupporte n'eſt pas le ſeul effet de la peſanteur du poids R; mais elle réſulte auſſi de l'action de la puiſſance qui tient le poids en équilibre. De-là vient que le poids R étant le même, cette charge eſt variable ſelon que l'action de la puiſſance eſt dirigée; ſi l'angle GCF devient infiniment petit, l'angle des directions GCI ſera infiniment grand par rapport à l'angle GCF; le ſinus de l'angle GCI ſera donc infiniment grand par rapport au ſinus de l'angle GCF; donc la charge du plan ſera infiniment grande par rapport au poids R. Si l'angle GCF augmente juſqu'au

Fig. 49.

Fig. 50.

point de faire avec l'angle FCI deux angles égaux à deux droits, l'angle des directions GCI ſera infiniment grand ou égal à deux droits ; ſon ſupplément ſera donc infiniment petit, de même que ſon ſinus : or l'angle GCI a le même ſinus que ſon ſupplément. Donc le ſinus de l'angle GCI ſera infiniment petit par rapport au ſinus de l'angle GCF, ou de ſon ſupplément FCI ; par conſéquent la charge du plan incliné SH ſera infiniment petite par rapport au poids R.

249. Par la charge du plan, il ne faut donc pas entendre préciſément ou le poids R ou une partie de ce poids, mais l'effort ou preſſion que le poids R & la puiſſance P produiſent conjointement ſur ce plan. Ainſi la charge du plan & la partie du poids R qui eſt portée par ce plan, ſont deux choſes differentes. Si on ſe propoſe de déterminer quelle eſt la partie du poids R portée par le plan incliné SH, ſelon les changemens de direction de la puiſſance P, on le peut par les principes qu'on a poſez, & avec le ſecours de la principale proprieté des forces compoſées.

250. On prend pour principe qu'une puiſſance Q qui ſoutient un poids ſur un plan incliné ſuivant une direction parallele à la baſe, *ne fait aucun effort, ſoit pour élever, ſoit pour faire deſcendre le poids ; mais que toute ſa force eſt employée ou à empêcher qu'il ne roule ou ne gliſſe, ou à preſſer le plan :* qu'ainſi en tant que le poids fait effort pour deſcendre ſuivant ſa direction naturelle, il eſt totalement ſoutenu par le plan, & que la puiſſance Q n'en ſoutient aucune partie ; mais ſi une puiſſance P fait équilibre avec un poids poſé ſur un plan incliné, & qu'elle tire au-deſſus ou au-deſſous de l'horizontale CQ, *pour lors elle rend par une partie de ſon effort ou à élever le poids, ou à le faire deſcendre, puiſque ſa direction eſt inclinée dans un ſens contraire ou favorable à celle du poids.* Fig. 54. 55.

PROPOSITION DIX-HUITIE'ME.

251. *Si la puiſſance* P *ſoutient le poids* R *ſur le plan incliné* SH, *(on ſuppoſe que cette puiſſance, le poids* R *& la charge ou réſiſtance du plan, ſont exprimez par les côtez* CG, CI, CF *du parallelogramme* CIFG *formé ſur les directions* CP, CN, *& ſur la perpendiculaire* CF,) *(ce qui eſt évident par ce qui précede* 244*). Je dis que ſi la direction* CP *eſt ſituée au-deſſus ou au-deſſous de l'horizontale* CQ, *l'effort que la puiſſance* P *fait ſur le poids* R *pour l'élever ou pour le faire deſcendre ſuivant* CN, *eſt exprimé par la partie* DI *compriſe entre le côté* FI *& la perpendiculaire* FD *menée du point d'attouchement* F *ſur la direction.* CN. Fig. 54. 55.

DEMONSTRATION. Si on conſidere le côté CG qui exprime la puiſſance P comme la diagonale d'un parallelogramme dont les côtez ſoient CA & AG ; que ſur l'horizontale CQ & CN parallele à FA, on place deux puiſſances Q, X qui ſoient exprimées par les côtez CA, GA, elles feront autant pour l'équilibre que la puiſſance P : or la puiſſance Q dont la direction eſt perpendiculaire à celle du poids, ne tend ni à l'élever, ni à le faire deſcendre, mais tout l'effort de la puiſſance X étant dirigé en ſens contraire ou dans le ſens de la peſanteur, tend à élever ou à abbaiſſer le poids R. L'effort que la puiſſance P exerce contre ou ſuivant la direction du poids R, eſt donc exprimé par AG ou ſon égale DI, ce qui eſt évident par l'égalité des triangles ACG, DFI.

Fig. 54. 252. COROLLAIRES. 1°. Lorſque la puiſſance P a ſa direction au-deſſus de l'horizontale CQ, l'effort exprimé par AG ou DI diminue celui de la peſanteur, c'eſt pourquoi le poids R étant exprimé par CI, le plan SH ne porte que la partie répréſentée par CD, qui eſt la difference de CI à DI ; mais ſi la puiſſance P tire ſuivant une direction au-deſſous de l'horizontale CQ, l'effort DI eſt ajouté à la peſanteur CI : ainſi le plan SH porte non-ſeulement tout le poids R, mais encore l'effort DI qui tend à le faire deſcendre.

Fig. 55. 253. 2°. Lorſque la puiſſance P eſt dirigée au-deſſous de l'horizontale CQ, le poids qu'elle ſoutient ſur le plan incliné SH, eſt moindre que celui que la puiſſance Q y ſoutiendroit, quoique celle-ci ſoit moindre que la puiſſance P ; car la puiſſance Q ſoutiendroit un poids exprimé par CD, & la puiſſance P ne ſoutient qu'un poids répréſenté par CI, ce qui doit être ainſi, & il n'eſt pas difficile d'en appercevoir la raiſon ; ſi la puiſſance P n'éxerçoit que l'effort ſuivant CQ, elle ſoutiendroit un poids répréſenté par CD ; mais puiſqu'elle fait encore ſuivant la direction du poids R un effort DI, par lequel elle tend à le faire deſcendre, il s'enſuit que l'effort ſuivant CQ ne peut plus ſoutenir qu'un poids répréſenté par CI difference de CD à DI ; la puiſſance P qui ne fait ni plus ni moins que ce que produiſent conjointement les puiſſances Q, X, ne peut donc ſoutenir que le poids CI, quoiqu'elle ſoit plus grande que la puiſſance Q.

Fig. 54. 254. 3°. Lorſque la direction de la puiſſance P eſt parallele au plan incliné, ſi de l'angle droit O on mene OE perpendiculaire à la longueur SH, elle diviſera cette longueur en deux parties SE, EH qui répréſentent les parties du poids R, SE celle que la puiſſance P ſoutient par ſon effort ſuivant CX, & EH celle qui eſt portée par le

plan incliné ; car les parties du poids R ſoutenues par l'effort que la puiſſance P exerce ſuivant CX, & la partie portée par le plan H, ſont dans la raiſon de DI à DC, c'eſt-à-dire, comme les parties de l'hypothenuſe CI du triangle rectangle FCI coupée par la perpendiculaire FD abbaiſſée de l'angle droit F ; mais le triangle OHS eſt ſemblable au triangle FCI ; donc la perpendiculaire OE diviſe la longueur SH en parties proportionnelles aux parties DI, DC ; donc les parties du poids R ſoutenues par la puiſſance P, & le plan SH qui ſont entr'elles comme DI, DC, ſont auſſi entr'elles comme SE, EH compriſes entre le ſommet, la baſe du plan & la perpendiculaire OE menée de l'angle droit O.

DE LA VIS.

255. *La vis* eſt un cylindre ſur la ſurface duquel on a entaillé un cordon ſolide qui l'entoure en forme de ligne ſpirale qui s'étend depuis l'extrémité inférieure juſqu'à l'extrémité ſupérieure, (en concevant que le cylindre eſt poſé ſur ſa baſe). Ce cordon ſpiral fait ainſi pluſieurs tours ſur la ſurface cylindrique, de maniere que ſes parties ſont toutes également inclinées ſur la hauteur ou longueur du cylindre ; de là vient que tous les tours formez par l'entortillement du cordon, ſont également diſtans ; cette diſtance ou intervalle ſe meſure, non ſuivant la perpendiculaire d'un de ces tours au tour voiſin, mais ſuivant la hauteur ou longueur du cylindre. Chaque tour du cordon ſpiral eſt appellé *ſpire* ou *helice*. Il y a des Auteurs qui l'appellent pas de la vis ; & ils appellent hauteur du pas de la vis, la diſtance d'une ſphere à la ſuivante : il y en a au contraire qui prennent pour pas de la vis la diſtance ou intervalle qui eſt entre deux ſpires ; ſi l'on imagine ſur la ſurface du cylindre une ligne AB parallele à l'axe GH, & qu'une partie du cordon ſpiral telle que BEA entoure le cylindre en s'élevant comme par degrez depuis le point B de la ligne AB, juſqu'au point A de la même ligne, on aura une ſpire ou helice, & la ligne AB ſera l'intervalle ou diſtance qui eſt entre deux ſpires ; la ſpire BEA commence au point B, & elle finit au point A qui eſt le commencement de la ſuivante. Fig. 56.

256. Si le cordon ſpiral eſt ſur la ſurface convexe ou extérieure d'un cylindre, la vis eſt appellée *vis intérieure* ou ſimplement *vis* ; ſi ce cordon eſt ſur la ſurface concave ou intérieure d'un cylindre creux, la vis eſt appellée *vis extérieure* ou écrou.

257. Il eſt aiſé d'appercevoir que ſi le diametre de l'écrou eſt égal au diametre de la vis, & que les intervalles des ſpires de l'é-

crou ſoient égaux à ceux des ſpires de la vis, pour lors la vis pourra entrer dans l'écrou, & les ſpires d'un cylindre s'ajuſter ou s'appliquer exactement ſur celle de l'autre, comme ſeroient deux anneaux de même grandeur en ſe touchant par tous les points de leurs circonférences ; & ſi l'on fait effort pour faire tourner l'un des cylindres, les ſpires de la vis qui ſera mue gliſſeront en tournant ſur les ſpires du cylindre qui eſt fixe & ſtable, & monteront comme ſur des plans inclinez.

Fig. 57. 258. Si on dévelope une partie du cylindre total, & que la hauteur AB ſoit égale à l'intervalle qui eſt entre deux ſpires, on aura un parallelogramme ABBA dont les côtez oppoſez AB, AB ſont égaux à la diſtance qui eſt entre deux ſpires, & les côtez AA, BB égaux aux circonférences des deux baſes ſupérieure & & inférieure du cylindre, la partie BEA qui eſt un des tours du cordon ſpiral ou une des ſpires qui le compoſent, ſera la diagonale du parallelogramme A B B A ; car lorſque la ſpire BEA eſt développée, elle forme une ligne droite, puiſque ſelon l'hypotheſe cette ligne fait avec AB & les lignes qui lui ſont paralleles, des angles égaux. D'où l'on voit, comme on a déja remarqué, que lorſque les ſpires de la vis mobile ſont mues ſur celles de la vis immobile, elles y gliſſent comme feroit un corps qui ſeroit poſé ſur un plan incliné, lequel s'allonge en tournant, & qui enveloppe la ſurface, ſoit concave, ſoit convexe d'un cylindre ; BEA eſt la longueur, AB la hauteur, & BB la baſe du plan incliné.

259. Si on diviſe par la penſée la vis entiere en cylindres partiels dont les hauteurs ſoient égales à l'intervalle qui eſt entre deux ſpires, la ſurface de chaque petit cylindre ſera un parallelogramme qui aura pour diagonale la ſpire développée ; cette ſpire ſera auſſi un plan incliné dont la hauteur ſera égale à la hauteur du petit cylindre, & la baſe à la circonférence de la baſe du même cylindre, & toutes ces diagonales miſes en ligne droite à la ſuite les unes des autres, compoſeront le cordon ſpiral qui étant roulé de nouveau ſur la ſurface cylindrique, y formera un plan incliné tournant qui regnera depuis le bas juſqu'au haut du cylindre. Il paroît donc que la vis eſt un plan incliné qui eſt contourné en ſpirale, & que la vis jointe à l'écrou ſont auſſi deux plans inclinez appliquez l'un ſur l'autre.

260. Lorſqu'une puiſſance s'applique à la vis pour preſſer, ſerrer, en un mot ſurmonter quelque obſtacle, il faut que l'écrou ou la vis intérieure ſoit immobile. On ſuppoſera dans la ſuite que c'eſt l'écrou qui eſt fixe. Cela poſé,

261. On peut diſtinguer dans le jeu de la vis deux mouvemens l'un par lequel les ſpires de la vis intérieure ſont mues ſur celles de l'écrou en tournant ſpiralement & dans le ſens qu'elles entourent le cylindre, par l'autre mouvement la vis mobile avance ſuivant ſa longueur, ce dernier mouvement réſulte du précedent; ce qui n'eſt pas difficile à concevoir, ſi on imagine qu'un corps qui eſt mû ſur un plan incliné, s'éleve à la hauteur du plan en ſuivant un chemin oblique & détourné.

Il eſt évident que la vis ne preſſe les obſtacles que par ſon mouvement progreſſif ou par la tendence qu'elle a à ce mouvement, ſi elle n'avoit qu'un mouvement circulaire, ſemblable à celui du deſſus d'une tabatiere ou boëte, elle n'auroit aucune force pour preſſer ou fouler; elle n'a donc d'effet qu'autant que le mouvement ſpiral ſe convertit en un mouvement progreſſif, par lequel elle avance ſuivant la longueur de l'axe.

262. Si la vis en tournant ainſi rencontre un obſtacle que la force ou puiſſance qui lui eſt appliquée ſoit ſur le point de ſurmonter pour peu qu'elle augmente ſon effort, mais qu'elle ne le ſurmonte pas néanmoins, il y a équilibre entre l'obſtacle & la force; & parce que la vis ne preſſe l'obſtacle que ſuivant la longueur de l'axe du cylindre, il eſt certain que l'obſtacle ne réſiſte auſſi que dans ce ſens, par conſéquent la direction de cette réſiſtance eſt parallele à l'axe & oblique aux ſpires de la vis. Fig. 56.

263. Lorſque la vis preſſe un obſtacle, elle en eſt auſſi preſſée, & tout l'effort qu'elle fait pour le vaincre, retombe ſur ſes ſpires, qui ſont ſollicitées de reculer; mais la puiſſance s'oppoſe à ce mouvement par un effort contraire, de là naît une preſſion des ſpires de la vis ſur celles de l'écrou.

264. On vient de voir 1°. que chaque ſpire de la vis, eſt un vrai plan incliné qui a pour hauteur l'intervalle de deux ſpires, & pour baſe la circonférence de la baſe du cylindre. 2°. Que la réſiſtance de l'obſtacle que la vis tend à ſurmonter, eſt dirigée ſuivant la longueur de l'axe, c'eſt-à-dire, parallelement à la hauteur du plan incliné ou perpendiculairement à la baſe. Or 3°. toute réſiſtance eſt comparable à un poids qui preſſeroit dans le ſens de la réſiſtance; lors donc qu'un obſtacle réſiſte au mouvement progreſſif de la vis, la preſſion contraire que la vis reçoit dans ſes ſpires, a le même effet que ſi elles ſoutenoient un poids dont la peſanteur ſeroit dirigée dans le même ſens; d'où l'on voit que juſqu'ici il n'y a point de difference entre la vis & le plan incliné, & que l'équilibre doit ſe faire de la même maniere ſur l'une & l'autre ma-

chine, en ſuppoſant que la puiſſance eſt immédiatement appliquée au poids que l'on ſuppoſe preſſer les ſpires de la vis, car une puiſſance qui tient en équilibre un poids ſur un plan incliné l'empêche de deſcendre le long du plan ; de même lorſque la vis preſſe un obſtacle, ſes ſpires reçoivent une preſſion qui tend auſſi à les faire deſcendre le long des ſpires de l'écrou comme feroit la peſanteur à l'égard du poids poſé ſur le plan incliné ; mais la puiſſance que l'on ſuppoſe appliquée aux ſpires de la vis, s'oppoſe à cette deſcente par un effort contraire. Si la puiſſance étoit donc immédiatement appliquée aux ſpires de la vis, l'analogie par laquelle on détermine le rapport de la puiſſance au poids ou à la réſiſtance, ſeroit préciſément la même dans la vis & le plan incliné ; mais la puiſſance qui empêche le recul de la vis lorſqu'elle preſſe l'obſtacle, s'attache à un levier OM dont l'appui eſt au point O de l'axe GH du cylindre, quoique le levier ne ſoit pas prolongé juſqu'au point O de l'axe, cela ne change rien à l'effet ; car ſi ce levier s'étendoit juſqu'au point O, ce point ſeroit le centre du mouvement ou le point fixe autour duquel le levier ſeroit mû ; or quoique ce levier ne traverſe pas le cylindre pour aller rencontrer le point O, cela n'empêche pas que ce point ne ſoit le centre du mouvement, parce que la vis eſt néceſſairement déterminée à tourner autour de l'axe GH. La vis eſt donc une machine compoſée d'un plan incliné & d'un levier. On peut ſuppoſer pour la démonſtration que le levier OM eſt implanté dans tel endroit que l'on voudra de la ſurface du cylindre de la vis, parce que ce cylindre étant inflexible, l'effort de la puiſſance ſe tranſmettra avec la même facilité juſqu'à l'obſtacle qui par ſa réſiſtance preſſera de même les ſpires de la vis. On ſuppoſera que le levier s'ajuſte avec le cylindre de la vis à l'endroit même où les ſpires ſont preſſées, & que cette preſſion qui eſt diſtribuée ſur toutes celles qui rencontrent l'écrou, eſt comme réunie au point S de la ſpire BEA où le levier rencontre la ſurface du cylindre.

On ſuppoſera encore comme on fait ordinairement, que la puiſſance P qui fait équilibre avec la réſiſtance de l'obſtacle, tire ou pouſſe ſuivant une direction perpendiculaire au levier, & parallele à la baſe du cylindre de la vis. Ces notions ſuppoſées, on peut démontrer l'analogie ſuivante.

PROPOSITION DIX-NEUVIE'ME.

Fig. 56. 265. *Si la puiſſance* P *tire ou pouſſe le levier* OM (*qui fait un même corps avec le cylindre de la vis*) *ſuivant une direction* MP *parallele à la baſe du cylindre, & perpendiculaire au levier* OM, *je dis que dans le*

le cas d'équilibre la puiſſance P *& la réſiſtance de l'obſtacle répréſentée par le poids* R, *ſont dans la raiſon de l'intervalle* BA *de deux ſpires, à la circonférence décrite par l'extrêmité* M *du levier* OM. *En ſorte que ſi on nomme* C *la circonférence du cercle décrit, l'on aura* P. R :: AB . C.

DEMONSTRATION. Suppoſons dabord que la preſſion que la ſpire BEA reçoit de la réſiſtance de l'obſtacle ou du poids, eſt ſoutenue par une puiſſance N immédiatement appliquée au point S où l'on ſuppoſe que cette preſſion eſt comme réunie & que cette puiſſance tire ſuivant une direction parallele, à la baſe du cylindre, ou, ce qui revient au même parallele à la baſe du plan incliné BEA. La propriété du plan incliné donnera cette proportion, la puiſſance N eſt à la preſſion ou peſanteur du poids R comme la hauteur AB du plan incliné, eſt à la circonférence BDB qui eſt la baſe du même plan, c'eſt-à-dire, N . R :: AB . BDB. Or parce que la puiſſance P tire le levier OM à une plus grande diſtance de l'appui O, il faut qu'elle ſoit moindre que la puiſſance N dans la raiſon de OS à OM ; en ſorte que l'on ait P . N :: OS . OM, ou bien, parce que les circonférences ſont en même raiſon que les rayons OS, OM, la puiſſance P ſera à la puiſſance N comme la circonférence BDB du cylindre eſt à la circonférence décrite par le levier OM, c'eſt-à-dire, en nommant C la circonférence décrite par OM, P . N :: BDB . C. Si on multiplie par ordre les termes de la premiere & de la derniere proportion, qu'on diviſe les deux premiers produits par N & les deux derniers par BDB, on aura P . R :: AB . C, c'eſt-à-dire, que dans l'équilibre la puiſſance P eſt à la puiſſance R comme l'intervalle qui eſt entre deux ſpires eſt à la circonférence qui auroit OM pour rayon.

N . R :: AB . BDB
P . N :: BDB . C

266. COROLLAIRES. 1°. Il eſt évident que plus les pas de la vis ou les intervalles AB qui ſont entre deux ſpires ſont petits, & le rayon OM ou plutôt la circonférence qui auroit OM pour rayon, eſt grande, la puiſſance P demeurant la même, plus l'obſtacle qu'elle pourra vaincre ſera grand ; ou ſi c'eſt le même obſtacle, il ſuffira qu'elle employe une force d'autant moindre pour le ſurmonter, puiſque cette puiſſance eſt répréſentée par le pas de la vis, & la réſiſtance de l'obſtacle par la circonférence C.

267. 2°. Si la puiſſance P tire le levier OM ſuivant une direction parallele à la longueur de la ſpire BEA, c'eſt-à-dire, parallele au plan incliné, pour vaincre le même obſtacle, il faudra une force moindre que lorſqu'elle tire parallelement à la baſe. Car dans le

premier cas la puiſſance N eſt à la réſiſtance de l'obſtacle R comme la hauteur AB ou CD eſt à la longueur BEA, & dans le ſecond elle eſt à la même réſiſtance comme la hauteur AB ou CD eſt à la baſe du plan incliné, c'eſt-à-dire, que comme le rapport de la hauteur à la longueur eſt moindre que celui de la même hauteur à la baſe du plan incliné; ainſi le rapport de la puiſſance N au poids ou à la réſiſtance R eſt moindre lorſque la direction eſt parallele à la longueur que lorſqu'elle eſt parallele à la baſe : or le rapport de la puiſſance P à la puiſſance N ne change point tant que la longueur OM du levier eſt la même. Donc ſi la puiſſance N diminue lorſque la direction eſt parallele au plan incliné, il faut auſſi que la puiſſance P diminue, ſans quoi le rapport de ces deux puiſſances ne ſeroit pas conſtant.

268. Lorſque l'intervalle qui eſt entre les ſpires ou hélices eſt petit, la longueur eſt peu differente de la hauteur du plan : ainſi la puiſſance gagne peu en dirigeant ſon effort parallelement à la longueur de l'hélice ou ſpire de la vis. Le frottement eſt fort grand dans cette machine, & il conſume inutilement une grande partie de la force.

DU COIN.

Fig. 58. 269. Le *coin* ordinaire eſt un corps ou ſolide qui a la figure d'un priſme triangulaire. EG eſt *le taillant*, ABCD *la tête* ou *la baſe*, ABGE, DCGE ſont les *côtez* par leſquels le coin s'applique à l'obſtacle qu'on veut lui faire vaincre, les *faces* DAE, BCG ſont celles qui donnent au ſolide la figure de priſme triangulaire.

On ſe ſert du coin pour élever des poids ou fardeaux à une petite hauteur, ou bien pour fendre & diviſer les corps.

270. Pour faire agir le coin, on emploie ou la ſimple preſſion, ou la percuſſion, mais plus ordinairement la percuſſion que la preſſion ſans choc. Lorſque l'action du coin conſiſte dans une ſimple preſſion ſans choc, comme ſeroit la peſanteur d'un corps d'ont on chargeroit ſa tête ABCD, la réſiſtance de l'obſtacle peut être aſſez grande pour contrebalancer & faire équilibre avec cet effort; mais ſi le coin agit par la force de la percuſſion, & qu'elle ſoit d'une meſure déterminée, c'eſt-à-dire, ſi le choc n'eſt pas infiniment petit, l'obſtacle eſt toujours ſurmonté ou en tout ou en partie, parce que les corps cedent au mouvement, & que la peſanteur ne peut pas détruire en un inſtant celui qui eſt communiqué à un corps lorſque ce corps eſt mû contre la direction de cette force : ainſi lorſque la force du coin conſiſte dans la percuſſion à proprement parler, il n'y a point d'équilibre entre ſon effort, & la réſiſtance de l'obſtacle.

271. Lorſque la force du coin eſt employée à élever un poids ou à ſurmonter un obſtacle ſemblable, la réſiſtance qu'il a à vaincre eſt comme réunie à l'endroit du contact ; mais lorſqu'on ſe ſert du coin pour fendre ou diviſer un corps, ſon action s'étend de l'une à l'autre extrêmité de la fente faiſant effort pour en écarter les côtez & les ſéparer. Pour concevoir la difference qu'il y a entre la réſiſtance que le coin trouve lorſqu'il n'a qu'un poids à élever, & celle qu'il a à vaincre lorſqu'il fend un corps, il faut ſe repréſenter que le poids R eſt retenu par une corde GO ſur la face AD du coin ADB poſé ſur le plan horizontal LL, & que la puiſſance P pouſſe le coin ſuivant la direction MP, il eſt évident que toute la réſiſtance eſt à l'endroit même où le poids R eſt placé ſur la face AD ; mais ſi le coin ADB eſt engagé dans la fente FRE du corps GNFROEMS, la réſiſtance eſt répandue dans toute la longueur de cette fente, puiſque la difficulté que le coin trouve à l'élargir, eſt un effet de celle qu'il a à rompre les liens qui tiennent en R les côtez FR, ER étroitement unis. Fig. 59. Fig. 60. 61.

272. Tous les corps ceux même qui paroiſſent les plus fragiles, comme le verre, la pierre &c. ſont flexibles, extenſibles & compreſſibles, ſelon les expériences de M. Mariotte : d'où l'on peut conclure que lorſque le coin eſt pouſſé & retenu dans la fente d'un corps, les côtez de cette fente s'appliquent aux faces du coin au moins en partie ; ſoit parce qu'ils ſe courbent, ſoit parce qu'il ſe fait une compreſſion ou un applatiſſement à l'endroit du contact qu'on ſuppoſe être en F, E. Les liens ou fibres qui réſiſtent à la diviſion au bas de la fente en R, étant de même nature que le corps, c'eſt-à-dire extenſibles, s'allongent avant que de ſe rompre ; de là vient que le corps ne ſe diviſe que ſucceſſivement & à meſure que les fibres qui ont reçu une plus grande extenſion, ſont obligées de céder à l'effort du coin. Pour avoir une idée de la maniere dont ces fibres réſiſtent à la force qui pouſſe le coin, on peut imaginer pluſieurs filets tranſverſaux & paralleles entr'eux tels que R, R, &c. & perpendiculaires aux côtez de la fente. Comme cette fente imite néceſſairement la figure triangulaire du coin, il faut que les fibres ſur leſquelles la force de cet organe agit actuellement, forment auſſi un eſpace triangulaire ; il y a donc un endroit où les fibres ceſſent d'être allongés ; & parce que le coin peut s'inſinuer & faire quelque chemin avant que les premieres fibres qui ſont le plus allongées cedent, il n'eſt pas difficile d'appercevoir que les côtez de la fente doivent en s'écartant ainſi par le progrès du coin, tourner ſur l'endroit où l'allongement des fibres finit, comme un levier. Fig. 60. 61.

tourne ſur ſon appui ; ainſi ſuppoſé que l'eſpace que les fibres allongées occupent, finiſſe en O, ce ſera là le centre de mouvement des côtez FO, EO de la fente.

273. On peut donc conſiderer les côtez FO, EO de la fente comme deux leviers qui ont leur appui en O, & qui facilitent au coin la rupture des fibres qui s'étendent depuis R juſqu'à l'endroit O. Comme l'eſpace RO eſt fort petit, ſi les côtez de la fente ſont fort longs, la force qui pouſſe le coin, éprouve une moindre réſiſtance dans les fibres allongées qui ſont dans cet eſpace ; car on ſçait que la force relative d'une puiſſance augmente dans la même raiſon que la diſtance à l'appui : l'expérience montre auſſi que lorſque la fente eſt fort avancée, il y a moins de peine à faire entrer le coin, que lorſqu'elle ne fait que commencer ; ce qui prouve que la longueur des côtez de la fente aide la puiſſance qui pouſſe le coin.

274. Lorſque le coin eſt retenu entre les côtez de la fente, il les preſſe & en eſt preſſé : or la preſſion qu'un corps exerce ſur un autre corps, eſt dirigée ſuivant la perpendiculaire à la ſurface par laquelle il le touche ; donc le coin preſſe les côtez FO, EO ſuivant les lignes CF, CE perpendiculaires aux portions de ſurface par leſquelles il touche ces côtez.

275. Dans l'équilibre une ſimple réſiſtance a le même effet qu'une véritable réaction ; au lieu donc de concevoir que les côtez de la fente ſont purement paſſifs, & qu'ils ne font que réſiſter à l'action de la puiſſance P, on les conſiderera comme réagiſſant ſuivant les directions FC, EC perpendiculaires aux faces du coin, ce qui eſt encore confirmé par l'expérience ; car on ſçait que la plupart des corps ont du reſſort lequel tend à les rétablir dans leur premier état, lorſque quelque force extérieure les courbe, les plie ou les comprime de quelque maniere que ce ſoit ; de-là vient que dans preſque tous les corps qu'on diviſe avec un coin, les côtez de la fente reviennent & ſe rapprochent ſi on retire le coin. Rien n'empêche donc qu'on ne conſidere la réſiſtance que le coin a à ſurmonter, comme étant l'effet du reſſort qui réagit ſur les faces du coin. Cela ſuppoſé, il eſt viſible que le coin eſt pouſſé par deux forces ſuivant les directions FC, EC qui ſont à la vérité perpendiculaires aux faces AD, BD, mais qui ſont inclinées l'une à l'autre ; ces deux forces n'étant pas directement oppoſées, ne peuvent faire ſeules équilibre ſur le coin, mais elles tendent à le chaſſer. Or je dis que ſi le coin ADB eſt iſoſcele (comme on le ſuppoſe), & que la puiſſance P qui le retient dans la fente, le pouſſe

ſuivant une direction PD perpendiculaire au milieu de la tête ou baſe AB, les preſſions ſuivant les directions FC, EC ſeront égales; car par la maniere dont la puiſſance P agit, ſa force ſe diſtribue également des deux côtez de la direction PD; elle détermine donc le reſſort à réagir également ſur les faces du coin. Si la direction de la puiſſance P n'étoit pas perpendiculaire au milieu de la tête ou baſe AB, ou bien que le coin ne fût pas iſoſcele, les faces ſeroient inégalement preſſées par l'action du reſſort.

276. Les preſſions ſuivant FC, EC produiſent chacune deux tendences dans le coin, l'une ſuivant DP, & l'autre ſuivant la perpendiculaire à la même DP. Suppoſons que le coin iſoſcele ADB eſt diviſé en deux parties égales ſuivant la direction PD, & que l'une des moitiez, par exemple, BDP eſt fixement attachée au côté EO de la fente, & que l'autre moitié ait la liberté d'en ſortir étant preſſée ſuivant FC par la force du reſſort, il eſt certain que la moitié mobile ADP gliſſera ſur DP, puiſqu'elle eſt pouſſée ſuivant une direction oblique à la ſurface DP, & que d'ailleurs on ſuppoſe que rien ne détruit ce mouvement: or il ne peut pas ſe faire que la moitié ADP gliſſe ſur la ſurface DP ſans la preſſer, & que la preſſion que la moitié ADP exerce ſur la ſurface DP ne ſoit perpendiculaire à la même ſurface. On peut comparer cette preſſion à celle que produit une force qui pouſſe obliquement un corps, & qui le fait gliſſer ſur une ſurface plane & polie; l'action du reſſort donne donc au coin deux tendences, l'une ſuivant DP, & l'autre ſuivant la perpendiculaire à DP. Les tendences que les preſſions ſuivant FC, EC produiſent dans le ſens de la perpendiculaire à DP ſont égales, puiſque les forces qui les produiſent ſont égales & ſemblablement dirigées à l'égard de DP; d'ailleurs elles ſont directement oppoſées; donc elles s'empêchent mutuellement ſans que l'une puiſſe prévaloir ſur l'autre; mais pour ce qui eſt de la tendence ſuivant DP, elle auroit ſon effet, & le coin ou ſes deux parties ADP, BDP qu'on ſuppoſe parfaitement libres, ſeroient pouſſées hors de la fente. Fig. 60.

277. Si le ſolide qu'on veut fendre étoit ſans reſſort, le coin ne laiſſeroit pas dans l'équilibre de recevoir les deux tendences dont on vient de parler, parce que les réſiſtances que la puiſſance P fait naître dans l'équilibre aux points E, F en pouſſant le coin ſuivant PD, ont l'effet d'une force, & équivalent à l'action du reſſort: il n'eſt pas même néceſſaire que le coin ſoit diviſé en deux parties.

278. Ces choſes étant conçues de la maniere qu'on vient de les Fig. 60.

ou fendre, le coin iſoſcele ADB peut être conſideré comme un double plan incliné, lorſqu'il eſt engagé entre les côtez de la fente, & qu'il les tient écartez; AD, BD ſont les longueurs de ces deux plans; AP, BP les hauteurs, & DP la baſe commune; à chacun des points E, F il y a trois forces en équilibre, & cela d'une maniere toute ſemblable à ce qui arrive lorſqu'une puiſſance tient un poids en équilibre ſur un plan incliné; ces forces ſont les preſſions ou réſiſtances ſuivant EC, FC, & les tendences qu'elles produiſent dans le coin ou qu'elles y font naître; c'eſt auſſi ſous cette idée qu'on va conſidérer cet inſtrument, ſoit qu'on l'emploie à élever un corps, ou à le fendre.

PROPOSITION VINGTIE'ME.

Fig. 59. 279. *Si le poids* R *eſt retenu ſur le coin* ADB *ſuivant une direction* CO, *& que la puiſſance* P *le pouſſe ſuivant une direction* MP *parallele à* BD; *dans l'équilibre elle eſt au poids* R *comme le produit de la hauteur perpendiculaire* AB, *& du ſinus de l'angle* GCN, *eſt au produit de la longueur* AD *& du ſinus de l'angle* GCF. L'angle GCN eſt formé par les directions du poids, & celle de la force ou obſtacle répréſentée par CO, & qui retient le poids R ſur le plan incliné AD: l'angle GCF eſt formé par la direction de la charge F, & celle de la force ſuivant CO. *Ainſi ſi on nomme* (*ſ*) *le ſinus de l'angle* GCF, (S) *le ſinus de l'angle* GCN, *je dis que dans l'équilibre on aura* P. R :: AB×S. AD×*ſ*.

Demonstration. Conſiderons dabord le plan incliné AD ou le coin ADB comme immobile. Par la propriété du plan incliné l'on aura la charge ou la réſiſtance F du plan AD eſt au poids R, comme le ſinus de l'angle GCN eſt au ſinus de l'angle GCF, c'eſt-à-dire, F. R :: S. *ſ*. Cela poſé, il eſt évident que dans l'hypotheſe préſente le plan AD ou le coin ADB eſt mobile, puiſque la puiſſance P tend à le faire avancer ſuivant MP ou BD, & parce que l'effort ſuivant CF qui réſulte de la peſanteur du poids R & de la force ſuivant CO, étant perpendiculaire à AD, eſt néceſſairement oblique à la face BD, il s'enſuit que l'effort ſuivant CF où la charge du plan AD tend à faire gliſſer le coin le long du plan LL qu'on ſuppoſe parfaitement poli, l'équilibre entre le poids R & la puiſſance P conſiſte donc en ce qu'elle réſiſte à l'effort par lequel la charge qui réſulte du poids R & de la réſiſtance ſuivant CO tend à faire gliſſer le coin ſuivant LL. Il faut de quelque point *d* du plan LL mener une perpendiculaire *db* à la direction CF de la charge F, & du point *b* pris à volonté dans la ligne *db*,

élever la perpendiculaire *ba* qui rencontre le plan LL au point *a*. Cela fait, il eſt viſible que la charge F du coin tend à le faire gliſſer ſur LL, comme la peſanteur tend à faire gliſſer le poids R ſur le plan AD ; & que de même qu'il faut une force ou obſtacle pour retenir le poids R ſur ce plan, il faut auſſi que la puiſſance P arrête le coin. On peut donc regarder la longueur *ad* comme celle d'un plan incliné qui auroit pour baſe *bd* perpendiculaire à FC, & pour hauteur *ab* : or la puiſſance P agit ſuivant une direction parallele à la longueur *ad* ; donc elle eſt à la charge F comme la hauteur *ab* eſt à la longueur *ad* ; d'ailleurs les triangles ADB, *adb* ſont ſemblables, parce que AD & *bd* étant perpendiculaires à CF, ſont paralleles ; donc au lieu du rapport de *ab* à *ad*, on peut mettre celui de AB à AD ; donc P . F :: AB . AD ; mais on a dit ci-deſſus que F . R :: S . *ſ*. Si on multiplie par ordre les termes de ces deux proportions, & qu'on diviſe les deux premiers produits par F, on aura P . R :: AB × S . AD × *ſ* qui eſt la proportion qu'il falloit démontrer.

280. Corollaires. 1°. Si la direction CO eſt parallele à la baſe BD du plan incliné, les ſinus des angles GCN, GCF ſont dans la raiſon de la longueur AD du plan à la baſe BD, comme il a été prouvé dans le plan incliné ; donc ſi dans la proportion précedente au lieu du rapport des ſinus S, *ſ* on met le rapport de AD à BD, on aura P . R :: AB × AD . AD × BD. Et après avoir diviſé les deux derniers termes par AD, on aura P. R :: AB . BD ; c'eſt-à-dire, la puiſſance eſt au poids comme la hauteur du plan incliné eſt à la baſe.

281. 2°. Si la direction CO eſt parallele au plan incliné AD, le ſinus de l'angle GCN eſt au ſinus de l'angle GCF comme la baſe BD eſt à la longueur AD, la proportion précédente ſera donc changée en celle-ci P . R :: AB × BD . AD × AD, c'eſt-à-dire, que la puiſſance P eſt au poids R comme le produit de la hauteur AB, & de la baſe BD eſt au quarré de la longueur AD.

282. 3°. L'on voit que le rapport de la puiſſance P au poids R varie à tous les changemens de la direction CO. Lorſque cette direction eſt parallele au plan AD, le rapport de la puiſſance P au poids R eſt moindre que lorſque cette direction eſt parallele à la baſe. Cela eſt ainſi, ſi le rapport de AB×BD à AD×AD eſt moindre que le rapport de AB à BD, or cela eſt aiſé à prouver ; il eſt certain que le rapport de AB à AD eſt moindre que celui de AB à BD. Or le rapport de AB×BD à AD×AD, eſt encore plus petit que celui de AB à AD ; car ſi on multiplioit les deux termes

du rapport AB à AD par la même grandeur AD, la raiſon des produits ſeroit égale à celle des grandeurs multipliées ; mais puiſqu'on multiplie le premier terme AB par un multiplicateur BD moindre que le multiplicateur AD du ſecond terme AD, il s'enſuit que le rapport de AB × BD à AD × AD eſt moindre que le rapport de AB à AD ; donc à plus forte raiſon ce premier rapport eſt moindre que celui de AB à BD. Lors donc que la direction CO eſt parallele à la longueur du plan, il faut moins de force pour pouſſer le coin ſuivant une direction parallele à la baſe BD, dans les autres cas le rapport de la puiſſance P au poids R varie ſuivant le rapport des ſinus des angles GCN, GCF : car il eſt aiſé d'appercevoir que dans le rapport AB×S . AD×f, les grandeurs AB, AD ſont toujours les mêmes ; qu'ainſi les changemens que ce rapport reçoit, ont pour principe le rapport variable des ſinus S, f.

PRÉPARATION POUR LA PROPOSITION SUIVANTE.

Fig. 60. 283. 1°. Dans la propoſition qui va ſuivre, on ſuppoſera que le coin iſoſcele ADB eſt partagé en deux également par DP perpendiculaire à la baſe AB, & que la puiſſance P qui pouſſe ce coin ſuivant PD eſt auſſi partagée en deux forces partielles, & que chacune d'elles pouſſe ſuivant PD l'une des parties ADP, BDP du coin iſoſcele. Chacune de ces forces partielles *p* tend à vaincre la preſſion ou réſiſtance qui ſe fait aux points F, E : cette preſſion ou réſiſtance fait naître deux efforts, l'un ſuivant DP, & l'autre ſuivant la perpendiculaire à DP ; l'effort perpendiculaire que la réſiſtance ſuivant EC donne, ſoutient l'effort perpendiculaire qui naît de la preſſion ou réſiſtance ſuivant FC, & les forces partielles de la puiſſance P s'oppoſent à la tendence que les coins ADP, Fig. 59. BDP reçoivent ſuivant DP, comme il a été expliqué dans les réflexions préliminaires, & dans ce qui vient d'être dit de l'équilibre de la puiſſance P avec le poids R retenu ſur le coin ADB par la corde CO ; car le poids R peut repréſenter les efforts perpendiculaires à DP par leſquels les deux coins ADP, BDP ſe preſſent mutuellement : la traction de la corde CO parallele à la baſe, la tendence que chaque coin partiel reçoit ſuivant DP, & l'effort ſuivant CF, lequel réſulte de la peſanteur du poids R & de la traction ſuivant CO peut repréſenter les preſſions ſuivant EC, FC.

284. Les deux coins ADP, BDP ſont donc comme deux plans inclinez qui ont pour baſe commune DP, pour hauteurs AP, BP, &

& pour longueurs AD, BD, & ſur chacun deſquels trois forces ou puiſſances ſont en équilibre, l'une d'elles eſt perpendiculaire à la baſe commune DP, la ſeconde eſt parallele à la même baſe, & la troiſiéme qui dérive des deux autres ou de laquelle celles-ci dérivent, eſt perpendiculaire à la longueur du plan incliné. Dans la propoſition précedente on a comparé la puiſſance P avec le poids R, parce que c'eſt le poids R qui fait naître les forces ſuivant CO & FC, & que d'ailleurs ſi cette puiſſance eſt en équilibre avec le poids R, elle ſera auſſi équilibre avec les efforts ſuivant CO, CF; mais dans le cas dont il s'agit ici, on comparera les forces partielles de la puiſſance P avec les preſſions ou réſiſtances ſuivant FC, EC, parce que ce ſont ces réſiſtances ou preſſions qui font naître les efforts ſuivant DP & la perpendiculaire à cette baſe commune, & que d'ailleurs ſi les forces partielles de la puiſſance P ſont en équilibre avec ces preſſions ou réſiſtances qu'elles tendent à ſurmonter, elles ſont auſſi en équilibre avec les efforts qui en naiſſent.

285. 2°. Lorſque la puiſſance P pouſſe le coin ADB, & que les fibres R, R réſiſtent en des ſens oppoſez, l'effet eſt le même que ſi leur réſiſtance totale étant réunie ſur la ligne *rr*, il y avoit deux puiſſances ou réſiſtances *r*, *r* dont la ſomme fut égale à la réſiſtance totale R, & qui réagiſſent chacune ſuivant *r* R, pour empêcher que les côtez de la fente ne s'écartent l'un de l'autre en tournant autour du point O que l'on conſidere comme l'appui ou le centre du mouvement.

PROPOSITION VINGT-UNIE'ME.

286. *Si la puiſſance* P *pouſſe le coin* ADB *ſuivant la direction* PD, *dans l'équilibre elle eſt à la réſiſtance* R *comme le produit de la tête ou baſe* AB *& de la diſtance* OR *du point* O *à la direction* r r *de cette réſiſtance, eſt au produit des longueurs des deux faces* AD+BD, *& de la perpendiculaire* OL *menée du point* O *à la direction* CE *de la preſſion ou réſiſtance qui eſt au point* E, *c'eſt-à-dire*, P. R :: AB × OR. 2BD × OL. Fig. 60.

Demonstration. On nommera E la preſſion ou réſiſtance qui ſe fait au point E, *p* la partie de la force de la puiſſance P qui pouſſe le coin ſuivant PD, & que l'on conçoit appliquée au coin BDP, l'autre force partielle appliquée au coin ADP ſera égale à *p*, puiſque les réſiſtances en E, F ſont égales: ainſi P=2*p* de même R=2*r*. Cela poſé, la propriété du plan incliné donne *p*. E :: BP. BD. Car lorſque la puiſſance P pouſſe le coin ſui-

vant une direction parallele à la baſe commune DP, la preſſion ou tendence ſuivant EC eſt ſemblable à un poids qui tendroit à deſcendre le long de DP comme ſur un plan incliné, ainſi qu'il a été prouvé dans la propoſition précedente : la force partielle p qui retient cet effort ſuivant une direction parallele au plan incliné, eſt donc à cet effort comme la hauteur eſt à la longueur, c'eſt-à-dire, comme BP eſt à BD : ceci a été encore prouvé (279), & la Fig. 59 rend la choſe palpable. La propriété du levier donne E. r :: OR. OL. Si on multiplie par ordre les termes des deux proportions, & qu'on diviſe les deux premiers produits par E, on aura p. r:: BP × OR. BD × OL. Et ſi l'on double tous les termes, on aura $2p$. $2r$ :: 2BP × OR. 2BD × OL ; mais $2p$ = P. $2r$ = R. 2BP = AB, & 2BD = AD + BD ; donc P. R :: AB × OR. 2BD × OL ; c'eſt-à-dire que la puiſſance P eſt à la réſiſtance totale R comme le produit de la baſe ou tête AB & de la diſtance OR du point O à la direction de cette réſiſtance eſt au produit des deux faces du coin & de la diſtance du point O à la direction de la réſiſtance en E ou F.

287. Si on ſuppoſe que le coin n'agiſſe pas ſur la réſiſtance R avec le ſecours d'un levier, & que l'on veuille avoir ſeulement le rapport de la puiſſance P à la ſomme des réſiſtances ou preſſions en E, F, il n'y a qu'à doubler tous les termes de la premiere proportion, & l'onaura $2p$. 2E :: 2BP. 2BD. Or $2p$ = P. 2E = E + F. 2BP = AB & 2BD = AD + BD. Donc P. E + F :: AB. AD + BD ; c'eſt-à-dire, que la puiſſance P eſt à la ſomme des réſiſtances E + F comme la tête ou baſe du coin eſt à la ſomme des côtez ou faces AD + BD.

SECONDE DEMONSTRATION de la propoſition tirée de la principale propriété de la décompoſition des forces.

Fig. 61. Lorſque la puiſſance P pouſſe le coin dans la fente ſuivant la direction PD, l'effort qu'elle fait ſuivant cette direction, ſe décompoſe en deux autres qui ſont perpendiculaires aux côtez de la fente & aux faces du coin, leſquels efforts ſont dirigez ſuivant CFH, CEI : ſi on ſuppoſe que la force ſuivant PD eſt exprimée par la diagonale CK du parallelogramme IH, les côtez CI, CH expriment les efforts qui réſultent de la force ſuivant CK, & par leſquels la puiſſance P tend à ſurmonter les réſiſtances en E, F avec leſquelles ces efforts ſont en équilibre (*Liv.* I. 196.) Ce la poſé, 1°. les côtez CH, CI ſont égaux, puiſque les efforts qu'ils repréſentent ſont égaux ; donc les quatre côtez du parallelogramme IH ſont égaux entr'eux. 2°. Le triangle iſoſcele CHK eſt ſemblable au

tirangle ADB, car le triangle CDF eſt ſemblable au triangle ADP, les angles en F & en P ſont droits, & l'angle CDF eſt commun; donc l'angle DCF eſt égal à l'angle A; donc les triangles iſoſceles CHK, ADB ont les angles C & A égaux; donc les deux autres du premier ſont égaux aux deux autres du ſecond; donc les triangles CHK, ADB ſont ſemblables. Donc AB. AD :: CK. CH; mais l'on a auſſi P.F::CK.CH; donc P. F::AB.AD. Si on double le ſecond & le quatriéme terme, on aura encore P. 2F :: AB. 2AD, c'eſt-à-dire, que la puiſſance P eſt à la ſomme des réſiſtances F+E=2F comme la tête ou baſe AB eſt au double de la longueur AD, ou à la ſomme des longueurs AD+BD. Si on veut avoir le rapport de la puiſſance P à la réſiſtance en R, on le peut en continuant comme dans la premiere démonſtration.

288. Corollaire. Il eſt évident que plus la tête du coin ſera petite par rapport aux côtez AD,DB, plus la force ou puiſſance P néceſſaire pour l'équilibre ſera petite.

De la machine funiculaire ou des poids soutenus avec des cordes.

289. Cette machine peut être rapportée au plan incliné, ou au levier, ou être démontrée immédiatement par le principe des forces compoſées. Soit le poids R en équilibre avec les puiſſances P,F qui tirent ſuivant les directions CP,CF que l'on ſuppoſe concourir au centre C, ſi on les prolonge juſqu'à la ſurface du globe aux points A,G; que de ces points on mene les tangentes LH,IH, il eſt évident que le plan incliné LH qui dans le cas d'équilibre réſiſte ſuivant la perpendiculaire GCF, ſoutient le poids R à l'égard de la puiſſance P comme feroit la puiſſance F en tirant ſuivant la même direction GCF; pareillement la puiſſance P ne fait à l'égard du poids R & de la puiſſance F que ce que feroit un plan incliné qui réſiſteroit ſuivant ACP. On peut encore regarder le cordon CF ou CP comme un levier dont l'appui ſeroit en F ou en P, ſi le cordon CF ou CP étoit une ligne inflexible, il n'y auroit aucune difficulté; la puiſſance P en agiſſant contre le poids R tendroit à faire tourner cette ligne autour du point F, & la puiſſance F feroit effort pour faire tourner la ligne CP autour du point P: or quoique les cordons CF, CP ſoient flexibles, ils réſiſtent de même que s'ils étoient inflexibles. D'où l'on voit que la machine funiculaire peut être rapportée ou au plan incliné ou au levier. Si on regarde les cordons CF ou CP comme un levier dont l'appui Fig. 62.

ſeroit en F ou en P, les puiſſances R, P ſeront appliquées au même point C du levier.

PROPOSITION VINGT-DEUXIE'ME.

Fig. 62. 290. *Si deux puiſſances* F, P *tiennent en équilibre un poids* R *avec les cordons* OF, MP *dont les prolongemens paſſeroient par le centre* C *du globe ; je dis que le poids* R *eſt à l'une des puiſſances comme le ſinus de l'angle de leurs directions, eſt au ſinus de l'angle formé par la direction du poids* R *& de la puiſſance qui n'entre point dans la proportion : ainſi le poids* R *eſt à la puiſſance* P *comme le ſinus de l'angle* ACG *ou* GCP *eſt au ſinus de l'angle* GCN.

Si on conſidere la machine funiculaire comme faiſant l'office de plan incliné ou de levier, on verra la vérité de la propoſition ſans qu'il ſoit néceſſaire de la prouver de nouveau, car elle a été démontrée dans le plan incliné, & lorſqu'on a parlé de l'appui dans le levier (157.243) : c'eſt pourquoi on peut relire ces deux endroits. Lorſqu'on ſuppoſe que les directions CM, CO des puiſſances P, F concourent au centre C, ce n'eſt que pour la facilité de la démonſtration, car dans l'équilibre les puiſſances P, F peuvent être appliquées à tout autre point *c* de la direction CN du poids, pourvu que les directions *cf*, *cp* ſoient paralleles aux directions CF, CP.

Fig. 63. DEMONSTRATION tirée du principe des mouvemens ou forces compoſées. Si les puiſſances P, F étoient appliquées au point C où leurs directions concourent, de leurs efforts particuliers ſuivant CP, CF, naîtroit un effort moyen qui ſeroit placé ſur la diagonale CD du parallelogramme AB formé ſur les directions, & cet effort ſeroit aux puiſſances P, F comme la même diagonale CD, eſt aux côtez CA, CB ; mais parce que le poids R eſt en équilibre avec les puiſſances P, F, il faut qu'il ſoit auſſi en équilibre avec l'effort moyen ; il faut donc que la peſanteur du poids R ſoit égale & directement oppoſée à cet effort, ſans quoi l'équilibre ſeroit impoſſible ; donc le poids R eſt exprimé par la diagonale CD ; donc les puiſſances P, F & le poids R ſont répreſentez par les côtez AC, CB, CD du parallelogramme AB, ou bien par les côtez AC, AD, CD du triangle ACD : or ces côtez ſont entr'eux comme les ſinus des angles oppoſez ; ainſi le côté CD eſt au côté CA comme le ſinus de l'angle CAD ou de ſon ſupplément ACB eſt au ſinus de l'angle ADC ou de ſon égal DCB ; donc le poids R eſt à la puiſſance P comme le ſinus de l'angle ACB eſt au ſinus de l'angle DCB, c'eſt-à-dire, que le poids R eſt à l'une des puiſſances, par exemple P, comme le ſinus de l'angle des directions

eſt au ſinus de l'angle DCB formé par la direction du poids & de la puiſſance F qui n'entre point dans la proportion.

On prouvera de la même maniere que le poids R eſt à la puiſſance F comme le ſinus de l'angle ACB eſt au ſinus de l'angle ACD. On prouveroit pareillement que la puiſſance P eſt à la puiſſance F comme le ſinus de l'angle DCB eſt au ſinus de l'angle DCA.

291. Corollaires. 1°. Tant que l'angle des directions ACB eſt aigu, la peſanteur du poids R eſt plus grande que l'effort d'aucune des puiſſances P ou F ; car pour lors le ſinus de l'angle ACB eſt plus grand que le ſinus de chaque angle partiel ACD, DCB. Donc la peſanteur du poids R qui eſt répréſentée par le ſinus de l'angle ACB, eſt plus grande que chacune des puiſſances P ou F qui ſont exprimées par les ſinus des angles DCB, DCA. Il en ſera de même ſi l'angle ACB eſt droit ; mais ſi l'angle ACB eſt obtus, il pourra ſe faire que le ſinus de l'angle DCB ſoit égal ou même plus grand que le ſinus de l'angle ACB ; la puiſſance P ſera donc égale ou plus grande que la peſanteur du poids R ; la puiſſance P eſt plus grande que l'effort du poids R, par exemple, lorſque la puiſſance F eſt horizontale ou bien lorſque ſa direction eſt inclinée au-deſſous de l'horizon ; car pour lors la puiſſance P ſoutient non ſeulement le poids R, mais encore l'effort de la puiſſance F, ce qui eſt évident, puiſque dans ces cas la puiſſance F ne ſoutient aucune partie du poids R, comme lorſque ſa direction eſt horizontale, & que dans le cas où cette puiſſance tire au-deſſous de l'horizon, elle fait effort pour faire deſcendre le poids R. Fig. 62. 63. Fig. 64. 65.

292. 2°. Tant que le poids R aura un rapport fini avec les puiſſances P, F, le ſinus de l'angle ACB aura auſſi un rapport fini avec les ſinus des angles DCB, DCA, par conſéquent la corde ACB fera un pli au point C, & ne pourra être tendue en ligne droite : ainſi quand même le poids R ne ſeroit que la millieme, la dix-milliéme &c. partie de la puiſſance P ou F le ſinus de l'angle ACB ſera la milliéme ou dix-milliéme partie du ſinus de l'angle DCB ou de l'angle DCA : par conſéquent les cordons AC, CB feront un angle au point C, & ne pourront être en ligne droite, quelque ſituation que les puiſſances P, F donnent à leurs directions.

293. 3°. Si une corde d'une certaine peſanteur & d'une longueur un peu conſidérable, eſt tirée horizontalement par ſes deux extrêmitez, elle fera une courbure ſenſible, & il ſera comme impoſſible de la tendre en ligne droite. Car chaque partie de la corde ſera un petit poids qui la tirera en embas ; or ſi petit que ſoit le pli

ou courbure que chaque petit poids produit au point de ſuſpenſion & aux deux extrêmitez ſur leſquelles il agit auſſi, comme la ſomme des poids eſt ſuppoſée avoir un rapport fini aux puiſſances qui bandent la corde ; il s'enſuit que la ſomme des petits plis qu'ils produiſent aux deux extrêmitez, & dans la longueur doit être ſenſible, la corde doit donc s'écarter de la ligne droite ou horizontale, & ſe courber ; ce qui eſt conforme à l'expérience, & on peut l'obſerver facilement en pluſieurs occaſions, par exemple, lorſqu'on fait remonter la riviere à des grands bateaux qui ſont tirez par pluſieurs chevaux, on verra que la corde n'eſt jamais tendue en ligne droite lors même que les chevaux tirent avec plus de force, & qu'ils peinent le plus.

Fig. 66. 294. 4°. Si le poids R eſt ſuſpendu avec une corde au point fixe P qui tient lieu d'une puiſſance P, & que la corde de ſuſpenſion PK ſoit tirée ſuivant une direction horizontale CF par la puiſſance F ; je dis que cette puiſſance mettra le poids R en mouvement quelque grand qu'il ſoit, & l'obligera à monter quoique cette force ſoit fort petite, (on ſuppoſe néanmoins qu'elle a un rapport fini avec le poids R ;) car puiſque la puiſſance F agit ſur la corde PK & ſur le poids R, le ſinus de l'angle ACD formé par la direction du poids & de la corde AC, aura un rapport fini avec le ſinus de l'angle ACB fait par les directions CA, CB ; car la puiſſance F eſt ſuppoſée avoir un rapport fini avec le poids R : de plus dans l'équilibre la puiſſance F & le poids R ſont dans la raiſon des ſinus des angles ACD, ACB ; donc le rapport de ces ſinus eſt un rapport fini ; donc l'angle ACD eſt d'une grandeur finie ; donc la corde ACO fait un pli ou un angle au point C ; donc la ligne AO qui joint les extrêmitez A, O, eſt plus courte que la corde ACO ; donc le point C a été mis en mouvement, & le poids R eſt monté, puiſque le point O eſt plus près du point de ſuſpenſion que le point K, la plus petite force peut donc mettre un fort grand poids en mouvement lorſqu'elle tire ſuivant la direction horizontale.

Fig. 63. 295. 5°. Lorſque deux puiſſances P, F tiennent un poids R ſuſpendu avec des cordes, on peut déterminer la partie de ce poids que chaque puiſſance ſoutient. On va ſe ſervir pour cela de la décompoſition des mouvemens ou des forces. On ſuppoſe que les puiſſances P, F ſont exprimées par les côtez AC, CB, & le poids R par la diagonale CD du parallelogramme AB. Cela poſé, ſi des points A, B on abbaiſſe ſur la diagonale CD les perpendiculaires AL, BI, les parties CL, CI de cette diagonale compri-

ſes entre le point C, & les perpendiculaires expriment les parties du poids R que les puiſſances P, F ſoutiennent : car ſi l'on conçoit que les lignes CL, AL ſont les côtez d'un rectangle qui a pour diagonale AC, deux puiſſances qui ſeroient appliquées au point C ſuivant CL & ſuivant une parallele à AL, feroient ſur le poids R la même impreſſion que la puiſſance P, & lapuiſſance P exerce ſur le poids R la même action que les deux forces exprimées par CL, AL ; la force qui tire au point C parallelement à AL ne tend ni à faire monter le corps, ni à le faire deſcendre, mais la force répréſentée par CL agit directement contre le poids, la force que la puiſſance P exerce contre le poids R, & conſéquemment la partie qu'elle en ſoutient eſt donc exprimée par CL. On prouvera par un raiſonnement ſemblable que la partie CI de la diagonale CD, répréſente la portion que la puiſſance F ſoutient dans le poids R. Il reſte à démontrer que l'équilibre eſt entre le poids R & les forces que l'on vient de ſubſtituer aux puiſſances P, F. Les triangles BCI, ADL ſont ſemblables, de plus les côtez BC, AD ſont égaux ; donc AL=BI & DL=CI ; donc les parties du poids R exprimées par les parties CL, CI, ſont exprimées priſes enſemble par la diagonale CD ; elles ſont donc égales au poids R ; donc les efforts répréſentez par CL, CI, ſont équilibre avec le poids R. D'ailleurs les forces exprimées par AL, BI, ſont égales, & elles tirent le point C en des ſens oppoſez ; donc elles ſe ſoutiennent ſans que l'une puiſſe l'emporter ſur l'autre ; donc les forces que les puiſſances P, F exercent ſur le poids R tant ſuivant la diagonale CD, que ſuivant la perpendiculaire à la même CD, ſont en équilibre entr'elles, & avec le poids R & les lignes CL, CI expriment les parties de ce poids que les puiſſances P, F ſupportent.

Dans la Figure 64, où la puiſſance F tire horizontalement, la partie CI eſt nulle, & la partie CL eſt égale à la diagonale CD. D'où il ſuit que la puiſſance F ne ſupporte aucune partie du poids R, ce qui eſt d'ailleurs évident. La ſeule puiſſance P eſt donc chargée de tout ce poids, & il faut qu'elle faſſe avec cela un effort AL, égal & contraire à celui de la puiſſance F. Dans la Fig. 65, l'effort CL que la puiſſance P fait ſur la direction du poids R, eſt égal à la peſanteur du poids R exprimée par DC, plus à l'effort CI par lequel la puiſſance F tend à faire deſcendre le poids.

CHAPITRE TROISIE'ME.

DES MACHINES COMPOSE'ES.

296. LES *machines compoſées* ſont des aſſemblages de machines ſimples qui concourent toutes à ſoutenir ou à élever un même poids ou fardeau. Les machines ſimples ou compoſantes peuvent être de même ou de differente eſpece.

Dans les machines compoſées chaque machine ſimple eſt tirée ou pouſſée de même que ſi elle étoit ſeule, & l'effort qui tend à la faire tourner, ſe communiquant à la machine ſimple ſuivante devient une cauſe qui tend auſſi à mouvoir cele-ci : ainſi l'effort de la puiſſance ſe tranſmet depuis la premiere machine ſimple à laquelle elle eſt appliquée juſqu'à la derniere. On voit par là que chaque machine ſimple en même-tems qu'elle eſt tirée ou pouſſée, elle tire auſſi ou pouſſe celle qu'elle rencontre. D'où il ſuit que l'effort qui eſt produit à la rencontre de deux machines ſimples, peut être conſideré ſous deux rapports. Car la premiere machine ſimple, c'eſt-à-dire, celle à laquelle la puiſſance où l'effort s'applique immédiatement tend à faire tourner la ſeconde, mais elle eſt arrêtée ou retardée par la réſiſtance que cette ſeconde lui oppoſe ; c'eſt pourquoi l'effort qui eſt produit à la rencontre de deux machines ſimples, peut être conſideré 1°. comme une *cauſe* qui tend à produire le mouvement. 2°. Comme une réſiſtance, parce qu'effectivement cet effort dans l'équilibre eſt empêché par une réaction ou réſiſtance égale au même effort.

On ne fait point ici le dénombrement des machines compoſées, elles peuvent être variées en bien des manieres ſelon les uſages auxquels elles peuvent ſervir, & le génie particulier de ceux qui les inventent. On ſe contentera d'expoſer celles dont le ſervice eſt plus commun, & qui ſe rencontrent plus fréquemment aux ouvrages qu'on entreprend.

DES MOUFFLES.

Fig. 67. 68. 69. 70. 297. Les *mouffles* ſont des aſſemblages de pluſieurs poulies dont les unes ſont fixes & les autres mobiles : les poulies mobiles ſont enchaſſées pour l'ordinaire toutes dans une même chape, de même que les poulies fixes. Chacun des deux aſſemblages des poulies fixes & mobiles eſt appellé *mouffle* ; celui des poulies mobiles eſt appellé *mouffle mobile* ; celui des poulies fixes, *mouffle fixe*. Il y a differentes

differentes manieres de mouffler les poulies : on ſe contentera de figurer la plus commune à laquelle on peut rapporter les autres mouffles, parce que la maniere d'eſtimer la force néceſſaire pour ſoutenir le poids, eſt la même.

1°. La corde qui embraſſe toutes les poulies tant fixes que mobiles, eſt attachée par l'un des bouts à l'une des extrêmitez de la chappe fixe ou mobile, & la puiſſance tient l'autre bout. Le poids eſt ſuſpendu à l'extrêmité inférieure de la chappe mobile.

2°. Les differens tours de la corde peuvent être paralleles entr'eux, ou bien étant prolongez concourir. Lorſqu'ils ſont paralleles, la ligne droite qui joint les points d'attouchement paſſe par le centre de la poulie & eſt un diametre comme HG.

3°. La corde qui embraſſe toutes les poulies eſt par tout également tendue ; car ſi elle étoit plus tendue dans un de ſes tours que dans les autres, elle ſeroit tirée avec plus d'effort dans le reſte ; la partie qui ſeroit plus lâche céderoit ; & elle s'allongeroit du côté où ſeroit la plus grande tenſion, juſqu'à ce qu'enfin la corde fût également tendue. Ceci ſe prouve encore par ce qui a été dit du rapport de la puiſſance au poids lorſqu'il n'y a qu'une poulie & qu'elle eſt fixe.

4°. Il eſt évident que l'effort par lequel chaque cordon eſt tiré eſt égal à l'effort de la puiſſance P qui tend à tirer à elle la poulie X.

5°. Dans le cas où les cordons qui touchent les poulies ſont paralleles, les charges que le poids R produit aux centres des poulies mobiles ſont chacune doubles des efforts contraires par leſquels les mêmes cordons leur réſiſtent aux points d'attouchement ; ainſi l'effort en M eſt double de l'effort en K ou en L ; il en eſt de même des charges portées par les centres des autres poulies mobiles. C'eſt pourquoi comme les efforts cauſez aux points d'attouchement des poulies mobiles ſont égaux entr'eux, il s'enſuit que les charges que portent les centres de ces poulies ſont auſſi égales entr'elles. Fig. 67.

D'où il ſuit que dans le cas ou les cordons ſont paralleles, l'action du poids R ſur les poulies mobiles ſe diſtribue de maniere que le centre de chacune d'elles eſt chargé d'une partie égale de ce poids. Dans le cas préſent où il y a trois poulies mobiles, chacune d'elles ſoutient le tiers du poids R, ſuppoſé que l'extrêmité S de la corde ſoit attachée à la chape fixe.

Mais ſi l'extrêmité S eſt attachée à la chape mobile, outre que le poids R produit deux charges aux centres M, N dont chacune eſt le double des efforts que les cordons font aux points d'attou- Fig. 68.

chement des poulies X, Y, l'extrêmité S de la chape mobile eſt tirée en embas avec un effort égal à celui de la puiſſance P, ou à la moitié des charges portées par les centres M, N.

Fig. 69. 70. 6°. Dans les cas où les directions des cordons concourent, les charges que le poids R produit aux centres M, N des poulies mobiles ne ſont pas le double des efforts contraires que les cordons font aux points d'attouchement de ces poulies ; car pour lors ces charges ne ſont exprimées que par les ſoutendentes KL, GH, au lieu que les réſiſtances que les cordons font aux points d'attouchement ſont exprimées par les rayons KM, GN.

7°. Si les triangles KML, GNH ſont ſemblables, les charges en M & en N ſont égales ; car elles ont même raiſon aux réſiſtances en K & en G qui ſont égales. Mais ſi les triangles qu'on vient de nommer ne ſont pas ſemblables, les charges en M & en N ſont inégales, quoique les réſiſtances en K & en G ſoient égales.

Fig. 70. 8°. Enfin outre les charges que le poids R produit aux centres M & N, le point de ſuſpenſion S de la chape mobile eſt chargé d'un poids égal à l'effort de la puiſſance P, ce qui ſuit de ce que toutes les parties du cordon ſont également tendues.

PROPOSITION VINGT-TROISIE'ME.

Fig. 67. 298. *Si une puiſſance* P *eſt en équilibre avec un poids* R *à l'aide de deux mouffles, l'une mobile & l'autre immobile, en ſorte que la corde qui embraſſe toutes les poulies ſoit par-tout parallele à elle-même, & que le point de ſuſpenſion* S *ſoit à la chape fixe ; elle eſt au poids* R *comme l'unité eſt au double du nombre des poulies mobiles.*

DEMONSTRATION. Pour prouver la propoſition, il ſuffiroit de dire que la puiſſance P fait un effort égal à la moitié de la charge que le poids R produit au centre M, & que cette charge n'eſt que le tiers de la peſanteur du poids R, d'où il ſuit que l'effort de la puiſſance P eſt égal à la ſixiéme partie du poids R, c'eſt-à-dire, que la puiſſance P eſt au poids R comme 1 eſt à 6 qui eſt double du nombre des poulies mobiles.

Mais pour montrer de quelle maniere ſe fait cet équilibre, on va faire voir que les poulies mobiles ſe réſiſtent les unes aux autres de telle ſorte que la puiſſance P ne porte que la ſixiéme partie du poids R.

Afin que l'équilibre ſubſiſte, il faut oppoſer aux trois charges que le poids R produit aux centres O, N, M les réſiſtances néceſſaires. Chacune de ces charges eſt le tiers du poids R. Cela poſé, la charge O produit aux points E, F deux efforts dont chi-

cun eſt la moitié de cette charge, le point S réſiſte à l'effort en E, reſte l'effort en F qu'il faut ſoutenir ; mais la charge en N produit auſſi en G & en H deux efforts égaux entr'eux, & égaux aux efforts en F ; l'effort en H étant contraire à l'effort en F, reſte l'effort en G qu'il faut ſoutenir ; mais la charge en M produit deux efforts en L & en K, qui ſont égaux entr'eux & à l'effort en G : l'effort en L étant contraire à l'effort en G, il reſte l'effort en K qu'il faut ſoutenir & auquel la puiſſance P réſiſte. On voit donc que tous les efforts que les charges des centres O,N,M produiſent aux points d'attouchement s'empêchent mutuellement les uns les autres, & que la puiſſance P n'a à ſoutenir que l'effort K qui n'eſt que la ſixiéme partie du poids R ; donc la puiſſance P eſt à ce poids comme l'unité eſt à 6, c'eſt-à-dire, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies mobiles.

299. On pourroit démontrer cette propoſition par le principe de M. Deſcartes, en faiſant voir que les pieces de la machine ſont diſpoſées de maniere que la puiſſance parcourt ou eſt diſpoſée à parcourir ſuivant ſa direction un eſpace ſix fois plus grand que celui que le poids R parcourt ou tend à parcourir ſuivant la ſienne, & par conſéquent que l'effort abſolu de ſa peſanteur, doit être ſix fois plus grand que celui de la puiſſance P pour tenir cette puiſſance en équilibre.

300. *Si le point de ſuſpenſion* S *eſt à la chape mobile, la puiſſance* P *ſera au poids* R *comme l'unité eſt à la ſomme de l'unité & du nombre double des poulies mobiles ; c'eſt-à-dire, comme* 1 *eſt à* 7 *lorſqu'il y a trois poulies mobiles, comme* 1 *eſt à* 5 *lorſqu'il y a deux poulies mobiles &c.* Fig. 68.

Car le poids R tire en embas le point S auquel l'effort en G réſiſte : ainſi le poids R produit aux centres M & N deux efforts dont chacun eſt double de la puiſſance P, & outre cela un effort en S égal à la même force P : or les trois charges en M, en N & en S ſont le poids total R ; donc la puiſſance P eſt au poids R comme l'unité eſt à cinq, c'eſt-à-dire, comme l'unité eſt à la ſomme de l'unité & du nombre double des poulies mobiles.

301. Si les cordons ceſſent d'être paralleles, & que les triangles KML, GNH ſoient ſemblables, les deux charges M & N ſeront encore égales, & l'on aura P . M :: KM . KL. Si l'on double les deux conſéquens, l'on aura P . 2M :: KM . 2KL ; *c'eſt-à-dire, que la puiſſance* P *eſt au double de la charge* M *ou ce qui revient au même au poids* R *comme le rayon de l'une des poulies mobiles eſt au double de la ſoutendente.* S'il y avoit plus de 2 poulies mobiles, & Fig. 69.

que les triangles, tels que KML & GNH, fuſſent ſemblables, *la puiſſance ſeroit au poids comme le rayon d'une des poulies mobiles ſeroit à la ſoutendente multipliée par le nombre des poulies mobiles.*

302. Si les triangles, tels que KML, GNH, ne ſont point ſemblables, *la puiſſance* P *eſt au poids* R *comme l'unité eſt à la ſomme des quotiens qui réſultent en diviſant les ſoutendentes des poulies mobiles par les rayons, ou comme l'unité eſt à la ſomme des rapports des ſoutendentes des poulies mobiles à leurs rayons. Ainſi* $P . R :: 1 . \frac{KL}{KM} + \frac{GH}{GN}$. Car $KM . KL :: P . \frac{KL \times P}{KM} = M$. L'on a auſſi $GN . GH :: P . \frac{GH \times P}{GN} = N$. Les quatriémes termes de ces deux proportions expriment les charges M & N dont la ſomme eſt égale au poids R. L'on aura donc R ou $R \times 1 = \frac{KL \times P}{KM} + \frac{GH \times P}{GN}$; d'où l'on déduit $P.R :: 1 . \frac{KL}{KM} + \frac{GH}{GN}$. puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

303. Si l'on ôte les fractions du dernier terme de la proportion, on trouvera que la puiſſance P eſt au poids R comme le produit des rayons des poulies mobiles eſt à la ſomme des produits faits chacun de la ſoutendente de chaque poulie mobile multipliée par les rayons de toutes les autres, c'eſt-à-dire, $P . R :: GN \times KM . KL \times GN + GH \times KM$ qui eſt la propoſition que l'on démontre ordinairement.

Fig. 70. 304. Si le point de ſuſpenſion S étoit à la chape mobile, le poids R ſeroit égal à la ſomme des charges M + N & à l'effort en S qui ſeroit égal à la puiſſance P; ainſi l'on auroit R ou $R \times 1 = \frac{KL \times P}{KM} + \frac{GH \times P}{GN} + P$; d'où l'on déduiroit $P . R :: 1 . \frac{KL}{KM} + \frac{GH}{GN} + 1$.

Fig. 71. 305. Si la puiſſance P ſoutient un poids R à l'aide de pluſieurs poulies mobiles X, Y diſpoſées de maniere que la corde qui embraſſe une poulie, ſoit attachée par un bout à un point fixe, & par l'autre à la chape de la poulie ſuivante, que les cordes ſoient toutes paralleles entr'elles, la puiſſance P ſera la moitié de la charge M, la charge M la moitié de la charge N, ou la moitié du poids R: ainſi ſi le poids R eſt de 8 livres, la charge M ſera de 4 livres, & la puiſſance P de deux livres; donc la puiſſance P eſt au poids R comme 1 eſt à 4, c'eſt-à-dire, comme le premier terme de la progreſſion 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, eſt au troiſiéme lorſqu'il y

a deux poulies mobiles, comme 1 eſt au quatriéme lorſqu'il y a trois poulies mobiles; s'il y avoit 5 poulies mobiles, la puiſſance P ſeroit au poids comme le premier terme eſt au ſixiéme, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à 32, &c.

306. Si les cordes n'étoient pas paralleles, la puiſſance ſeroit au poids comme le produit des rayons des poulies au produit des ſoutendentes, ce qu'il eſt aiſé à prouver. Car l'on auroit les proportions Fig. 72.

P. M :: KM . KL
M . N ou R :: NG . GH

Si on multiplie par ordre les termes de ces proportions, qu'on diviſe les deux premiers produits par M, on aura P. R :: KM×NG×KL×GH.

DES ROUES DENTÉES.

307. *Les roues dentées* ou *à dents* ſont des roues dont les circonférences ſont diviſées en un certain nombre de dents égales & également diſtantes les unes des autres. Si on joint pluſieurs de ces roues, de maniere que les unes agiſſent ſur les autres & les faſſent tourner, on aura une machine compoſée des roues à dents, autrement *rouage*: pour qu'une roue puiſſe en faire tourner une autre, on entaille le rouleau de la roue auquel on donne un certain nombre de dents égales entr'elles & égales à celles de la roue ſuivante, on fait en ſorte que les dents du rouleau de la roue qui précede, engrainent dans les dents de la roue ſuivante. Le rouleau d'une roue ainſi entaillé & diviſé en dents eſt appellé *pignon*. Chaque roue & ſon pignon ſont ſupportez par leur axe commun ſur deux appuis; la circonférence de la premiere roue, c'eſt-à dire de la roue à laquelle la puiſſance s'applique immédiatement, n'eſt point diviſée, elle porte ſeulement ſur ſon rouleau un pignon; & la derniere ou celle à laquelle le poids eſt ſuſpendu, n'a point de pignon. On voit bien que les dents de la premiere roue ſeroient inutiles, puiſqu'elles ne rencontrent aucun pignon, & qu'un pignon à la derniere roue ne ſeroit d'aucun uſage, puiſque la corde qui ſoutient le poids s'entortille ſur le rouleau de cette roue. Fig. 73.

308. Lorſque les dents d'une roue ſont placées ſur le plan même de la roue dans une diſpoſition qui pour l'ordinaire eſt perpendiculaire à ce plan, on fait en ſorte que les dents de la roue rencontrent une lanterne au lieu d'un pignon. Cette lanterne eſt un cylindre creux dont les deux baſes tiennent enſemble au moyen de pluſieurs *bâtons* ou *fuſeaux* de même groſſeur implantez perpendiculairement ſur les plans des deux baſes & à égales diſtances les uns des autres. Fig. 64.

PROPOSITION VINGT-QUATRIE'ME.

309. *Dans les roues dentées la puiſſance eſt au poids comme le produit des rayons des rouleaux ou pignons eſt au produit des rayons des roues.*

Fig. 73. DEMONSTRATION. Suppoſons que le rayon GA du rouleau de la roue X ſoit le tiers du rayon AD de la roue; que le rayon DB du pignon de la roue Y ſoit la moitié du rayon BL de la roue, & que le rayon LC du pignon de la roue Z ſoit le quart du rayon CM de la roue, les rayons des trois roues ſeront 3, 2, 4, & les rayons des trois pignons ou rouleaux ſont 1, 1, 1, il faut donc prouver que la puiſſance P eſt au poids R comme 1 × 1 × 1 eſt à 3 × 2 × 4, c'eſt-à-dire, comme 1 eſt à 24.

310. Si la puiſſance P étoit immédiatement appliquée au point D de la roue X, ſon effort ne ſeroit que le tiers du poids, puiſque ſon point d'application D eſt trois fois plus diſtant du point d'appui A que n'eſt celui du poids R; mais ſi la puiſſance agit ſur le point D par le moyen d'une autre roue telle que Y, & qu'elle ſoit appliquée au point L qui eſt à la circonférence de cette roue, l'effort qu'elle fera au point L ne ſera que la moitié de celui qu'elle fait au point D qui eſt commun à la roue X & au pignon de la roue Y, car le point L eſt deux fois plus diſtant de l'appui B que n'eſt le point D; ainſi l'effort que la puiſſance P fera au point L ne ſera que la moitié de celui qu'elle feroit ſi elle tiroit immédiatement le point D, c'eſt-à-dire, que cet effort ne ſera que la moitié du tiers de celui du poids R ou la ſixiéme partie de ce poids. Si enfin la puiſſance P tire le point M de la roue Z, l'effort qu'elle y fera ne ſera que le quart de celui qu'elle feroit au point L commun à la roue Y & au pignon de la roue Z, car la diſtance CM eſt quadruple de la diſtance LC: or l'effort que la puiſſance P feroit en L eſt la ſixiéme partie du poids R; donc celui qu'elle fera au point M n'eſt que le quart de la ſixiéme partie; c'eſt-à-dire, la 24e partie de l'effort du poids R; donc la puiſſance P eſt au poids R comme 1 eſt à 24, c'eſt-à-dire, comme le produit des rayons des pignons eſt au produit des rayons des roues.

311. *Si tous les rayons des pignons étoient égaux & ceux des roues auſſi, la puiſſance & le poids ſeroient entr'eux réciproquement comme les rayons d'une des roues & d'un des pignons élevez au degré de puiſſance marqué par le nombre des roues:* ainſi dans l'exemple de la figure où il y a trois roues, la puiſſance P ſeroit au poids R comme le cube du rayon de l'un des pignons ſeroit au cube du

rayon de l'une des roues ; ſi le rayon du pignon étoit le quart de celui de la roue, la puiſſance ſeroit au poids comme 1 eſt à 64.

312. On trouvera le même rapport dans la Figure 74, où la puiſſance P fait tourner la lanterne B avec un levier qui tient lieu de roue & dont la longueur peut être regardée comme le rayon d'une roue.

On peut démontrer la propoſition d'une maniere générale.

313. La puiſſance P tire ſuivant la direction MP, & ſoutient en équilibre le poids R à l'aide des trois leviers LM, DL, GD appuyez ſur les points fixes C, B, A. Lorſque la puiſſance P tire le levier LM ſuivant la direction MP perpendiculaire au bras LM, elle produit ſur le levier DBL un effort K dirigé ſuivant LQ. Mais l'effort K ainſi dirigé ſuivant LQ produit un effort N dirigé ſuivant DS auquel le poids R réſiſte ; P. K :: LC. CM
donc par la propriété du levier, l'on a K. N :: DB. BL
ces trois proportions, Si on multiplie par N. R :: GA. AD
ordre les termes des trois, qu'on diviſe les deux premiers produits par K × N, on aura P. R :: LC × DB × GA. CM × BL × AD.

De la vis sans fin.

314. La vis ſans fin eſt une machine compoſée d'une vis & d'une roue dentée, au rouleau de laquelle eſt ſuſpendu un poids. La vis eſt ſoutenue par les extrêmitez de ſon axe ſur deux appuis, de même que la roue dentée : la vis eſt ſans écrou, & elle n'avance point ſuivant la longueur de ſon axe, comme lorſquelle eſt engagée dans un écrou fixe ; mais lorſqu'on la fait tourner ſur ſes pivots au moyen de la manivelle PS, les ſpires ou hélices du cordon ſpiral de la vis, rencontrent les dents de la roue, & le poids R qui réſiſte au mouvement circulaire de la roue que la vis tend à lui imprimer, produit ſur ce cordon un effort ou preſſion ſemblable à celle qui eſt cauſée ſur le cordon de la vis ſimple lorſqu'elle eſt engagée dans ſon écrou ; ainſi ſi le poids R étoit immédiatement appliqué au point D, le rapport de la puiſſance au poids ſeroit le même que dans la vis ſimple ; mais la puiſſance P n'agit ſur le poids R que par l'effort K qu'elle produit au point D ; c'eſt pourquoi il faut dabord comparer la puiſſance P à l'ffort K, & enſuite l'effort K au poids R. Cela poſé, Fig. 75.

315. *La puiſſance* P *eſt au poids* R *comme le produit de l'intervalle qui eſt entre deux ſpires ou hélices de la vis multiplié par le*

rayon AE *eſt au produit de la circonférence décrite par* PS *multipliée par le rayon* EB *de la roue.*

On ſuppoſe que la direction de la puiſſance eſt perpendiculaire à l'axe de la vis. Si le rayon AE du rouleau n'eſt que le tiers du rayon EB de la roue, l'effort K que la puiſſance P produit en D ne ſera que le tiers de celui du poids R ; mais ſi l'intervalle CK qui eſt entre deux ſpires, n'eſt que la 30e partie de la circonférence décrite avec le rayon PS, la puiſſance P ne ſera que la 30e partie de l'effort K (265), & par conſéquent la 90e partie du poids R ; donc la puiſſance P eſt au poids R comme 1 eſt à 90 : or 1 & 90 ſont entr'eux comme les produits de AE par CK, & de EB par la circonférence dont le rayon eſt PS, puiſque AE n'eſt que le tiers de EB, & CK la trentiéme partie de la circonférence, qui a pour rayon PS ; donc, &c.

Fig. 76. *MACHINE COMPOSÉE D'UN TREUIL ET D'UN PLAN INCLINÉ.*

Cette machine ſe voit aux charretes ſur leſquelles on voiture le vin.

316. On ſuppoſe que la direction GR eſt parallele au plan incliné, & que la direction de la puiſſance eſt perpendiculaire au bras CD. Cela poſé,

317. *La puiſſance* P *eſt au poids* R *comme le produit de la hauteur* OS *du plan incliné multipliée par le rayon* CG *du rouleau eſt au produit de la longueur* SH *multipliée par le rayon* CD *du treuil.*

Si la puiſſance P étoit appliquée au point G de la corde GR, elle ſeroit au poids comme OS eſt à SH, c'eſt-à-dire, comme la hauteur du plan incliné eſt à ſa longueur : ainſi ſi la hauteur OS n'eſt que la moitié de la longueur SH, la puiſſance P ne ſeroit que la moitié du poids R ; mais la puiſſance P n'agit ſur le poids R que par l'effort K qu'elle produit en G. Or ſi le rayon CG n'eſt que le tiers du rayon CD, l'effort de la puiſſance P ne ſera que le tiers de l'effort K ; donc la puiſſance P ne ſera que le tiers de la moitié du poids R, c'eſt-à-dire, la ſixiéme partie de ce poids. Ainſi la puiſſance P & le poids R ſont entr'eux comme 1 eſt à 6, c'eſt-à-dire, comme le produit de la hauteur OS multipliée par le rayon CG, eſt au produit de SH multiplié par le bras CD.

MACHINE COMPOSÉE DE DEUX ROUES DENTÉES, & d'un levier.

318. Cette machine dont M. de la Garouſſe paſſe pour être l'inventeur, a été nommée levier de la Garouſſe. Par le moyen de

ce

ce levier le mouvement eſt continu ; l'allée & la venue ſont également miſes à profit. Cette machine au rapport de M. Varignon fut préſentée par l'auteur à l'Académie Royale des Sciences en l'année 1697. Voici, ſuivant M. Varignon les dimenſions des pieces de cette machine. 1°. Le levier AB qui tourne autour du point fixe C avoit 18 pouces moins $\frac{1}{4}$, ſçavoir 17 pouces pour la diſtance CA & $\frac{3}{4}$ de pouce pour la diſtance CB, les rayons IN, LQ des rouleaux étoient chacun de $\frac{1}{4}$ pouce, le rayon LO de la roue Z, avoit $1\frac{1}{2}$ pouce, & le rayon EI de la roue Y étoit d'un pouce, les bras BF, DK qui avoient la forme de pieds de biche, tiennent au levier AB avec les clavettes B, D, autour deſquelles ils peuvent ſe mouvoir librement. Lorſque le levier tourne autour du point fixe C, & qu'il décrit l'arc AM, le bras DK quitte les dents de la roue Y, & le bras BF la pouſſe ; mais lorſque le levier revient en décrivant l'arc MA, pour lors le bras BF ceſſe d'agir ſur la roue Y, & c'eſt le bras DK qui pouſſe à ſon tour ; de ſorte que le levier BA pouſſe ſans ceſſe la roue Y au moyen des bras BF, DK qui agiſſent alternativement contre les dents de cette roue, il eſt viſible que la puiſſance appliquée à l'extrêmité A du levier en le faiſant tourner autour du point fixe C produit aux points K, F des efforts qui ſont dirigez ſuivant DK, BF ; & ſi CH, CS ſont perpendiculaires aux directions BF, DK, elles ſeront les diſtances qu'il y a de l'appui C aux mêmes directions, (ces diſtances ſont ſuppoſées égales.) Cela poſé, *la puiſſance* P *eſt au poids* R *comme le produit des rayons* LQ, IN, *& de l'une des diſtances* CH *ou* CS *eſt au produit des rayons* LO, EI *des roues & du bras* CA *du levier* ; c'eſt-à-dire, ſelon les dimenſions précedentes, comme $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$ eſt à $1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 17$, ou comme $\frac{3}{16}$ eſt à $17 + \frac{17}{2}$, ou bien après avoir réduit ces deux nombres au même dénominateur, comme $\frac{3}{16}$ eſt à $\frac{408}{16}$, & encore comme 3 eſt à 408, & même encore comme 1 eſt à 136 en diviſant les deux nombres par 3.

319. Puiſque LQ & IN ont $\frac{1}{2}$ pouce de long chacun, & que le rayon LO en a $1\frac{1}{2}$, & le rayon EI, 1, ſi la puiſſance P étoit appliquée immédiatement à la roue Y, elle ſeroit au poids P comme $\frac{1}{4}$ eſt à $1 + \frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, comme le produit des rayons LQ, IN des rouleaux eſt au produit des rayons LO, EI des roues, ou bien ſi on réduit les produits au même dénominateur, comme le numérateur 1 eſt au numérateur 6 ; mais la puiſſance P ſoutient le poids R par les efforts K ou F qu'elle produit ſur la roue Y aux points K, F avec le levier AB ; les diſtances HC ou CS étant à

la diſtance CA comme $\frac{1}{4}$ à 17, ou en réduiſant les deux nombres au même dénominateur, comme 3 eſt à 68, on aura 68. 3 :: K. P $= \frac{3 \times K}{68}$; c'eſt-à-dire, que l'effort de la puiſſance P eſt les trois ſoixante-huitiémes de celui qui eſt produit en K; mais l'effort en K n'eſt que la ſixiéme partie du poids R; donc la puiſſance P n'eſt que les trois ſoixante dix-huitiémes de la ſixiéme partie du poids R, & par conſéquent comme 1 eſt à 136.

Remarque générale sur les machines simples & composées.

320. Tout ce que l'on a démontré dans le cours de ce Livre du rapport d'une puiſſance à un poids ou fardeau, lorſqu'elle le ſoutient à l'aide d'une machine, fait aſſez comprendre qu'il n'y en a aucune, ſoit ſimple, ſoit compoſée, ſi on en excepte la poulie fixe, qui ne facilite merveilleuſement ſon action, le fardeau le plus peſant devient, pour ainſi dire, léger, & une force médiocre peut le tenir en équilibre, ſi on profite de l'avantage d'une machine. Archimede ne demandoit qu'un point fixe pour peſer la terre avec un poids ordinaire : lors donc qu'on veut mettre un poids en équilibre, il n'y a point de ſecours qu'on ne puiſſe recevoir d'une machine; mais le ſecours eſt-il le même, ſi une puiſſance met la machine en mouvement ? car c'eſt ſur-tout dans le mouvement que l'on doit éprouver ſon utilité. Pour répondre à cette queſtion, on obſervera 1°. que ſi on conſidere le mouvement ſans avoir égard aux circonſtances particulieres, une puiſſance trouve la même facilité à mouvoir un fardeau avec une machine, qu'à le tenir par ſon moyen en équilibre : car de l'équilibre au mouvement il n'y a pas loin, puiſque pour peu que la puiſſance augmente ſa force, l'équilibre ceſſe auſſi-tôt; mais ſi on conſidere le mouvement d'une machine en tant qu'il eſt utile, & qu'il procure quelque avantage ou commodité, on n'eſt pas maître de produire de grands effets avec une petite force : ſi on veut élever promptement un grand fardeau à une certaine hauteur avec une petite force, on n'y réuſſira point, quoiqu'on puiſſe le mettre en équilibre avec cette même force. La difference vient de ce que l'équilibre eſt indépendant du tems; mais le mouvement en tant qu'il doit faire parcourir un certain eſpace, eſt néceſſairement lié avec le tems. Lorſqu'une puiſſance fait monter un poids, il faut qu'elle parcoure un eſpace : or cet eſpace eſt d'autant plus grand que la force eſt plus petite : ſi on veut élever à l'aide d'un levier un poids à la hauteur d'un pied avec une force

cent fois moindre, il faudra qu'elle ſoit au moins cent fois plus éloignée de l'appui, il faudra donc qu'elle parcoure un eſpace de cent pieds pour monter le poids à la hauteur d'un pied. Si cette puiſſance eſt de nature à parcourir par une action non interrompue & ſans trop ſe forcer, par exemple, 5 pieds en une ſeconde, elle emploiera 20 ſecondes pour élever le poids propoſé à la hauteur d'un pied; ſi on augmente la force, qu'on la rende dix fois plus grande, il ſuffira qu'elle tire à la diſtance de dix pieds de l'appui; & pour élever le poids propoſé à la hauteur d'un pied, il faudra qu'elle en parcoure 10; elle emploiera donc deux ſecondes: car on ſuppoſe que cette force ne peut faire ordinairement & ſans trop ſe fatiguer que 5 pieds par ſeconde; le tems ſera donc dix fois plus court que ſi la puiſſance tiroit à la diſtance de 100 pieds de l'appui: d'où l'on voit que pour produire le même effet qui eſt d'élever un poids à la hauteur d'un pied, il faut augmenter la force dans la même raiſon que le tems diminue; ſi le tems eſt dix fois plus court, il faut que la force ſoit dix fois plus grande; ſi l'on épargne en force, il faut prolonger le tems; & ſi on veut abreger le tems, il faut ſe réſoudre à dépenſer en force. Cette regle a lieu dans toutes les machines ſimples & compoſées, & elle s'obſerve d'une maniere inviolable ſans qu'il ſoit au pouvoir de celui qui les fabrique ou qui les gouverne, de la changer: or on juge de l'utilité d'une machine par l'effet qu'elle produit dans un certain tems; plus une machine eſt expéditive, toutes choſes étant d'ailleurs égales, plus elle eſt eſtimée, & elle eſt préferable à une autre qui donneroit le même produit, mais dans un tems plus long. La machine la plus puiſſante n'eſt donc pas celle qui remue les plus grands fardeaux, mais celle qui les tranſporte le plus promptement qu'il eſt poſſible: une machine qui par un mouvement continu, mais très-lent & d'une ſeule charge, élevera à une certaine hauteur une grande maſſe, n'eſt pas meilleure que celle qui la partageant en pluſieurs charges, l'élevera à la même hauteur, ſi pour faire le tranſport, il ne faut pas employer un plus long tems ni plus de force.

321. Il ſuit de ce qui vient d'être dit, que l'ouvrage qu'une machine peut faire, dépend uniquement de la force qu'on lui applique & du tems, & que ſi on ſuppoſe que le tems eſt le même pour toutes, l'effet produit eſt proportionnel à la force quelle que ſoit d'ailleurs leur eſpece & leur conſtruction particuliere; qu'ainſi ſi on conſidere toutes les machines d'une vûe générale & comme parfaites, elles ſont toutes égales, & l'une ne peut pas

fournir davantage que l'autre, ni donner un plus grand produit; qu'ainſi ceux là ſe trompent d'une maniere fort groſſiere qui s'imaginent qu'en ſe ſervant de leviers fort longs ou de grandes roues, ils arriveront à de plus grands effets, & que c'eſt ignorer les premiers principes de la mécanique de croire qu'une machine doit être d'un rapport d'autant plus grand qu'elle eſt plus compoſée.

322. On objectera peut-être que ſi les machines n'ont d'effet qu'à proportion de la force qu'on leur applique, il eſt inutile de s'en ſervir, puiſqu'une puiſſance peut par elle-même & ſans leur ſecours, produire d'auſſi grands effets.

323. Il eſt aiſé de prouver que les machines ſont d'un grand ſecours, & qu'elles procurent deux avantages conſidérables: le premier conſiſte en ce qu'une puiſſance peut par leur moyen ſe poſter comme elle veut à l'égard du fardeau qu'elle entreprend d'enlever, & ſe ſituer pour cet effet de la maniere la plus commode & la plus conforme à ſa maniere d'agir, ce qui eſt pour elle d'un grand ſoulagement; la poulie fixe eſt une preuve de ceci, car quoiqu'avec ſon ſecours on ne faſſe pas plus d'ouvrage, on ne laiſſe pas de s'en ſervir, parce qu'elle facilite l'action de la puiſſance & lui épargne en pluſieurs occaſions un ſurcroît de fatigue. En ſecond lieu, il y a une infinité de rencontres où le tems ne doit être compté pour rien, & pourvu que l'entrepriſe réuſſiſe, quoique lentement, on eſt ſatisfait, le tems ne coute point lorſqu'il s'agit de remuer des maſſes énormes ou de ſurmonter des obſtacles invincibles aux forces ordinaires: pour lors n'eſt-on pas heureux d'avoir une machine ou inſtrument à ſa diſpoſition avec lequel on puiſſe executer au moins avec le tems ce qu'il ſeroit comme impoſſible de faire autrement, ſi on en étoit privé? c'eſt dans ces ſortes d'occaſions qu'on ſent le prix d'une machine, & qu'on jouit des commoditez qu'elle peut procurer. On ne peut donc pas inferer que les machines ſoient inutiles de cela ſeul qu'elles ne font d'ouvrage qu'à proportion de la force qui les met en mouvement. Cette regle, quoique certaine, ne doit pas faire perdre la vraie eſtime qu'on doit avoir pour les machines; mais faire comprendre quels ſont les ſecours que l'on en peut attendre raiſonnablement. Encore une fois une petite force peut bien à l'aide d'une machine, remuer de grands poids, mais elle ne le peut pas promptement, parce qu'il faut qu'elle parcoure un eſpace d'autant plus grand qu'elle eſt plus petite, & que pour parcourir cet eſpace, il eſt néceſſaire qu'elle emploie un tems plus long. Si on veut hâter l'execution, il faut augmenter la force en di-

minuant le trajet qu'elle ſeroit obligée de faire ſans cela ; ſi la puiſſance parcourt un chemin égal à celui du poids, il eſt néceſſaire que ſa force ſurpaſſe de quelque choſe celle de la peſanteur. Si on veut produire des mouvemens prompts & ſubits, il faut ſituer la puiſſance de maniere qu'elle parcoure un chemin très-court, & qu'elle faſſe un effort à proportion plus grand, ce ſont là les loix de mécanique que Dieu a établies & qu'il a ſuivies lui-même en formant le corps humain & tous les animaux ; car il en a tellement diſpoſé les parties, que celles qui ſont l'office de puiſſance comme les muſcles, ſont mues très-lentement ; pour cela il a donné la figure de levier à celles qui par leur deſtination ſont expoſées aux plus grands travaux & aux plus longues fatigues, & a placé les muſcles près des jointures, afin que venant à ſe contracter & à ſe racourcir quelque peu, ils puſſent produire une viteſſe d'autant plus grande qu'ils ſeroient plus proches de l'appui, & que l'extrêmité du levier en ſeroit plus éloignée. Lorſque les hommes ſe ſervent du levier, ils placent l'appui entre l'obſtacle & la puiſſance qu'ils éloignent le plus qu'ils peuvent, afin de la mettre en état de ſurmonter l'obſtacle, pour lors elle en vient à bout, mais l'exécution eſt lente. Dieu ſuit une route toute oppoſée ; il place la puiſſance entre l'appui & l'obſtacle, parce qu'il veut que les mouvemens du corps humain s'exécutent promptement, & parce qu'il eſt maître de donner une grande force à une petite partie, telle qu'eſt le muſcle, il l'attache fort près de l'appui. Si les hommes veulent imiter l'ouvrage de Dieu, & operer avec diligence, il faut qu'ils ſuivent la conduite qu'il tient, & qu'ils ſe conforment aux regles qu'il a voulu ſuivre.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

De la construction de la balance et du peson, avec la réſolution de quelques Problêmes de ſtatique.

324. Dans le commerce de la vie civile on a ſouvent beſoin de mettre des poids en équilibre, ſoit pour échanger des marchandiſes, ſoit pour en vendre ou en acheter une quantité d'une peſanteur connue. Dans les travaux que l'on entreprend on ne peut pas non plus ſe paſſer d'arrêter un fardeau lorſque la puiſſance l'a élevé à la hauteur convenable, afin de la décharger, ou encore pour lui donner le tems durant le travail de reprendre ſes forces. Dans tous ces differens cas d'équilibre, lorſque c'eſt une puiſſance qui tire, il faut qu'elle n'emploie qu'une certaine meſure de force

ſi ſa direction & le point auquel elle s'applique ſont déterminez; que ſi la puiſſance agit avec une force qui ſoit toujours la même, pour lors il faut déterminer le point auquel elle doit s'attacher & la direction de ſon effort, autrement on n'arriveroit point à l'équilibre qu'on ſe propoſe de trouver. S'il s'agit de peſer des marchandiſes, ce n'eſt pas aſſez de les mettre en équilibre, il faut de plus que la machine ou inſtrument qui ſert à les peſer, ſoit conſtruit de maniere que le vendeur & l'acheteur ne ſoient pas lezés, l'un en donnant trop, & l'autre en ne recevant pas aſſez. Les inſtrumens deſtinez à cet uſage ſont pour l'ordinaire la *balance* & le *peſon* ou la *romaine*.

On va dabord donner la conſtruction de la balance, enſuite du peſon, enfin la réſolution des problêmes les plus ordinaires, qui concernent l'équilibre des puiſſances appliquées aux machines.

De la balance, de sa construction et de ses défauts.

Fig. 78. 325. *La balance* eſt une eſpece de levier dont les bras ſont égaux. Le levier XY eſt appellé *fléau* ou *traverſin*, FG *eſt l'anſe ou la chaſſe*, FH *l'aiguille* qui eſt d'une ſeule piece avec le fléau, & eſt perpendiculaire à la longueur XY : A & B ſont les *baſſins* ou *plateaux* : F *l'axe* ou *eſſieu* autour duquel la balance tourne.

326. La juſteſſe & l'exactitude de la balance eſt toute fondée ſur l'égalité des poids que l'on met dans les deux baſſins ; ſi dans l'équilibre ces deux poids ne ſont pas égaux, la balance eſt fautive, & ſi l'on s'en ſert c'eſt à la perte ou du vendeur ou de l'acheteur : la conſtruction de cette machine eſt fort ſimple, & ſi elle eſt exempte de tout défaut, les moins verſez peuvent juger à vûe d'œil & ſans aucun riſque de ſe tromper s'il y a de la fraude dans la maniere de s'en ſervir ; ce qu'il n'eſt pas aiſé de découvrir dans les autres eſpeces de balances qui dépendent de certaines diviſions comme, par exemple la romaine, c'eſt encore pour écarter les plus légers ſoupçons de tromperie que l'on a ſoin de donner à la balance toute la régularité poſſible. Car on la compoſe de façon que les parties qui ſe correſpondent de part & d'autre du point de ſuſpenſion, ſont parfaitement égales & ſemblables. Voici quelques regles pour découvrir ſi une balance eſt juſte ou ſi elle eſt trompeuſe : on poſe ces principes. 1°. Les poids qui ſont de part & d'autre dans les baſſins ou plateaux A & B doivent être égaux lorſqu'ils ſont en équilibre. 2°. Dans l'équilibre lorſque le traverſin eſt horizontal, pour peu que l'on ajoute à un côté, il doit l'emporter ſur l'autre, & deſcendre en décrivant un grand arc. 3°. Lorſqu'on

tient la balance ſuſpendue toute ſeule, les parties qui ſont d'un côté de l'eſſieu doivent être en équilibre avec celles qui ſont de l'autre côté, & dans cet état le fléau ou traverſin doit être horizontal.

On va appliquer ces principes, & on éclaircira en même-tems ce qui peut avoir beſoin d'explication.

327. 1°. Les bras de la balance doivent être égaux, car s'ils étoient inégaux, les poids que l'on mettroit dans les baſſins pour faire équilibre, ſeroient auſſi inégaux, (on ſuppoſe ici que la balance toute ſeule eſt en équilibre, & qu'un côté ne l'emporte pas ſur l'autre.) Pour appercevoir que les bras d'une balance doivent être égaux, il ſuffit de rappeller ici que deux poids appliquez aux bras d'un levier ſont en équilibre s'ils ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions, en ſorte qu'un poids doit être d'autant plus grand que ſa direction eſt moins éloignée de l'appui; lors donc que les directions ſont inégalement éloignées de l'appui, il eſt néceſſaire que les poids qui ſont équilibre ſoient inégaux: or les directions des poids étant paralleles, les bras ſont dans la même raiſon que les diſtances des directions à l'appui; donc ſi les bras de la balance ſont inégaux, les diſtances des directions à l'appui ſont inégales; donc les poids qui ſont équilibre ſont inégaux; il eſt donc néceſſaire que le vendeur ou lacheteur perdent. Si le poids qui ſert à peſer la marchandiſe eſt ſuſpendu au bras le plus long, le vendeur peſera à ſa perte, car pour l'équilibre il faudra que la marchandiſe ſoit dautant plus peſante, que le bras auquel elle ſera ſuſpendue ſera plus court; mais ſi le poids qui ſert à peſer eſt appliqué au bras le plus court, ce ſera l'acheteur qui perdra.

328. Pour s'aſſurer ſi une balance a ce défaut, on mettra dabord le poids & la marchandiſe en équilibre, enſuite il faut tranſpoſer le poids & la marchandiſe d'un baſſin à l'autre; ſi après ce changement il ceſſe d'y avoir équilibre, en ſorte que pour le rétablir, il faille mettre ou ôter du côté ou eſt la marchandiſe, c'eſt une preuve certaine que les bras de la balance ſont inégaux.

329. Si on veut ſe ſervir d'une telle balance, quoique trompeuſe ſans perte conſidérable pour l'acheteur ou le vendeur, on le peut en cette maniere. Suppoſons que l'un des bras de la balance ſoit d'un huitiéme plus long que l'autre bras, en ſorte que ſi l'un contient 8 parties, l'autre en contienne 7, ces bras ſeront entr'eux comme 8 & 7; ſuppoſons auſſi que le poids qui ſert à peſer ſoit de 4 livres, & qu'on le mette d'abord dans le baſſin qui pend au bras

le plus court, ſi l'on fait la proportion 8 . 7 :: 4 . x, ce quatriéme terme eſt le poids de la marchandiſe qui fait équilibre avec le poids de 4 livres : or $x = 3$ liv. $\frac{4}{8}$ ou $x = 3$ liv. $\frac{1}{2}$; ainſi ſi l'acheteur ſe contentoit de cette maniere de peſer, il perdroit une demi-livre ſur quatre. Mais après cette premiere opération, que l'on mette le poids de 4 livres dans le baſſin qui eſt ſuſpendu au bras le plus long, & que l'on peſe de la nouvelle marchandiſe, on aura cette autre proportion 7 . 8 :: 4 . $x = 4\frac{4}{7}$ ſuivant laquelle l'acheteur recevroit 4 liv. $\frac{4}{7}$, c'eſt-à-dire, $\frac{4}{7}$ de livre au de là de ce qu'il peut exiger ; ces quatre ſeptiémes de livre valent $\frac{1}{2} + \frac{1}{14}$. Si l'on ajoute les deux peſées en une ſomme, on aura 8 livres $\frac{1}{14}$, dont la moitié eſt 4 livres $\frac{1}{28}$: ainſi ſi l'acheteur prend la moitié des deux peſées, il recevra 4 livres $\frac{1}{28}$, c'eſt-à-dire, environ une demi-once de plus qu'il ne lui eſt dû ; ce ſeroit donc le vendeur qui pour lors au lieu de gagner perdroit, en ſe ſervant d'une balance qui auroit dû lui donner un profit conſidérable, quoiqu'injuſte. Si l'acheteur prenoit les deux peſées, il gagneroit environ une once ſur 8 liv. ce qui n'eſt pas une perte conſidérable pour le vendeur.

330. 2°. Il faut que les anneaux qui tiennent les baſſins ſuſpendus aux extrêmitez du traverſin, tournent librement dans leurs trous, en ſorte que leur circonférence ſoit toujours perpendiculaire à l'horizon ou parallele à la direction des poids ; il faut auſſi que le traverſin ſoit conſtruit de maniere que les points ſur leſquels les anneaux s'appuient, & le point où l'axe du traverſin touche l'anſe, puiſſent être joints par une ligne droite : ainſi ſi les ronds CAC répréſentent les épaiſſeurs des anneaux ou clous auxquels les baſſins ſont ſuſpendus, & le rond A l'épaiſſeur de l'eſſieu, il faut que leurs points d'attouchement D, F, D ſoient ſur une même ligne droite. Si l'une de ces conditions manque, c'eſt-à-dire, ſi les anneaux ne tournent pas librement, ou ſi les points d'attouchement dont il s'agit, ne ſont pas ſur une même ligne droite, l'on aura un levier courbé, & ſi la courbure eſt tournée vers le bas, des poids inégaux pourront faire équilibre entr'eux ſi l'on donne au traverſin differentes inclinaiſons, comme il a été prouvé, en ſorte que pour faire pencher ſenſiblement la balance d'un côté, il faudra ajouter à ce côté un poids plus conſidérable, au lieu que la balance doit être faite de maniere que pour peu que l'on ajoute à l'un des baſſins lorſqu'il ſont en équilibre, il deſcende auſſi-tôt & rompe tout-à-fait l'équilibre. Lors donc que deux poids ſont en équilibre dans une balance dont les bras & les baſſins ſont égaux en tout, on ne peut pas conclure qu'ils ſont égaux, à

Fig. 79.

moins,

moins qu'on ne ſache d'ailleurs que la balance eſt exempte du défaut dont il s'agit. On remarquera que ſi la courbure eſt tournée vers le haut, en ſorte que le point d'attouchement F ſoit au-deſſous des points D, D, la balance eſt exempte du défaut qu'on vient de remarquer : car ſi la balance eſt en équilibre lorſqu'elle eſt horizontale, pour peu qu'on la faſſe pancher d'un côté ou d'autre, en ajoutant quelque choſe à l'un des baſſins, l'équilibre eſt tout-à-fait rompu comme on a obſervé auparavant. (82.)

331. Lorſque le point F eſt au-deſſus des points D, D, & qu'une balance a le défaut de ſe mettre en équilibre quoiqu'elle ſoit inégalement chargée des deux côtez, on peut le reconnoître par le moyen de l'aiguille qui eſt au fléau : car ſi l'on tient la balance ſuſpendue, de maniere que l'anſe ſoit parallele à la direction des poids, on verra que ſi la balance commence à être inégalement chargée, les bras FD, FD étant ſuppoſez égaux, l'aiguille ceſſera d'être ſur la même ligne que l'anſe, & qu'elle s'en ſéparera un peu en devenant inclinée du côté que la balance panche.

332. On peut encore connoître qu'une balance à le défaut dont il s'agit ici lorſque n'étant point chargée on l'incline d'un côté, & que néanmoins elle revient & ſe rétablit. Car puiſque les bras de la balance ſont égaux en tout, (comme on ſuppoſe) ſi le fléau étoit exempt de courbure, les centres de gravité de l'un & de l'autre bras ſeroient à égale diſtance de l'appui dans toutes les inclinaiſons poſſibles, comme ils y ſont lorſque la balance eſt horizontale, & par conſéquent le fléau reſteroit dans la ſituation qu'on lui donneroit ; mais puiſque ſi on l'incline d'un côté, & qu'on la laiſſe enſuite, elle revient, il faut que le centre de gravité du bras qui eſt d'abord monté, ſe ſoit éloigné de l'appui ; & que celui du bras qui eſt deſcendu s'en ſoit approché, comme il arrive à deux poids égaux qui ſont ſuſpendus aux bras égaux d'un levier courbé dont la courbure eſt tournée en bas lorſque ce levier ceſſe d'être horizontal. (179.)

333. 3°. Si en inclinant une balance non chargée, elle ne ſe tient pas dans la ſituation où on l'aura miſe, mais qu'elle continue de deſcendre, on ne peut pas conclure que le bras qui deſcend ſoit plus peſant en lui-même, que l'autre bras, ni que la balance ſoit fautive, car comme les anneaux auxquels les baſſins ſont attachez, jouent librement dans les trous où ils ſont paſſez, il arrive qu'en inclinant la balance, le baſſin qui deſcend s'éloigne un peu de l'appui, & au contraire celui qui monte s'en approche : de-là vient que le baſſin qui deſcend l'emporte ſur l'autre, ce qui n'eſt

pas un défaut, pourvû qu'ils ſoient en équilibre, lorſque la balance eſt horizontale, conformément au troiſiéme principe.

334. 4°. Pour diminuer le frottement de l'eſſieu le plus qu'il eſt poſſible, on lui donne la figure d'un coin émouſſé par le tranchant & un peu arrondi.

De la romaine ou peson, et de sa construction.

335. La *Romaine* differe de la balance en ce que ſes bras ſont inégaux, & qu'avec un même poids on peut peſer des corps fort inégaux.

Fig. 80. 81. 82. 336. XY eſt un *levier* de bois, de fer &c FG *l'anſe*; F *l'eſſieu* autour duquel le levier ſe meut; FX *le petit bras*; FY *le grand*: à l'extrêmité X du petit bras eſt un *baſſin* ſuſpendu où l'on poſe la marchandiſe qu'il faut peſer, (au lieu d'un baſſin on ſe ſert ſouvent d'un *crochet*): P eſt le poids qui ſert à peſer, on l'appelle *la maſſe*, & il eſt ſuſpendu à un anneau H qui eſt plat & mince & qu'on peut avancer ou reculer le long du bras FY. Il eſt évident que ſi on éloigne la maſſe P du point de ſuſpenſion F, ſon *moment* ou ſa *force relative* augmente, & qu'elle peut faire équilibre avec des quantitez de differens poids, & qu'au contraire ſi on l'approche du point F, ſa force relative diminue & que les poids avec leſquels elle ſera équilibre ſeront moindres. Pour ſe ſervir de la Romaine il faut que le bras FY ſoit diviſé en un certain nombre de parties ſur leſquelles la maſſe étant miſe faſſe équilibre avec des poids connus qu'on poſera dans le baſſin, en ſorte que ſi on ôte enſuite ces poids & qu'on mette à leur place des marchandiſes qui faſſent équilibre avec la maſſe P, on ſache combien elles peſent.

337. Voici de quelle maniere on peut s'y prendre pour faire cette diviſion. La maſſe P étant d'un poids connu, par exemple d'une livre, on peut ſuppoſer que le bras FX joint au baſſin, fait équilibre avec le bras FY, ou bien que l'un des deux bras eſt plus peſant que l'autre.

Premier cas, lorſque les deux bras ſont en équilibre ſur le point de ſuſpenſion F.

Fig. 80. 338. Il faut porter la longueur FX du petit bras ſur le grand autant de fois qu'elle y eſt contenue, & marquer la premiere diviſion du chiffre 1, la ſeconde du chiffre 2, la troiſiéme du chiffre 3, & ainſi de ſuite, & le bras FY ſera diviſé de maniere que ſi la maſſe P eſt d'une livre, elle ſera équilibre avec un poids d'une livre dans le baſſin, ſi on la met à la premiere diviſion 1, &

elle fera équilibre avec un poids de deux livres à la ſeconde diviſion 2 : en un mot le chiffre qui eſt à chaque diviſion, marque le nombre de livres que la maſſe P peut contrepeſer dans le baſſin, lorſqu'elle eſt arrêtée à cette diviſion. Ce premier cas n'a pas beſoin d'être prouvé après tout ce qui a été dit de l'équilibre des poids ſuſpendus à un levier. Puiſque les bras de la balance ſont en équilibre ſur le point de ſuſpenſion F, ils ſont à l'égard de la maſſe P & du poids qui eſt dans le baſſin comme s'ils étoient ſans peſanteur; c'eſt pourquoi la maſſe P doit faire équilibre avec des poids qui ſoient entr'eux comme les diſtances à l'appui F, car le moment ou force relative de la maſſe P augmente à raiſon de la diſtance où elle eſt de l'appui F; or par la conſtruction la diſtance F2 eſt double de la diſtance F1, la diſtance F3 eſt triple de la diſtance F1; donc la maſſe P ſuſpendue à la ſeconde diviſion doit faire équilibre avec un poids double de celui qu'elle contrepeſe lorſqu'elle eſt à la premiere diviſion, & lorſqu'elle eſt à la troiſiéme, elle doit faire équilibre avec un poids triple; or lorſque la maſſe eſt à la premiere diviſion, elle fait équilibre avec un poids d'une livre, puiſque les diſtances FX, F1 ſont égales, & que d'ailleurs la maſſe P peſe une livre; donc lorſqu'elle eſt à la ſeconde, à la troiſiéme diviſion, &c. elle doit faire équilibre avec des poids de deux, de trois livres, &c. Donc ſi à la place de ces poids on met dans le baſſin de la marchandiſe qui ſoit en équilibre avec la maſſe P, on ſçaura qu'elle peſe une livre, ſi la maſſe eſt à la premiere diviſion, qu'elle peſe deux livres ſi la maſſe eſt à la ſeconde diviſion, & ainſi de ſuite.

Second cas, lorque les bras ſont inégaux en peſanteur, & que l'un l'emporte ſur l'autre.

339. 1°. Si le bras FX avec ſes accompagnemens eſt plus peſant que le bras FY, il faut mettre la maſſe P au point H pour qu'elle y faſſe équilibre avec l'excez de la peſanteur du bras FX ſur celle du bras FY, prendre la longueur FX, & la porter ſur le bras FY en commençant au point H, & marquer les diviſions de ſuite avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, &c. comme dans le premier cas. Cela fait, ſi l'on poſe la maſſe ſur une des diviſions, & dans le baſſin un poids qui faſſe équilibre avec elle, elle ſera d'autant de livres que le chiffre de la diviſion contient d'unitez; ainſi ſi la maſſe eſt à la premiere diviſion, le poids qui fait équilibre avec elle ſera d'une livre; ſi la maſſe eſt à la ſeconde diviſion, le poids qui fait équilibre avec elle ſera de deux livres, &c. Fig. 81.

Pour démontrer la propoſition, il faut d'abord ſuppoſer

que la maſſe P eſt à la premiere diviſion, & qu'on laiſſe au point H un poids Z égal à la maſſe P. Ce poids continuera de faire équilibre avec l'excedent de la peſanteur du bras FX ; & parce qu'on ſuppoſe que la maſſe P eſt à la premiere diviſion, pour conſerver l'équilibre, il faudra mettre dans le baſſin un poids qui ſoit à la maſſe P comme F 1 eſt à FX, c'eſt-à-dire, que comme F 1 ſurpaſſe FX de FH, le poids A qui ſera équilibre avec la maſſe, la ſurpaſſera d'une quantité proportionnelle à la même FH ; mais on peut ſuppoſer que le poids Z fait équilibre avec une partie du poids A, laquelle eſt au poids Z comme FH eſt à FX ; donc ſi on ôte le poids Z, pour conſerver l'équilibre, il faudra diminuer le poids A d'une quantité proportionnelle à FH, le reſtant ſera donc exprimé ou répréſenté par H 1 ou FX ; & par conſéquent égal en peſanteur à la maſſe P, laquelle étant ſuppoſée d'une livre, le poids A ainſi réduit, ſera auſſi d'une livre. Si la maſſe eſt à la ſeconde diviſion, le poids A dans l'équilibre ſera à la maſſe P comme F 2 eſt à FX, en ſuppoſant que le poids Z eſt attaché au point H ; mais ſi on ôte le poids Z il faudra diminuer le poids A d'une quantité proportionnelle à FH, le poids A ainſi réduit ſera donc répréſenté par H 2, il ſera donc double de la maſſe P, & par conſéquent de 2 livres : on démontrera de la même maniere que ſi la maſſe eſt à quelqu'autre diviſion, le poids A qui ſera équilibre avec elle, ſera d'autant de livres que le nombre qui marque la diviſion contient d'unitez.

Fig. 82. 340. 2°. Si le bras FY eſt plus peſant, pour lors il faut mettre la maſſe P au point H pour établir l'équilibre entre les parties qui ſont des deux côtez du point de ſuſpenſion F, prendre la longueur FX & la porter ſur HY en commençant au point H, & marquer de ſuite les diviſions avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. & la maſſe P étant ſur quelqu'une d'elles, ſera équilibre avec un poids qui poſé dans le baſſin ſera d'autant de livres que le nombre qui marque la diviſion contiendra d'unitez.

Pour démontrer la propoſition, il faut encore ſuppoſer que la maſſe eſt à la premiere diviſion, & qu'au point H il y a un poids Z de même peſanteur que la maſſe P que l'on a portée à la premiere diviſion : il eſt évident que le poids Z ſera équilibre avec l'excedent de la peſanteur du bras FY, & que pour conſerver l'équilibre avec la maſſe P, il faudra mettre dans le baſſin un poids A qui ſoit à la maſſe comme F 1 eſt à FX ; mais ſi l'on ôte le poids Z, il faudra augmenter le poids A afin d'entretenir l'équilibre, & parce que FX eſt plus grande que FH, la force relative du poids

ajouté ſera plus grande que s'il étoit au point H, & pour faire équilibre il faudra qu'il ſoit au poids Z comme FH eſt à FX; le poids A ainſi augmenté & faiſant équilibre avec la maſſe P, ſera donc répréſenté par FH + F1, ou par H1, ou encore par FX, c'eſt-à-dire, que le poids A ſera égal à la maſſe P, & par conſéquent d'une livre. Si la maſſe eſt à la ſeconde diviſion, le poids A qui ſera équilibre avec elle ſera de 2 livres, car le poids Z étant encore ſuppoſé attaché au point H, le poids A qui feroit équilibre avec la maſſe, ſeroit exprimé par F2; mais ſi l'on ôte le poids Z, il faudra augmenter le poids A d'une quantité proportionnelle à FH; donc le poids A ainſi augmenté, & faiſant équilibre avec la maſſe P, ſera exprimé par H2, ou bien par 2FX, c'eſt-à-dire, que ce poids ſera double de la maſſe P, & par conſéquent il ſera de 2 livres.

341. Si on veut que la Romaine peſe les onces, il faut ſou-diviſer chacune des parties qu'on vient de trouver en 16 autres parties égales, & ſi après avoir mis la maſſe ſur une de ces ſubdiviſions, par exemple, ſur la ſixiéme ſubdiviſion de la troiſiéme partie, on trouve qu'elle eſt en équilibre avec la marchandiſe qui eſt dans le baſſin, on ſçaura que cette marchandiſe peſe 2 livres 6 onces, ce qui n'a pas beſoin d'être démontré plus au long après tout ce qui précede.

342. Sur la verge XY, il y a ordinairement deux côtez qui ſont diviſez, l'un qu'on appelle le *foible*, l'autre le *fort*; les regles pour marquer les diviſions ſur la verge, ſont les mêmes; le fort differe du foible en ce que la maſſe peut faire équilibre avec de plus grands poids, quoiqu'elle ſoit moins éloignée du centre de mouvement F, & cela parce que le baſſin eſt ſuſpendu à une moindre diſtance du point F.

343. On peut diviſer mécaniquement le bras FY. Il faut faire en ſorte que la maſſe ſoit en équilibre avec differens poids qu'on mettra ſucceſſivement dans le baſſin; ſi on marque chaque point où l'on aura ainſi arrêté la maſſe avec le nombre convenable, c'eſt-à-dire, qui faſſe connoître le poids avec lequel la maſſe eſt en équilibre lorſqu'elle eſt à ce point, le bras FY ſera diviſé comme l'on ſouhaite.

Résolution de quelques problemes les plus ordinaires de la ſtatique.

344. Les machines ſimples auxquelles on a appliqué des puiſſances ou des poids, peuvent être rapportées au levier & au plan

incliné ; c'eſt auſſi par rapport à ces deux machines qu'on va réſoudre les problêmes ſuivans, ils pourront ſervir enſuite à la ſolution de ceux qui ſeront plus compoſez en cas qu'ils ſe préſentent & qu'il faille les réſoudre.

PROBLÊME I.

Fig. 83. 84. 85. 86. 345. *Deux poids ou puiſſances* P *&* R *dont les peſanteurs ou forces abſolues ſont connues étant appliquez aux points* M, N *du levier* XY *trouver le point d'appui* F *ſur lequel ils ſoient en équilibre.*

Ce problême a pluſieurs cas : ou bien les directions ſont paralleles ou obliques, & inclinées l'une à l'autre : elles ſont dirigées d'un même côté ou dans des ſens oppoſez.

PREMIER CAS, lorſque les directions ſont paralleles.

Fig. 83. 346. 1°. Si les directions MP, NR ſont dans le même ſens par rapport au levier XY, il faut faire la proportion P + R . R :: MN . MF, les trois premiers termes de la proportion étant connus, le quatriéme pourra être auſſi connu, on déterminera par là le point F qui ſera le point fixe qui doit ſervir d'appui au levier & ſur lequel les poids ou puiſſances P, R ſeront en équilibre. Car ſi dans la proportion précédente on retranche les conſéquens des antécédens, & qu'on compare les reſtes avec les mêmes conſéquens, on aura P . R :: FN . FM, c'eſt-à-dire, que les poids P, R ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances FM, FN ; donc ils ſont en équilibre ſur le point F.

Fig. 84. 347. 2°. Si les directions ſont l'une au deſſus, l'autre au-deſſous du levier XY au lieu de la ſomme des poids P + R, il faut prendre pour premier terme de la proportion, leur difference, & dire R — P : P :: MN . NF, par là on déterminera le lieu de l'appui F ſur lequel les poids P, R appliquez aux points M, N du levier X, Y doivent faire équilibre. Car ſi dans la proportion on ajoute les conſéquens aux antécédens, & qu'on compare les ſommes aux conſéquens, on aura R . P :: MN + NF ou MF . NF, c'eſt-à-dire, que les poids ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances à l'appui F ; donc ils ſont en équilibre.

SECOND CAS, lorſque les directions MP, NR *concourent au point* C.

Fig. 85. 86. 348. Il faut prendre ſur les directions les parties CG, CI proportionnelles aux puiſſances P, R, décrire le parallelogramme GI, & mener la diagonale CD, qui prolongée ou non, rencontre le levier XY au point F, ce ſera le point fixe ſur lequel le levier étant appuyé, les puiſſances P, R ſeront en équilibre.

Pour démontrer cette propoſition il faut du point D mener DE, DA perpendiculaires aux directions, du point F mener auſſi FO, FL perpendiculaires aux mêmes directions. Cela fait, par l'hypotheſe les puiſſances P, R ſont entr'elles comme les côtez CG, CI, ou leurs égaux DI, DG: or les triangles rectangles ADI, EDG ſont ſemblables, les angles en A & en E ſon droits, & les angles I, G ſont égaux, puiſque ce ſont les angles oppoſez d'un parallelogramme ou plutôt les ſupplémens des mêmes angles; donc DI. DG :: DA. DE: or les perpendiculaires FL, FO ſont dans la même raiſon que les perpendiculaires DA, DE, ce qui eſt évident par les triangles ſemblables CAD, CLF & CDE, CFO; donc les puiſſances P, R qui ſont entr'elles comme les côtez DI, DG, ou comme les perpendiculaires DA, DE, ſont auſſi entr'elles comme les perpendiculaires FL, FO, elles ſont donc entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées de l'appui F ſur les directions; donc elles ſont en équilibre.

Problême II.

349. *On propoſe deux poids ou puiſſances* P, R, *dont les peſanteurs ſont connues avec le lieu de l'appui* F *ſur le levier* XY, *& le point* M *auquel le poids ou puiſſance* P *eſt appliqué ſuivant la direction* MP: *il s'agit de trouver le point* N *auquel il faut appliquer le poids* R. Pour réſoudre le Problême il faut que la ſituation de la direction NR à l'égard du levier, ſoit donnée, c'eſt-à-dire, que l'on ſçache quel angle elle fait avec le levier XY, autrement le Problême auroit une infinité de réſolutions differentes. Fig. 83. 84. 87.

Premier cas, lorſque les directions doivent être paralleles. Fig. 83.

350. Il faut faire la proportion R. P :: MF. NF, & le point N eſt celui auquel le poids R étant appliqué ſuivant une direction parallele à la direction MP, il fera équilibre avec le poids P, ce qui eſt évident. 84.

351. On remarquera qu'il y a toujours deux points N, l'un d'un côté, l'autre de l'autre côté de l'appui F, auquel le poids R étant ſuſpendu, il ſera équilibre avec le poids P. Mais lorſque le poids R eſt entre l'appui & le poids P, l'un de ces poids doit tirer en haut, & l'autre en bas comme dans la Fig. 84.

Second cas, lorſque la direction du poids R *ne doit pas être parallele à celle du poids* P, *pour lors on peut trouver ſur le levier* XY *une infinité de points* N *auxquels la puiſſance* R *étant appliquée, pourra être en équilibre avec le poids ou puiſſance* P. *Mais ſi l'angle que la direction* NR *doit faire avec le levier eſt donné, on pourra déter-*

miner deux points où la puiſſance R *étant attachée, pourra faire équilibre avec la puiſſance* P.

Fig. 87. 352. 1°. Il faut déterminer par la proportion du premier cas, à quelle diſtance de l'appui la direction NR doit être ſituée : on ſuppoſe qu'elle eſt égale à BD. 2°. Il faut mener une ligne GH qui faſſe avec le levier un angle égal à celui que la direction NR doit faire. 3°. Du point F comme centre & avec le rayon BD, il faut décrire une circonférence & mener du point F un diametre IL qui ſoit perpendiculaire à GH ; des points I, L mener deux lignes IN, LN paralleles à GH qui rencontrent le levier aux points N, N, on aura la direction de la puiſſance R, & les points d'application N, N, auxquels cette puiſſance étant appliquée ſuivant la direction NR, il y aura équilibre, puiſque les puiſſances P, R ſont dans la raiſon réciproque des diſtances FM, FL ou FI.

PROBLÊME III.

Fig. 88. 353. *Trois poids* P, Q, R, *dont les peſanteurs ſont connues étant appliquez aux points* M, L, N, *du levier* XY, *trouver l'appui* F *ſur lequel le levier ſoit en équilibre.*

Il faut dabord ſuppoſer que les trois poids P, Q, R ſont en équilibre ſur le point F qu'il s'agit de déterminer : ſelon cette ſuppoſition ſi on fait la proportion P+Q. P :: LM. LO, on aura le point O auquel ſi on ſuſpend un poids Z qui ſoit égal à la ſomme des poids P, Q, il feroit équilibre avec le poids R : il faut enſuite faire une ſeconde proportion Z+R :: R. ON. OF, ce quatriéme terme détermine le point F ſur lequel le levier XY ſera en équilibre avec les trois poids P, Q, R. Ceci ne ſouffre point de difficulté après ce qu'on a démontré de la propriété des momens. Car ſi les trois poids P, Q, R étoient en équilibre ſur le levier XY, dont l'appui eſt ſuppoſé en F, le poids Z qui eſt égal à la ſomme des poids P+Q, feroit équilibre avec le poids R, & on pourroit ſubſtituer, ainſi qu'on vient de faire, un poids à la place de deux (142) ; mais ſi l'on ſuppoſe maintenant que le point F eſt inconnu, & que pour le déterminer on faſſe la ſeconde des deux proportions précedentes, il eſt viſible que ce point ne ſera pas différent de celui ſur lequel on a ſuppoſé que les poids Z, R ſont en équilibre ; donc les poids P, Q auxquels on a ſubſtitué le poids Z, feront auſſi équilibre avec le poids R ſur le point F.

354. On pourra de cette maniere trouver le point d'appui du levier XY lorſqu'il y a plus de trois poids : ſi les directions concouroient

courroient, on trouveroit l'appui F en ſubſtituant une puiſſance à deux par ce qui a été dit dans l'article (166) tous les poids ou puiſſances étant ainſi réduites à deux on trouvera l'appui F ſur lequel ces deux puiſſances & conſéquemment toutes celles qu'on aura ſuppoſées, ſeront en équilibre.

Les deux problêmes qui vont ſuivre ont quelque choſe de ſingulier, & on les propoſe plutôt pour avoir occaſion d'éclaircir quelques difficultez qui ſemblent d'abord attaquer les principes les plus certains de la ſtatique, que pour leur utilité.

Problême IV.

355. *Conſtruire une balance où les poids ſoient en raiſon directe des diſtances à l'appui ou centre de mouvement.*

355. Il faut avoir un levier angulaire XFY dont les bras FM, FN ſoient égaux, ſuſpendre au point M un poids P & le bras FM étant tenu dans une ſituation horizontale, faire deſcendre le long du bras FN un poids ſphérique R dont le centre puiſſe rencontrer l'extrémité N du bras FN : ſi dans cette ſituation du poids R on place un plan vertical IK qui touche le globe R au point C ; je dis que ſi le poids P eſt au poids R comme FM eſt à FL, il y aura équilibre, en ſorte que le poids R ne pourra ni monter ni deſcendre, quoique rien ne s'oppoſe à ſon mouvement ; car on ſuppoſe que le centre N peut monter ou deſcendre librement le long du bras FN. Pour concevoir comment le centre N peut monter & deſcendre ſuivant la longueur du bras FN, il faut ſuppoſer que le corps ſphérique R eſt percé de part en part par le centre N. Fig. 89.

Demonstration. Il eſt évident que le poids R eſt retenu ſur le bras FN comme ſur un plan incliné dont la longueur eſt FN, la hauteur FO, & la baſe ON ou FL, & que le plan vertical IK eſt preſſé ſuivant une direction ONC perpendiculaire au même plan, c'eſt-à-dire, perpendiculaire à la direction LN du poids R ou à la hauteur FO du plan incliné FN, & par conſéquent parallele à la baſe ON, d'où il ſuit que la charge que le poids R produit ſur le plan incliné FN lorſqu'il rencontre le plan vertical IK lequel réſiſte ſuivant une direction CNO parallele à la baſe NO, eſt au poids R comme la longueur FN eſt à la baſe ON ou à la diſtance FL de l'appui F à la direction LNR, or on ſuppoſe que le poids R eſt au poids P comme FL eſt à FM. Cela poſé, ſi l'on nomme O la charge que ſupporte le plan incliné FN, on aura

O . R :: FN . ON ou FL.
R . P :: FL . FM

O . P :: FN . FM.

Si on multiplie par ordre & qu'on diviſe les deux premiers termes de la proportion par R, & les deux derniers par FL, on aura la derniere proportion O. P :: FN . FM ; mais par l'hypotheſe FN=FM ; donc O=P, c'eſt-à-dire, que la charge du plan incliné FN eſt égale à la peſanteur du poids P ; d'ailleurs cette charge eſt dirigée ſuivant une ligne perpendiculaire au bras FN, de même que la direction MP du poids P l'eſt à l'égard du bras FM ; donc les forces ou puiſſances qui tirent les bras égaux FM, FN ſont égales, & les diſtances de l'appui F aux directions auſſi égales ; donc il y a équilibre, par conſéquent les poids P, R ne peuvent ſe ſurmonter l'un l'autre.

355. COROLLAIRE. Il eſt évident que le poids R qui eſt exprimé par la diſtance FL eſt moindre que le poids P qui eſt repréſenté par FM ou FN, d'où il ſuit qu'un petit poids en peut contrebalancer un qui eſt plus grand, quoiqu'étant moindre il ſoit placé à une moindre diſtance de l'appui, & ce qui paroît encore plus ſurprenant, c'eſt que le poids R n'emploie pas toute ſa force contre le poids P, puiſqu'il preſſe le plan IK.

355. Il n'eſt donc pas néceſſaire que les poids en équilibre ſur un levier ſoient dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions. Ce qui paroît renverſer le premier principe de la ſtatique.

355. Cette difficulté diſparoîtra bientôt ſi on fait attention que le poids R ſeul ne fait pas équilibre avec le poids P, car il eſt aidé par la réſiſtance du plan IK, ce n'eſt pas à proprement parler le poids R qui fait équilibre avec le poids P, mais la charge qui en réſulte à la rencontre du plan IK : or ce plan concourt à augmenter cette charge, parce qu'il fait l'office d'une puiſſance qui retiendroit le poids R ſur le plan incliné FN ſuivant une direction parallele à la baſe : or une telle puiſſance chargeroit le plan incliné FN ; donc la réſiſtance du plan IK contribue auſſi à cette charge ; il n'eſt donc pas ſurprenant que le poids R quoique plus petit & à une moindre diſtance de l'appui, ſoit en équilibre avec le poids P.

PROBLÊME V.

CONSTRUCTION DE LA BALANCE DE M. DE ROBERVAL.

Fig. 90. 355. Cette balance ſe trouve décrite en pluſieurs endroits. M. de Bremond de l'Académie Royale des Sciences, qui conſacre une partie de ſes veilles à donner en notre langue les tranſactions philoſophiques de la Société Royale de Londres, année

1731, page 176, cite le Journal des Sçavans de l'année 1670, & le tome 10e des anciens Mémoires de l'Académie des Sciences page 496, & dans une note qu'il y fait à l'occasion d'une expérience de M. Desaguliers, il donne d'après le Journal une ample description de cette machine. M. de la Hire en parle aussi, & en démontre la principale propriété dans son Traité de Mécanique page 133. Voici en quels termes M. Desaguliers annonce son expérience. *Expérience pour résoudre ce paradoxe de mécanique. Deux corps de poids égal suspendus à une balance d'une nature particuliere, ne perdent point leur équilibre quoique l'un soit plus éloigné ou plus approché du centre que l'autre.*

On va copier de la note de M. de Bremond ce qui est nécessaire pour entendre la construction de la balance dont il s'agit.

355. Cette balance est faite de six regles de cuivre disposées comme l'on voit dans la Figure. Les quatre regles AB, DE, AID, BNE sont un parallelogramme, & sont tellement attachées ensemble qu'elles peuvent tourner sur les quatre clouds qui les tiennent jointes comme sur quatre pivots, AB demeurant toujours parallele à DE, & AID à BNE. Sur les deux regles AID, BNE sont appliquez les deux bras GIH, LNM qui partagent ces deux regles en deux parties égales, & y sont attachés à angles droits, de sorte qu'ils ne changent point d'angle : on peut prolonger ces bras de part & d'autre autant que l'on voudra, mais il faut prendre garde qu'étant prolongez l'un vers l'autre, ils ne s'accrochent point en haussant ni en baissant.

355. Ce parallelogramme garni de ces deux bras est soutenu par un morceau de bois qui lui sert de pied auquel il est attaché par deux clouds ou axes ronds C & F qui passant par le milieu de chacune des deux regles AB, DE les tiennent suspendues parallelement & en équilibre, de maniere néanmoins qu'elles peuvent tourner librement en haussant & en baissant. Mais en quelque situation qu'elles puissent être, il est évident que les deux clouds C & F étant immobiles, toute la ligne COF tirée d'un de ces clouds à l'autre, est pareillement immobile : ainsi les deux points C & F sont comme les poles de la balance, la ligne COF en est l'axe, & le point O le centre.

355. Cette construction étant supposée, *Je dis que si l'on suspend deux poids aux deux bras de la balance* GH, LM, *& que ces deux poids en cet état fassent équilibre l'un contre l'autre, ils demeureront toujours en équilibre, quoiqu'on éloigne l'un des deux, & qu'on approche l'autre autant qu'on voudra du centre de la balance.*

Si on prolonge les regles GH, LM *de part & d'autre tant que l'on voudra, de maniere que l'on puiſſe ſuſpendre les deux poids* P, Q *d'un même côté par rapport à la regle* CF, *l'un à la regle* GH, *& l'autre à la regle* LM, *l'équilibre ſubſiſtera encore.* Si les clouds ou pivots C, F partagent les regles AB, DE en deux parties égales, les poids qui feront équilibre ſeront égaux; mais ils ſeront inégaux ſi les points fixes C, F ne ſont pas au milieu des regles AB, DE. On ſuppoſera dans la démonſtration que les points C, F ſont au milieu des regles AB, DE.

355. Pour démontrer l'équilibre entre les poids P, Q à quelque endroit des bras GH, LN qu'ils ſoient appliquez, il faut remarquer que ſi les regles AB, DE tournent autour des points fixes C, F, tous les points des regles verticales AD, BE ſont mus avec la même viteſſe, en ſorte que non-ſeulement tous les points d'une des deux regles, parcourent des eſpaces égaux, mais encore ces eſpaces ſont auſſi égaux à ceux que les points de l'autre regle parcourent; car les regles AD, BE demeurent toujours paralleles entr'elles, & au pied ou ſoutien COF; d'ailleurs elles ſont également diſtantes de ce ſoutien. Donc les points I, N auxquels les bras GIH, LNM ſont attachez ſont mus d'une égale viteſſe, l'un en montant, l'autre en deſcendant; donc toutes les parties des bras GH, LM ſont mus d'une égale viteſſe, de même que les points de ſuſpenſion des poids P, Q, quelles que ſoient d'ailleurs les longueurs de ces bras; donc les poids P, Q parcourent chacun le même eſpace, l'un en montant, l'autre en deſcendant ſans que leur plus grande ou moindre diſtance à l'égard du centre O de la balance apporte aucun changement à cette égalité de viteſſe, lors même qu'ils ſe trouvent tous deux d'un même côté à l'égard du centre O. Les forces relatives des poids P, Q par leſquelles ils agiſſent l'un contre l'autre, ſont donc égales; donc ils ſont en équilibre.

355. Mais parce que nonobſtant le raiſonnement qu'on vient de faire, lequel ſe trouve en ſubſtance dans la note de M. de Bremond, on pourroit penſer que plus l'un des poids, par exemple, plus le poids P eſt éloigné du centre O, plus il a de force pour baiſſer la regle AD, il faut faire ſentir que cette force n'eſt pas plus grande que s'il étoit ſuſpendu au crochet D. Pour cela, concevons que de part & d'autre du point I à égale diſtance de ce point, il y a deux poids égaux: il eſt certain que le point I ſera chargé de la ſomme des deux poids, & que la regle AD ſera tirée en embas par un effort égal à la ſomme de leurs peſanteurs,

ſi grande ou ſi petite que ſoit la diſtance du point I aux directions de ces poids : or ſi l'on ôte l'un des poids, il eſt pareillement certain que la charge du point I ſera diminuée de la moitié ; par conſéquent le poids qui demeurera ſuſpendu au bras GH, à quelque point de ce bras qu'il ſoit attaché, ne chargera le point I ou la regle AD que comme s'il étoit attaché immédiatement à cette regle, & qu'il fût ſuſpendu au crochet D : or il eſt évident que ſi les poids P, Q étoient ſuſpendus aux points D, E, ou aux points I, N, il y auroit équilibre entre ces poids. Donc, &c.

355. L'expérience que M. Deſaguliers a faite avec la balance de M. de Roberval, lui a donné lieu de dire *qu'il y a un grand nombre de cas où les viteſſes ne ſont pas proportionnelles aux diſtances du centre de mouvement de la machine, ni aux arcs décrits par les poids ou leurs points de ſuſpenſion.* Il eſt vrai que dans cette balance les viteſſes ne ſont pas proportionnelles aux diſtances du centre O autour duquel les poids ſont mus, mais il eſt certain d'un autre côté que ces mêmes viteſſes ſont proportionnelles aux arcs que les poids ou leurs points de ſuſpenſion décrivent ; car on vient de voir que les poids P, Q ſont mus de même que s'il étoient ſuſpendus aux points D, E ou A & B des regles verticales AD, BE : or ſi les poids étoient ſuſpendus aux points D, E, les arcs qu'ils décriroient ou leurs points de ſuſpenſion ſeroient proportionnels aux viteſſes, de même que ſi ces poids pendoient à des cordons qui ſeroient attachez aux points A, B ou D, E. Pour ce qui eſt de la conſéquence que l'on tire de la propoſition précedente, ſçavoir que ce *n'eſt pas une regle générale que les poids agiſſent proportionnellement à leurs diſtances du centre de mouvement*, elle a quelque vérité ; mais parce qu'elle paroît jetter de l'obſcurité ſur un principe univerſellement reconnu pour certain, que d'ailleurs cette conſéquence n'eſt vraie que dans certains cas particuliers que l'on n'a jamais prétendu renfermer dans la regle générale, & qu'au ſurplus on ne dit point quels ſont les cas où la regle générale ceſſe d'avoir lieu ; nous remarquerons ici que la regle générale eſt vraie ſans exception lorſque les poids ſe meuvent ou ſont diſpoſez à ſe mouvoir autour d'un ſeul point fixe, & que leur mouvement eſt ſimple, c'eſt-à-dire, qu'il ne dépend point de pluſieurs autres mouvemens comme dans la balance de M. de Roberval où il y a deux points fixes, & où les poids ne peuvent ſe mouvoir à moins qu'ils ne mettent en branle quatre regles.

Problême VI.

345. *Un poids* R *& une puiſſance* P *étant donnez, trouver quelle doit être la direction de la puiſſance pour qu'elle puiſſe tenir le poids* R *en équilibre ſur le plan incliné* SH *dont l'inclinaiſon* OHS *eſt connue.*

Fig. 91. 355. De quelque point C par où la direction CN du poids R
92. 93. paſſe, il faut mener une ligne CF qui ſoit perpendiculaire au plan
94. SH, & qui rencontre la baſe du corps; ſuppoſant enſuite que CI exprime le poids R & la ligne M la puiſſance P, du point I comme centre & d'intervalle égal à la ligne M, il faut décrire un arc de cercle qui rencontre la perpendiculaire CF en un ou deux points F, *f*; du point C mener deux paralleles CG, C*g* aux lignes IF, I*f*, & achever les parallelogrammes GI, *g*I. Je dis que ſi la puiſſance P tire le poids R ſuivant l'une des directions CG ou C*g*, elle fera équilibre avec le poids R ſur le plan incliné SH. Car puiſque la puiſſance P & le poids R ſont entr'eux comme les côtez CG ou C*g* & CI des parallelogrammes GI ou *g*I, ils ſont auſſi entr'eux comme les côtez CG, GF ou C*g*, *gf* des triangles CGF, C*gf*, ou comme les ſinus des angles GFC ou *gf*C, ou de leur égal ICF ou IC*f*, eſt au ſinus de l'angle GCF ou *g*C*f*, c'eſt-à-dire, que la puiſſance P & le poids R ſont entr'eux réciproquement comme les ſinus des angles que leurs directions forment avec la perpendiculaire CF ou C*f* menée du point de concours ſur le plan incliné SH; donc il y a équilibre.

355. Remarque. Si l'arc de cercle F*f* ne rencontre la ligne CF qu'en un point, les points F, *f* ſe réuniront en un ſeul, & la ligne IF ou I*f* ſera perpendiculaire à CF ou C*f*, & par conſéquent parallele au plan incliné SH, il n'y aura donc qu'une
Fig. 92. direction ſuivant laquelle la puiſſance P pourra faire équilibre avec le poids R. Si l'arc décrit ne peut rencontrer CF ou C*f*, l'équilibre ſera impoſſible, parce que la puiſſance P ſera trop petite.
Fig. 93. Si l'arc paſſe par le point C, la puiſſance ſera égale au poids R, & il y aura encore deux directions ſuivant leſquelles elle pourra
Fig. 94. faire équilibre avec ce poids R. Si l'un des points *f* ou F eſt ſitué au-delà du point C, il n'y aura qu'une direction ſuivant laquelle la puiſſance puiſſe faire équilibre avec le poids propoſé.

Fin du quatriéme Livre.

Le neuviéme Février 1741.

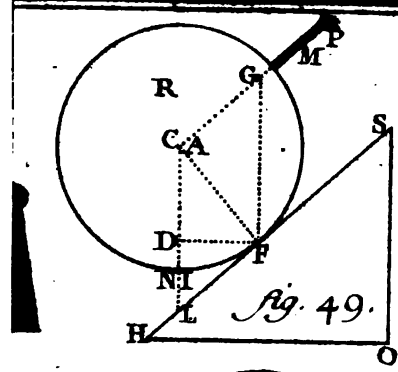


fig. 49.

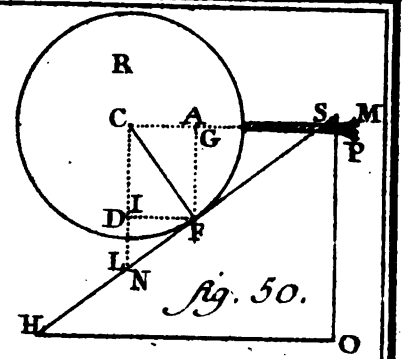


fig. 50.

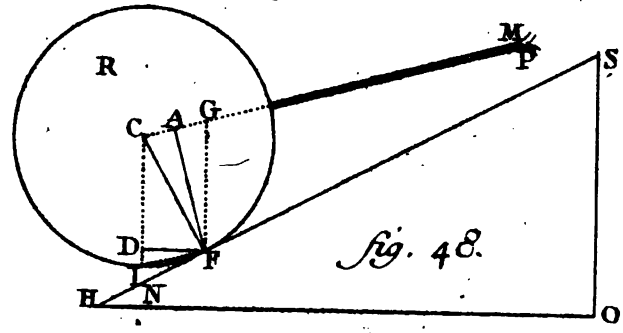


fig. 48.

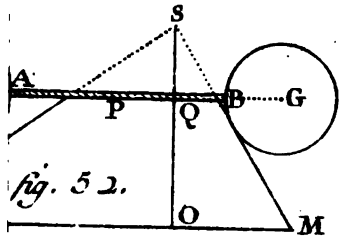


fig. 52.

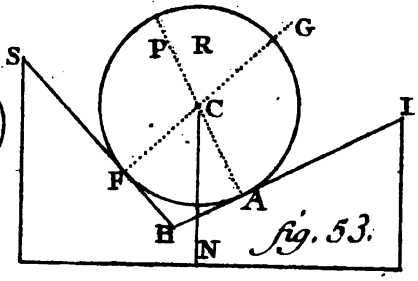


fig. 53.

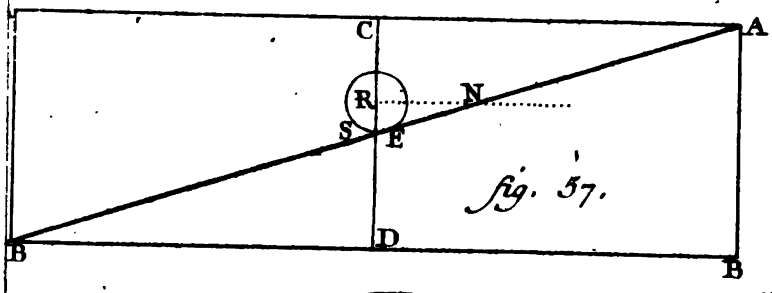
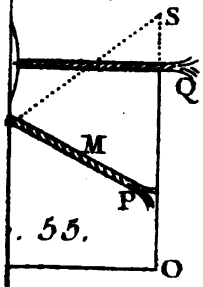


fig. 57.



. 55.

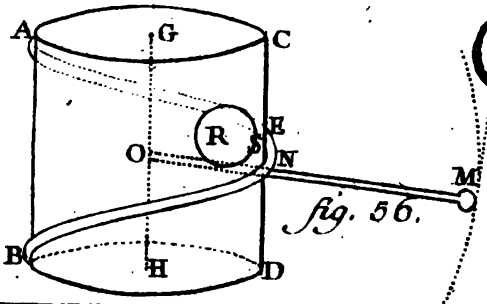
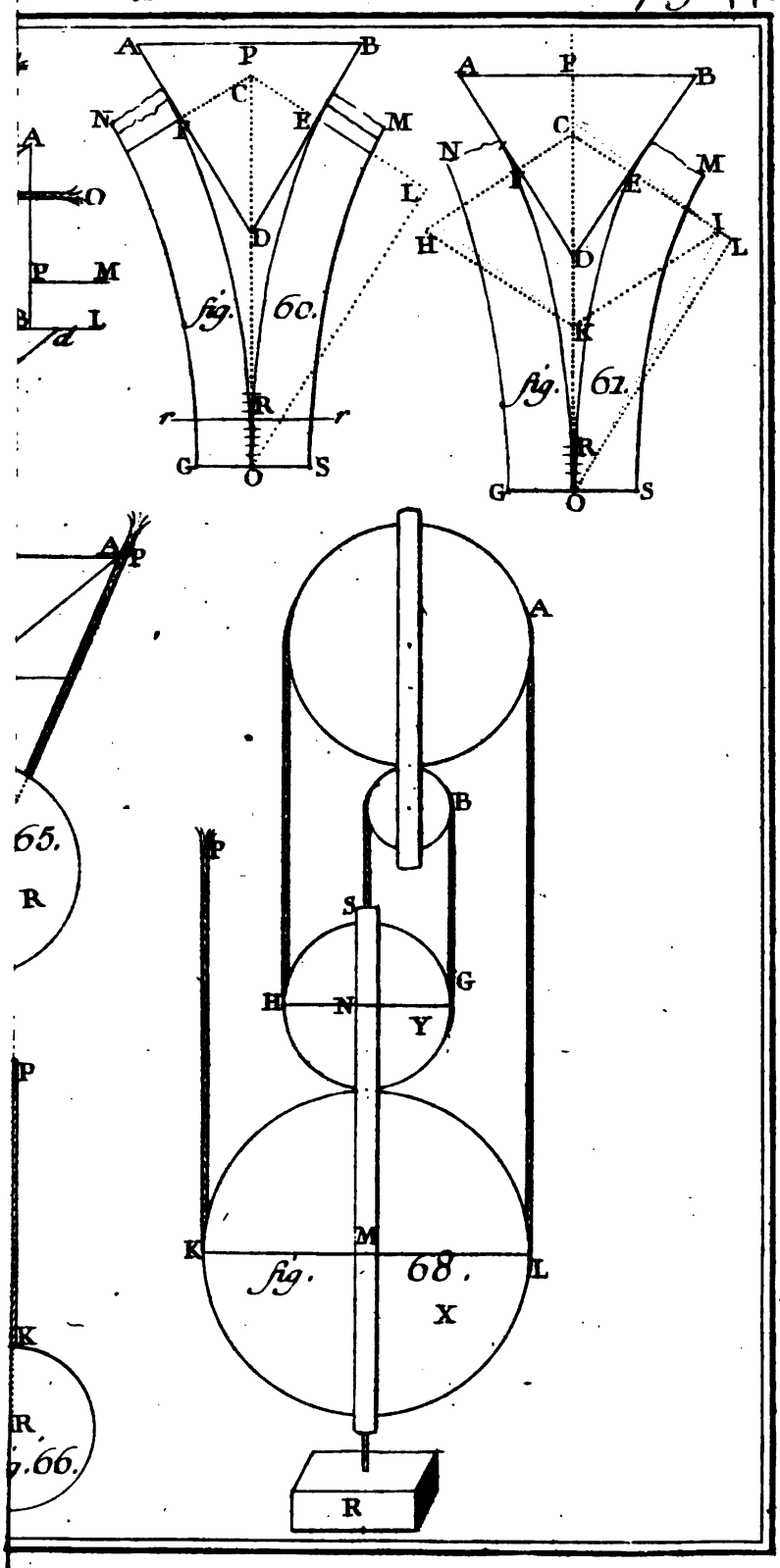


fig. 56.


A
P
B
C
N
E
M
L
D
fig. 60.
r
R
G
O
S
H
I
K
fig. 61.
fig. 68.
X
Y

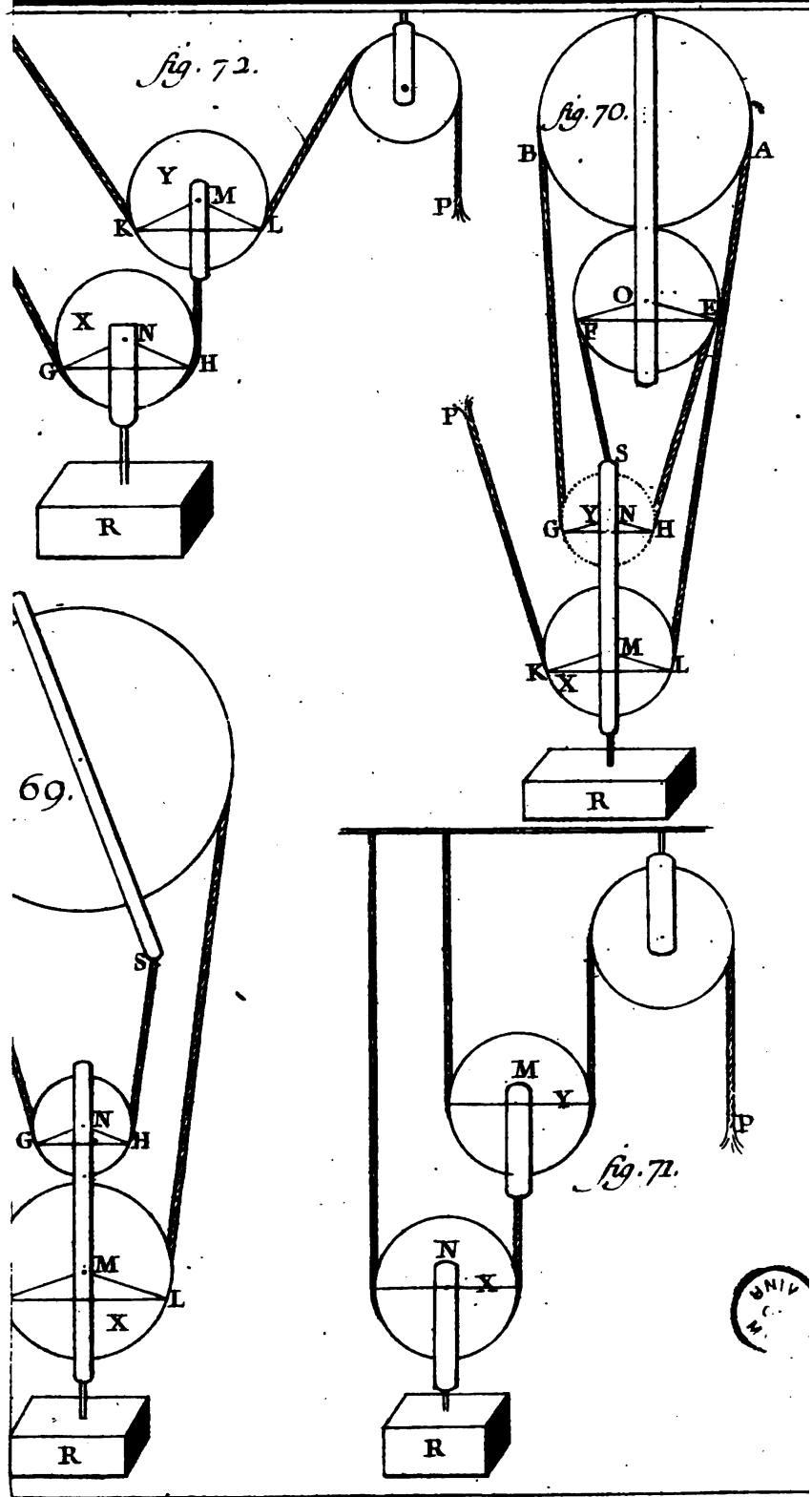


fig. 72.
Y
M
K
L
P
X
N
G
H
R
fig. 70.
B
A
O
E
F
P
S
G
Y
N
H
M
K
X
L
R
69.
S
G
N
H
M
L
X
R
fig. 71.
M
Y
P
N
X
R

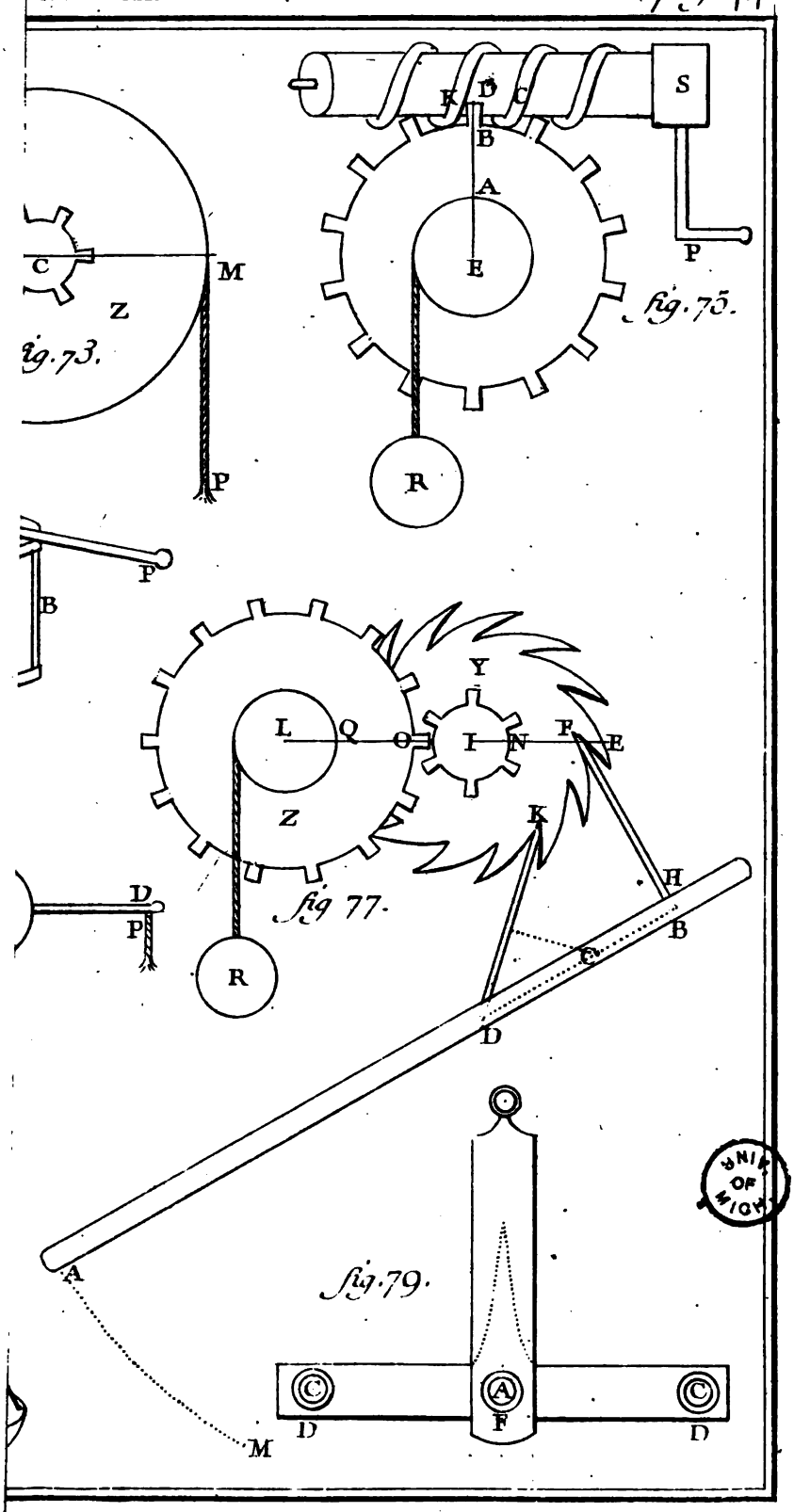
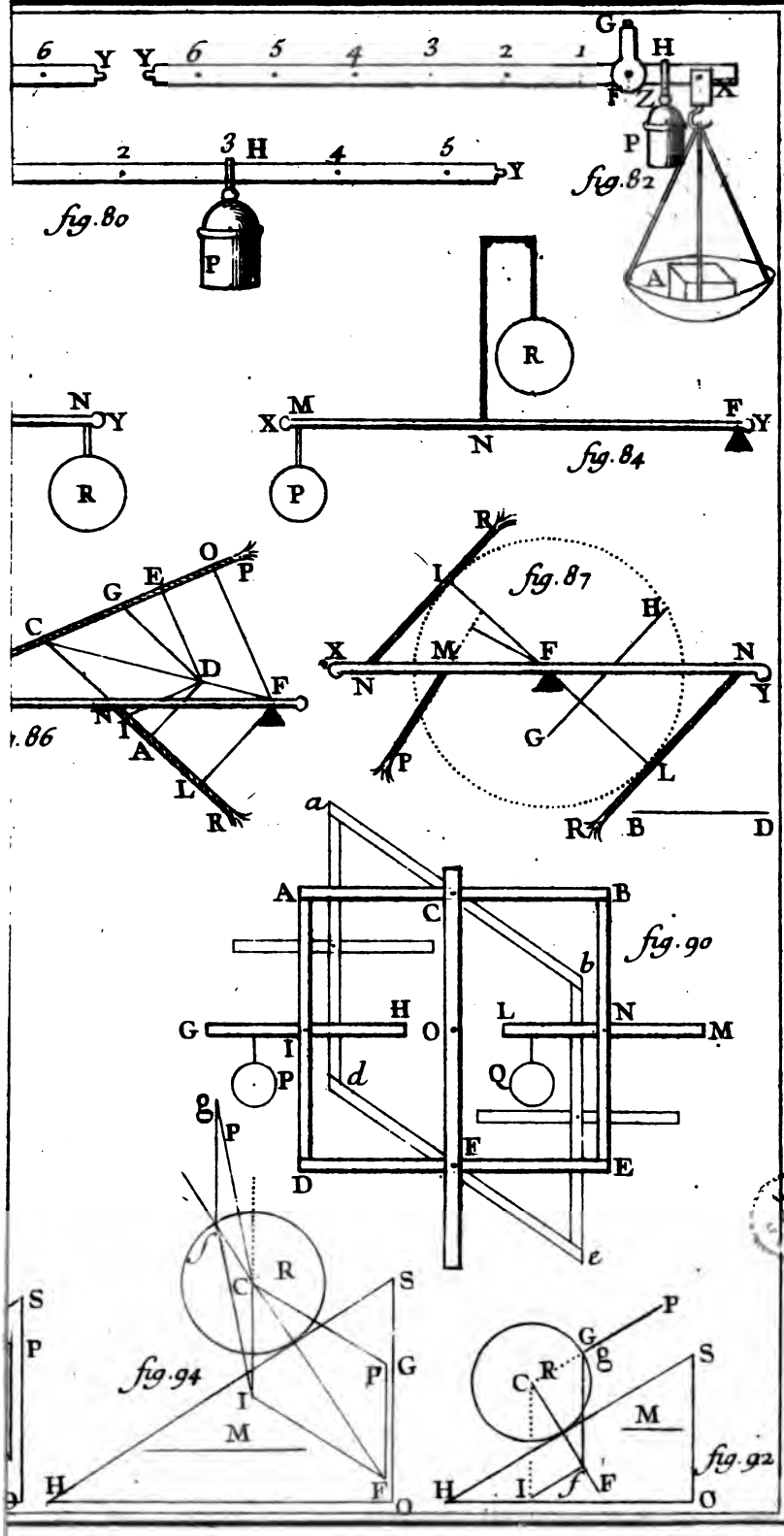


fig. 73.

fig. 75.

fig 77.

fig. 79.


6 Y Y 6 5 4 3 2 1
G H F X
2 3 H 4 5 Y
P
fig. 80
fig. 82
A
R
N Y
M X F Y
N
R
P
fig. 84
O P E G C D F N I A L R
.86
R I H M X F N Y N G P L R B D
fig. 87
a A B C b H G O I P d L N M Q
g P F E D e
fig. 90
S P
C R S P G I M H F O
fig. 94
G P g C R S M H I f F O
fig. 92

FORMATION DE L'ELLIPSE

avec les proprietez qu'on en déduit & qui ont rapport aux propoſitions qui concernent la force centrale dans l'ellipſe.

1°. IL faut attacher ſur un plan les deux bouts d'un fil FM*f* en deux points fixes F, *f*, dont la diſtance F*f* ſoit moindre que la longueur du fil, ſe ſervir d'un ſtile M pour tenir ce fil toujours également tendu, ſi on conduit le ſtile M ainſi retenu par les deux portions FM, *f*M du fil autour des points F, *f* en le tenant pendant le mouvement parallele à lui même, c'eſt-à-dire, perpendiculaire au plan, il décrira par ſon extrêmité ou pointe, une courbe AB, *ab* qui eſt appellée ellipſe. Fig. 1.

2°. Les deux points F, *f* ſont appellez *foyers*. La ligne A*a* qui paſſe par les deux foyers & qui eſt terminée de part & d'autre à l'ellipſe, eſt appellée le *grand axe*. Le point C qui diviſe par le milieu le grand axe A*a*, eſt nommé le centre de l'ellipſe. La ligne B*b* menée par le centre perpendiculairement au grand axe, & terminée de part & d'autre à l'ellipſe, eſt appellée petit axe. Les deux axes enſemble ſont dits *conjuguez* l'un à l'autre. Les lignes MP, MK menées des points M, M de l'ellipſe parallelement à l'un des axes, & terminées par l'autre, ſont appellées *ordonnées* à cet axe; ainſi MP eſt ordonnée à l'axe A*a*, & MK à l'axe B*b*. La troiſiéme proportionnelle aux deux axes, eſt appellée *parametre* de celui qui eſt le premier de la proportion. Ainſi ſi on fait la proportion, le grand axe A*a* eſt au petit axe B*b* comme le ſecond B*b* eſt à une troiſiéme ligne, elle ſera le parametre du grand axe: les lignes droites qui paſſent par le centre C, & qui ſont terminées de part & d'autre par l'ellipſe, ſont appellées *diametres*. Le grand axe A*a* eſt égal à la longueur FM*f*, & à la ſomme de deux lignes tirées d'un point M de l'ellipſe aux foyers.

3°. Si de l'extrêmité F du diametre GF, on mene une tangente OFX, c'eſt-à-dire, une ligne qui touche l'ellipſe ſans la couper, que l'on mene un autre diametre LH parallele à la tangente OFX, les diametres GF, LH enſemble, ſont appellés *conjuguez* l'un à l'autre. Si d'un point D de l'ellipſe on mene des paralleles DN à la tangente OX ou au diametre LH, & terminées par ſon conjugué GF, elles ſont appellées *ordonnées* au diametre GF: une troiſiéme proportionnelle aux diametres conjuguez GF, LH, eſt appellée parametre du diametre GF qui eſt le premier terme de la proportion. Fig. 2.

4°. La principale propriété de l'ellipſe par rapport aux deux axes & à deux diametres conjuguez, eſt que le quarré d'une ordonnée à un diametre eſt au rectangle des deux parties de ce diametre faites par l'ordonnée, comme le quarré du diametre conjugué eſt au quarré du même diametre auquel on a mené l'ordonnée: ainſi ſi on mene DN ordonnée au diametre GF, que le diametre LH ſoit parallele à la tangente OFX ou VGY, l'on aura la proportion $\overline{DN}^2 . NF \times NG :: \overline{LH}^2 . \overline{GF}^2$; au lieu des quarrez des diametres LH, GF on peut mettre dans la proportion les quarrez de leurs moitiez CH, CG, car tous les diametres ſont diviſez en deux parties égales par le centre C.

5°. On déduit encore de la formation de l'ellipſe, que ſi du point D de l'ellipſe d'où l'on a mené l'ordonnée DN, on tire une tangente DP qui rencontre le diametre GF prolongé en P, le demi diametre CF eſt moyen proportionnel entre les parties CP, CN compriſes entre le centre C & la tangente DP & l'ordonnée DN; en ſorte que CP . CF :: CF . CN. C'eſt auſſi une propriété
Fig. 3. de l'ellipſe que ſi d'un point G on mene une tangente PGZ, & de ce point les lignes GF, GI aux foyers F, I, les angles ZGF, PGI formez par la tangente PGZ, & les lignes GF, GI ſont égaux.

Fig. 2. 2. *Soit l'ellipſe* ADBE *dont les deux axes ſont* AB, ED; *& deux diametres conjuguez* LH, GF. *Si au tour des deux axes on conſtruit le rectangle* ZI *qui aura pour côtez les mêmes axes; & autour des deux diametres conjuguez le parallelogramme* OY *qui aura auſſi pour côtez ces mêmes diametres, je dis que le parallelogramme* OY *eſt égal au rectangle* ZI.

DEMONSTRATION. 1°. Il eſt évident que le rectangle CT eſt le quart du rectangle ZI, & que le parallelogramme CO eſt la quatriéme partie du parallelogramme OY. Il ſuffit donc de démontrer que CO = CT. 2°. Il faut mener QDN parallele à LH & SHM parallele à TI ou DE, & tirer DH. Cela fait, il faut remarquer que le parallelogramme CQ eſt double du triangle CDH (24. *Géom.*); car ces deux figures ont même baſe CH & même hauteur, puiſqu'elles ſont compriſes entre mêmes paralleles QN, CH. Le rectangle CS eſt auſſi double du même triangle CDH, car ces deux figures ont même baſe CD, & ſont compriſes entre mêmes paralleles DC, SM; d'où il ſuit que le parallelogramme CQ eſt égal au rectangle CS, puiſqu'ils ſont égaux l'un & l'autre au triangle DCH. 3°. Les trois parallelogrammes VCPR, CO & CQ, étant compris entre les mêmes paralleles CP & OV ſont entr'eux comme les baſes CP, CF, CN. Pareillement le même

parallelogramme VCPR & les deux rectangles CT, CS, ſont compris entre mêmes paralleles CV & PT ; donc ils ſont entr'eux comme les baſes CV, CA, CM. Or par la propriété de l'ellipſe, on a CP. CF :: CF. CN, on a auſſi CV. CA :: CA. CM. (*n.* 5.) Si on poſe les parallelogrammes au lieu des baſes, l'on aura encore VCPR. CO :: CO. CQ & VCPR. CT :: CT. CS ; mais dans ces deux proportions continues, les extrêmes ſont les mêmes, puiſque CQ = CS ; donc le moyen proportionnel CO eſt égal au moyen proportionnel CT. Ce qu'il falloit démontrer.

3. *Soit l'ellipſe* AEBD *dont les axes ſont* AB, ED *&* GX, LH *deux diametres conjuguez*, F, I *les foyers* FG, IG *deux lignes menées des mêmes foyers à l'extrêmité* G *du diametre* GX. *Je dis que la partie* GO *que le diametre* LH *retranche de* GF *eſt égale à la moitié du grand axe* ED, *c'eſt-à-dire, que* GO = EC. Fig. 3.

Demonstration. Par le point G il faut mener la tangente PGZ qui ſera parallele au diametre LH, & par le point I, IM parallele à GPZ qui rencontre FG au point O. On ſçait que les angles IGP, FGZ ſont égaux (*n.* 5.) ; donc leurs alternes GIM, GMI ſont auſſi égaux ; donc les côtez GM, GI oppoſez à ces angles ſont auſſi égaux ; d'ailleurs à cauſe des paralleles IM, CO, de même que FI eſt diviſée en deux parties égales au point C, ainſi FM eſt auſſi diviſée en deux parties égales au point O. Donc GM + MO = GI + FO, c'eſt-à-dire, que GM + MO priſes enſemble ſont égales à la moitié des lignes FG, GI, de plus FG + GI = ED (*n.* 2.) ; donc GM + MO qui eſt la moitié de cette ſomme FG + GI eſt égale à EC moitié de ED.

4. *Si d'un point* R *de l'ellipſe on mene* RV *ordonnée au diametre* GX *qui coupe* FG *au point* K, *&* RS *perpendiculaire à la même* FG, *je dis que* RS. RK :: CB. CH ; *c'eſt-à-dire, comme la moitié du petit axe eſt à la moitié du diametre* LH *conjugué au diametre* GX. Fig. 3.

Demonstration. Il faut mener GN perpendiculaire au diametre LH ; les triangles GON, RKS ſont ſemblables, car les angles N, S ſont droits, & à cauſe des paralleles RK, ON, les angles alternes O, K ſont égaux ; donc RS. RK :: GN. GO ou EC ; de plus le rectangle EB eſt égal au parallelogramme GH (*n.* 3, *& art.* 2.) lequel eſt égal au produit de ſa baſe CH par la hauteur GN ; donc EC × CB = CH × GN. D'où il ſuit que GN. EC :: CB. CH, par conſéquent RS. RK :: CB. CH.

Corollaire. Donc $\overline{RS}$. $\overline{RK}$ :: $\overline{CB}$. $\overline{CH}$.

5. Remarque. Si le point R s'approche continuellement du point G, la difference de RV à RK ira en diminuant, en ſorte que le point R étant infiniment proche du point G, pour lors cette difference pourra être conſiderée comme nulle, & on pourra prendre indifferemment l'une pour l'autre. De même VX ne differant de GX que d'une partie infiniment petite, on pourra prendre l'une pour l'autre. Cela poſé, ſi l'on nomme P le parametre du grand axe ED.

6. Je dis que $\overline{RS}^2 = GK \times P$. Selon la remarque on prendra RV pour RK & $\overline{RV}^2$ pour $\overline{RK}^2$, on prendra auſſi au lieu de GV × VX, GV × GX, & encore GV × 2GC. Les triangles ſemblables GVK, GCO, donnent la proportion. GV . GK :: GC . GO ou EC

par la propriété de l'ellip. $\overline{RV}^2 . GV \times 2GC :: \overline{CH}^2 . \overline{GC}^2$

les (*art.* 4. 5.) donnent $\overline{RS}^2 . \overline{RV}^2 :: \overline{CB}^2 . \overline{CH}^2$

Si on multiplie par ordre & qu'on réduiſe enſuite les produits à leur plus ſimple expreſſion, on trouvera $\overline{RS}^2 . 2GK :: \overline{CB}^2 .$ GO ou EC; d'ailleurs par la propriété de l'ellipſe, l'on a auſſi $2EC \times P = 4\overline{BC}^2$ ou $EC \times P = 2\overline{BC}^2$, & encore $\frac{EC \times P}{2} = \overline{BC}^2$. Si dans la proportion précédente au lieu de $\overline{CB}^2$ on met ſa valeur, on aura $\overline{RS}^2 . 2GK :: \frac{EC \times P}{2} .$ EC, ou encore $\overline{RS}^2 . 2GK :: \frac{P}{2} . 1$. Si on multiplie les extrêmes & les moyens, on aura $\overline{RS}^2 = 2GK \times \frac{P}{2} \times 1 = GK \times P$; donc $\overline{RS}^2 = GK \times P$.

Il ſuit de-là que ſi de quelque point G de l'ellipſe on mene une tangente & un ligne au foyer F; que d'un point R infiniment proche du point G on mene une parallele RK à la tangente, & une autre ligne RS perpendiculaire à GF, on aura par tout $\overline{RS}^2 = GK \times P$.

7. Deux ellipſes ſont entr'elles comme les rectangles faits ſous leurs axes.

8. Le quarré de l'un des axes eſt égal au rectangle ſous l'autre axe & ſon parametre.

De la cycloïde. Sa formation.

Fig. 4. 5. *Si l'on imagine que le demi-cercle* AFE *roule ſur la ligne droite* ED, *& que le point* A *décrit en même-tems une courbe* AHD *ſur le même plan où eſt la ligne* ED *& le cercle* AFE, *cette courbe*

ſe nomme cycloïde : ſi on fait rouler le demi-cercle de l'autre côté du diametre AE *ſur la ligne droite* EQ *prolongement de* DE, *on décrira l'autre partie de la cycloïde. Le cercle* AEF *eſt appellé cercle générateur : la ligne* BEQ *eſt appellée la baſe de la cycloïde, & le diametre* AE *perpendiculaire à la baſe* DQ *en eſt l'axe. Le point* A *eſt appellé point décrivant.*

1. Il ſuit de cette formation 1°. que le centre C du cercle générateur eſt à égale diſtance de la baſe DQ pendant tout le tems du mouvement. Donc ſi du centre C on mene CH parallele à DQ, ce centre ne quittera pas cette ligne. 2°. Il eſt évident que ED eſt égale à la demi-circonférence AFE, car par le roulement du demi cercle, cette demi-circonference ſert comme meſurée ſur ED par l'application ſucceſſive de ſes points ſur cette ligne. 3°. Si l'on conçoit que le centre du cercle générateur eſt allé en *c*, que de ce point comme centre, on décrive avec le rayon *ce* ou *ca* une demi-circonférence qui rencontre la cycloïde au point *a*, & la baſe au point G ; que par le point *a* & le point *c* on mene le diametre *ace* qui coupe la demi-circonférence au point *e*, on aura la ſituation du cercle générateur qui touchera la baſe au point G, & dont le point décrivant A ſera en *a*, & tracera ce point de la cycloïde. 4°. L'arc *e* G eſt égal à la partie EG de la baſe, car tous les points de cet arc ſe ſont appliquez ſucceſſivement ſur EG. 5°. Si par le point E on mene EF parallele à G*a*, l'arc EF eſt égal à l'arc G*a* ; car les moitiez de ces arcs meſurent les angles égaux FED, *a*GD ; donc les cordes EF, G*a* ſont égales : c'eſt pourquoi ſi on mene *a*F on aura le parallelogramme *a*GEF & *a*F étant égale à EG, elle ſera égale à l'arc G*e*, & par conſéquent égale à l'arc AF, car les arcs AF & G*e* ſont égaux, puiſque les arcs EF, G*a* ſont égaux. D'où il ſuit que ſi d'un point F du cercle générateur on mene une ligne F*a* parallele à la baſe, & qui rencontre la cycloïde en un point *a*, elle ſera égale à l'arc correſpondant AF. Fig. 4.

2. Les lignes telles que F*a* paralleles à la baſe compriſes entre le cercle générateur & la cycloïde, ſont appellées *ſoutendentes* ou *ordonnées*.

3. Soit le cercle ABDC, ſi à quelque point G du diametre AC on eleve une perpendiculaire GF qui rencontre la corde AB prolongée en F, je dis que l'arc DB compris entre GF & AF, eſt moindre que la partie FD de la perpendiculaire GF. Il faut mener la tangente BE. Fig. 6.

Les angles BAC, BCA valent un angle droit ; les angles FBE, EBC valent auſſi un droit, d'ailleurs l'angle BAC eſt égal à l'an-

gle EBC ; donc l'angle FBE eſt égal à l'angle BCA ; de plus les triangles AGF , ABC ſont ſemblables ; donc l'angle BCA eſt égal à l'angle F ; donc l'angle F & l'angle FBE qui ſont égaux à l'angle BCA ſont égaux entr'eux ; donc le triangle FBE eſt iſoſcele ; donc BE=FE. Si on ajoute de part & d'autre ED , BE +ED=FE +ED , or BE+ED eſt plus grand que l'arc BD ; donc FE+ED ou FD eſt plus grande que l'arc BD.

Si on éleve une autre perpendiculaire MN qui rencontre la corde AN au point N , je dis que l'arc BN compris entre les deux cordes AB , AN eſt plus grand que la partie PN de la perpendiculaire MN. Dans le triangle NBP , l'angle NBP formé par les cordes NB , AB eſt moindre que l'angle BCA , parce que le premier a pour meſure la moitié de l'arc AN , & le ſecond la moitié de l'arc AB ; mais l'angle BPN qui eſt égal à l'angle alterne F, eſt auſſi égal à l'angle BCA ; donc dans le triangle NBP l'angle B eſt moindre que l'angle P ; donc NP eſt moindre que NB ; mais la corde NB eſt moindre que l'arc NB ; donc NP eſt moindre que l'arc NB , ou l'arc NB plus grand que NP.

Si l'arc BD étoit infiniment petit , il ſe confondroit avec la tangente BE , pour lors FE qui eſt égale à BE ſeroit égale à l'arc BD , & l'on auroit encore le triangle iſoſcele BFD qui ne ſeroit pas different du triangle iſoſcele BFE.

Fig. 5. 4. Si on propoſe de mener du point G une tangente à la cycloïde , il faut tirer GB parallele à la baſe de la cycloïde , qui rencontre le cercle générateur au point B , mener enſuite la corde AB , à laquelle par le point donné G , il faut mener la parallele IGK , elle touchera la cycloïde au ſeul point G.

Si on dit que cette parallele touche la cycloïde aux points I , K , je démontre le contraire en cette maniere ; De ces points il faut mener ID , KN paralleles à la baſe de la cycloïde qui rencontrent le cercle générateur aux points N,D,& qui étant prolongées ou non , rencontrent la corde AB auſſi prolongée s'il eſt néceſſaire aux points F , P , & la cycloïde aux points S , R.

Si les points I , K ſont à la cycloïde, il faut que ID ſoit égale à l'arc AND,& que KN ſoit égale à l'arc AN.(*art.* 1. *n.* 5.)Or 1°. IF étant égale à GB , eſt auſſi égale à l'arc AB ; mais l'arc BD eſt plus petit que FD ; donc IF +FD eſt plus grande que l'arc AB + BD , c'eſt-à-dire que ID eſt plus grande que l'arc AD. 2°. KP étant égale à GB eſt auſſi égale à l'arc AB , mais l'arc BN eſt plus grand que NP ; donc ſi de KP on retranche PN & de l'arc AB , l'arc BN , le reſte KN eſt plus grand que l'arc AN ; donc KN

n'eſt pas égale à l'arc AN, ni ID à l'arc AD; donc les points K, I ſont hors de la cycloïde.

5. Si l'on ſuppoſe que les ordonnées NR, DS ſont infiniment proches de l'ordonnée BG, 1°. les arcs BN, BD étant infiniment petits, ne differeront point des tangentes des mêmes arcs, & les triangles FDB, MBN ſeront iſoſceles. 2°. Les cordes AD, AN étant infiniment proches de la corde AB, formeront des angles infiniment petits avec AB, & ces trois lignes ſeront cenſées paralleles : c'eſt pourquoi ſi des points B & D on éléve DO, BL perpendiculaires, ſçavoir DO ſur AD, & BL ſur AB, DO ſera auſſi perpendiculaire ſur AB, & BL ſur AN, & AD ſera égale à AO, & AB à AL; donc BO eſt la difference des cordes AD, AB, & NL la difference des cordes AB, AN : or puiſque les triangles FDB, MBN ſont iſoſceles, il s'enſuit que les baſes BF, NM ſont diviſées en deux parties égales aux points O, L, & que les differences BO, NL ſont les moitiez des mêmes baſes. 3°. Les arcs GR, GS étant infiniment petits, ſe confondront avec les petites tangentes GK, GI, qui deviendront par là les côtez de la courbe : or GI=BF & GK dans l'hypotheſe preſente eſt égale à MN : d'où il ſuit que les petits arcs GR, GS ſont auſſi égaux à NM & BF, c'eſt-à-dire, au double des differences BO, LN. On fera voir de la même maniere que tout autre arc de la cycloïde compris entre deux ordonnées infiniment proches eſt égal au double de la difference de deux cordes voiſines qui terminent l'arc de cercle correſpondant à l'arc de la cycloïde. 4°. Si l'on met en une ſomme les differences BO, NL, &c. de toutes les cordes tirées du point A à l'arc AD, elles ſont égales à la corde AD; ce qui paroît, ſi du point A on décrit les arcs LB*b*, N*n*. Or comme il y a autant de differences que l'arc AS de la cycloïde contient de petits arcs, tels que GS, GR, & que chacun de ces arcs eſt double de la difference correſpondante, il s'enſuit que l'arc AS eſt double de la corde AD. On fera voir de la même maniere que l'arc AG eſt double de la corde AB, & l'arc AR double de la corde AN, en un mot un arc de la cycloide pris à volonté depuis le point A, eſt double de la corde correſpondante. Fig. 5.

6. Soit la demi cycloïde renverſée AND dont le cercle générateur eſt AME; ſi on attache un fil par un bout au point D, & qui étant plié ſur la demi cycloïde vienne toucher par l'autre bout le bas qui eſt au point A, je dis qu'en ſe dévelopant il décrira par ſon extrémité R une autre demi cycloïde ARS égale en tout à la demi cycloïde AND, ſuppoſé que la partie dévelopée NR demeure toûjours tendue. Les parties du fil telles que RN Fig. 7.

qui ſe ſont détachées ſucceſſivement de la courbe ſont appellées rayons de la dévelopée AND, & ces rayons ſont tangentes de la courbe AND aux points N. Car l'extrêmité N du rayon RN eſt commun au rayon & à la courbe : or comme cette extrêmité eſt appliquée ſur la convexité de la courbe, il s'enſuit qu'elle en eſt un petit côté dont le rayon RN eſt le prolongement ; donc le rayon RN touche la courbe au point N. Cela poſé, ſi du point N on mene NM parallele à la baſe ED qui rencontre le cercle générateur au point M, & la corde MA. 1°. Cette corde ſera parallele au rayon RN. 2°. L'arc AN de la cycloïde ſera double de cette corde ; donc le rayon RN qui eſt égal à l'arc AN eſt double de la corde AM, mais GN = AM ; donc le rayon RN eſt diviſé en deux parties égales au point G. Cela étant, ſi ſur DBS parallele à EA on prend BS égale au diametre EA, qu'on décrive le demi cercle BOS, que par le point R on mene RO parallele à AB qui rencontre le cercle BOS au point O, l'on aura RO égale à l'arc OS, car l'arc AM = l'arc BO, puiſque les paralleles RO, MN ſont équidiſtantes de AB ; donc l'arc OS = l'arc EM, de plus l'arc AM = MN ou AG, & l'arc AME = ED ou AB ; donc EM = GB = RO ; donc OS qui eſt égal à EM eſt égal à RO ; donc ſi avec le cercle BOS on décrit une demi cycloïde dont la baſe ſoit EB, le point R ſera un point de cette cycloïde, puiſque l'ordonnée RO eſt égale à l'arc correſpondant SO : on démontrera de la même maniere pour tout autre point R décrit par le rayon RN, que ce point appartient à la cycloïde ARS qui a pour cercle générateur BOS ; ainſi puiſque les deux demi cycloïdes AND, ARS, ont leur cercle générateur égal, il s'enſuit qu'elles ſont égales en tout.

FORMATION DE LA PARABOLE AVEC QUEQUES-UNES DES principales propriétez qu'on en déduit.

Fig. 8. 1°. *Il faut placer ſur un plan une regle* BC *& une équerre* GDO, *en ſorte que l'un de ſes côtez* DG *ſoit couché le long de cette regle, & prendre un fil* FMO *égal en longueur à l'autre côté* DO *de cette équerre, l'une des extrêmitez du fil étant attachée à l'extrêmité inferieure* O *de l'équerre, & l'autre extrêmité du fil étant arrêtée à un point fixe* F *ſur le plan où la regle* BC *eſt couchée : ſi l'on fait gliſſer le côté* DG *de l'équerre le long de la regle* BC, *& qu'en même-tems on ſe ſerve d'un ſtile ou poinçon* M *pour tenir toujours le fil tendu, & ſa partie* MO *toute jointe & comme collée contre le côté* OD *de l'équerre, la courbe* AMX *que le ſtile* M *décrit dans ce mouvement eſt une portion de* PARABOLE. *Si l'on renverſe l'équerre de l'autre côté du point fixe* F, *on décrira en la même façon l'autre por-*

tion AMZ, *& les deux portions* XAZ *ne feront qu'une même courbe qu'on appelle* PARABOLE.

2. La ligne droite BC dans laquelle l'équerre touche la regle eſt appellée *directrice*, le point F *foyer* de la parabole ; la ligne AF indéfiniment prolongée, eſt appellée *l'axe*, le point A le *ſommet* de la parabole. Une ligne P quadruple de AF, eſt appellée *parametre* de l'axe. Toutes les lignes comme MP menées d'un point de la parabole perpendiculairement à l'axe, ſont appellées *ordonnées* à l'axe, & les parties de l'axe telles que AP compriſes entre le ſommet A, & les ordonnées, ſont appellées *coupées*.

3. La principale propriété de la parabole par rapport à l'axe, eſt que le quarré d'une ordonnée eſt égal au rectangle qui auroit pour côté la coupée correſpondante & le parametre de l'axe. D'où il ſuit que les quarrez des ordonnées à l'axe, ſont entr'eux comme les coupées correſpondantes. Ainſi l'on aura $\overline{MP}^2 = AP \times 4AF$ & les quarrez $\overline{MP}^2$, $\overline{LS}^2$ des ordonnées MP, LS entr'eux comme les coupées AP, AS.

Une ligne droite qui touche la parabole en un point ſans la couper, quoique prolongée de part & d'autre de ce point, eſt appellée *tangente*.

4. La méthode de mener d'un point donné ſur la parabole une tangente, eſt fort aiſée. Si on propoſe, par exemple, de mener du point M une tangente, il faut de ce point abbaiſſer une perpendiculaire MP à l'axe, elle ſera une ordonnée, & AP ſera la coupée ; il faut prolonger l'axe au-delà du ſommet A par rapport au foyer F, prendre AT égale à AP, tirer la ligne MT, elle ne touchera la parabole qu'au point M ſans la couper, quoique prolongée, c'eſt-à-dire qu'elle ſera tangente. Fig. 8. 9.

5. Les lignes telles que MO menées d'un point de la parabole parallelemment à l'axe, ſont appellées diametres. Si d'un point M extrêmité du diametre MO, on mene une tangente MT & d'un point N du même diametre, une ligne NH parallele à la tangente MT, & qui rencontre la parabole au point H, elle eſt appellée *ordonnée* au diametre MO, & la partie MN eſt *la coupée*. Le quadruple de la ligne FM menée du foyer F à l'origine M du diametre MO eſt appellée le *parametre* de ce diametre.

6. Et l'on démontre que le quarré d'une ordonnée telle que NH, eſt égal au rectangle qui auroit pour côtez la coupée MN & le parametre 4FM. D'où l'on conclut encore que les quarrez des ordonnées à un diametre MO ſont entr'eux comme les coupées. Si l'on mene HI parallele au diametre MO, & qui rencon-

tre la tangente MT au point I, la partie MI ſera égale à l'ordonnée NH, & la parallele HI compriſe entre la parabole & la tangente égale à la coupée MN, & il en eſt de même par rapport aux autres ordonnées & aux autres coupées qui leur correſpondent. D'où l'on conclut que les paralleles au diametre MO compriſes entre la parabole & la tangente telles que HI ſont entr'elles comme les quarrez des parties MI de la tangente MT compriſes entre l'origine M du diametre MO & les paralleles qui leur correſpondent.

Fig. 9. 7. *Soit la demi parabole* AIM *dont le ſommet eſt au point* A, *l'axe* AP *&* MP *l'ordonnée. Si on conſidere la portion infiniment petite* IM *comme un côté de la courbe* AIM, *& dont la tangente* TIM *eſt le prolongement, que l'on mene aux extrêmitez* I, M, *du petit côté* IM, *les cordes* AI, AM, *on formera le triangle* AIM, *& ſi du point* I *on mene* IF *parallele à* MP, *on formera le trapeze* IFPM; *mais parce que le côté* IM *de la courbe eſt infiniment petit;* IF *eſt infiniment proche de* MP *& n'en differe que d'une partie infiniment petite, c'eſt pourquoi on peut ſuppoſer que* IF *eſt égal à* MP, *& par conſéquent que la figure* IFPM *eſt un rectangle qui a pour baſe* MP, *& pour hauteur* PF *ou ſon égale* DI. *Cela poſé, je dis que le triangle* AIM *eſt le quart du rectangle* IFPM. Pour le démontrer il faut du point A ſommet de la parabole, mener la tangente AZ qui rencontre la tangente MT au point B, elle ſera (comme on ſçait perpendiculaire à l'axe AP, & parallele à l'ordonné MP: & ſi du point A on mene encore AE perpendiculaire à la tangente MT, elle ſera la hauteur du triangle AIM,) puiſqu'elle eſt tirée du ſommet A ſur la baſe IM prolongée, & l'on aura de plus les triangles EAB, DIM qui ſont ſemblables, les angles E, D étant droits, & les angles B, M égaux, parce que AB DM ou PM ſont paralleles; donc on a la proportion MI. DI :: BA. EA; donc MI×EA=DI×BA; donc le triangle AIM qui eſt égal à la moitié du premier de ces deux produits, eſt auſſi égal à la moitié du ſecond; ainſi le triangle AIM eſt la moitié du rectangle qui auroit pour baſe BA, & pour hauteur DI ou PF; mais parce que le point A diviſe PT en deux parties égales (par la propriété de la parabole), il s'enſuit que AB n'eſt que la moitié de PM, de plus le rectangle DI×BA & le rectangle IFPM ont même hauteur qui eſt DI ou PF; donc ils ſont entr'eux comme les baſes AB, PM, c'eſt-à-dire, que le rectangle DI×AB eſt la moitié du rectangle IFPM; donc le triangle AIM qui eſt la moitié du rectangle DI×AB n'eſt que le quart du rectangle IFPM.

8. COROLLAIRES.

8. COROLLAIRES. 1°. Si des extrêmitez de tout autre côté de la courbe AIM on mene deux cordes au point A & deux perpendiculaires à l'axe AP, on formera un nouveau triangle & un nouveau rectangle, & le triangle ſera le quart de ce rectangle auquel il correſpond, ce qu'on prouvera de la même maniere & en faiſant la même conſtruction que pour le triangle AIM.

9. 2°. Il eſt évident qu'on peut former autant de triangles & autant de rectangles qu'il y a de petits côtez ſur la courbe AIM, & que chaque triangle ne ſera que le quart du rectangle correſpondant.

10. 3°. Il eſt auſſi évident que tous les triangles enſemble qui ont pour baſes les côtez de la courbe AIM, & pour ſommet commun le point A, rempliſſent exactement le ſegment parabolique AIMA & que leur ſomme eſt égale à ce ſegment. Pareillement tous les rectangles enſemble qui correſpondent aux mêmes triangles, compoſent le ſecteur parabolique AIMPA, & leur ſomme eſt égale au même ſecteur.

11. 4°. Il ſuit de ce dernier Corollaire que le ſegment AIMA eſt le quart du ſecteur AIMPA : car ces deux aires ou ſurfaces ſont compoſées d'autant d'élémens l'une que l'autre, puiſque le nombre des uns & des autres eſt égal au nombre de côtez qui compoſent la courbe AIM ; d'ailleurs les élémens du ſegment AIMA ne ſont que le quart des élémens correſpondans du ſecteur AIMPA ; donc la ſomme d'une part n'eſt que la quatriéme partie de la ſomme de l'autre part ; donc l'aire du ſegment n'eſt que la quatriéme partie de l'aire du ſecteur.

12. 5°. Le triangle APM eſt les trois quarts du ſecteur parabolique, puiſque le ſegment AIMA en eſt le quart.

13. 6°. Si on décrit le rectangle AGMP, l'on aura l'eſpace parabolique AGMA qui eſt la moitié du ſecteur AIMPA : car cet eſpace joint au ſegment AIMA, compoſe le triangle rectangle AGM ou APM qui eſt les trois quarts du ſecteur parabolique ; donc ſi du triangle AGM on retranche le ſegment AIMA qui eſt le quart du même ſecteur, le reſtant ſera les deux quarts ou la moitié du ſecteur parabolique.

14. 7°. Le ſecteur parabolique AIMPA eſt au rectangle AGMP comme 4 eſt à 6 ; car ſi l'on diviſe le rectangle en 6 parties égales, elles ſeront priſes enſemble égales au ſecteur AIMPA, & à l'eſpace AGMIA : or le ſecteur en contient 4 & l'eſpace AGMIA en contient 2, puiſqu'il eſt la moitié du même ſecteur ; donc le ſecteur eſt au rectangle AGMP comme 4 eſt à 6 ou comme 2 eſt à 3 : ainſi ce ſecteur eſt les deux tiers du rectangle AGMP, & l'eſpace AIGMA en eſt l'autre tiers.

AVERTISSEMENT POUR LES PROPOS. D'ARITHMÉTIQUE & de Géométrie élémentaire qui ſont citées dans ce Traité.

LE chiffre qui eſt au commencement de chaque propoſition indique dans quel ordre les propoſitions ſont citées. Par exemple, ſi dans le cours de ce Traité on trouve cette citation (5. *Arit.*) *le chiffre* 5 *fait connoître que pour ſçavoir quelle eſt la propoſition citée, il faut chercher dans la table ſuivante le chiffre* 5 *qui eſt à la* 5e *place ou au* 5e *rang, & la propoſition à la tête de laquelle le chiffre* 5 *ſe trouve, eſt la propoſition qu'on a eu en vue de citer. Pareillement ſi on trouve encore, par exemple, cette autre citation* (8. *Géom.*) *on ſçaura que la propoſition citée eſt au* 8e *rang ou à la* 8e *place de la table des propoſitions de Géométrie.*

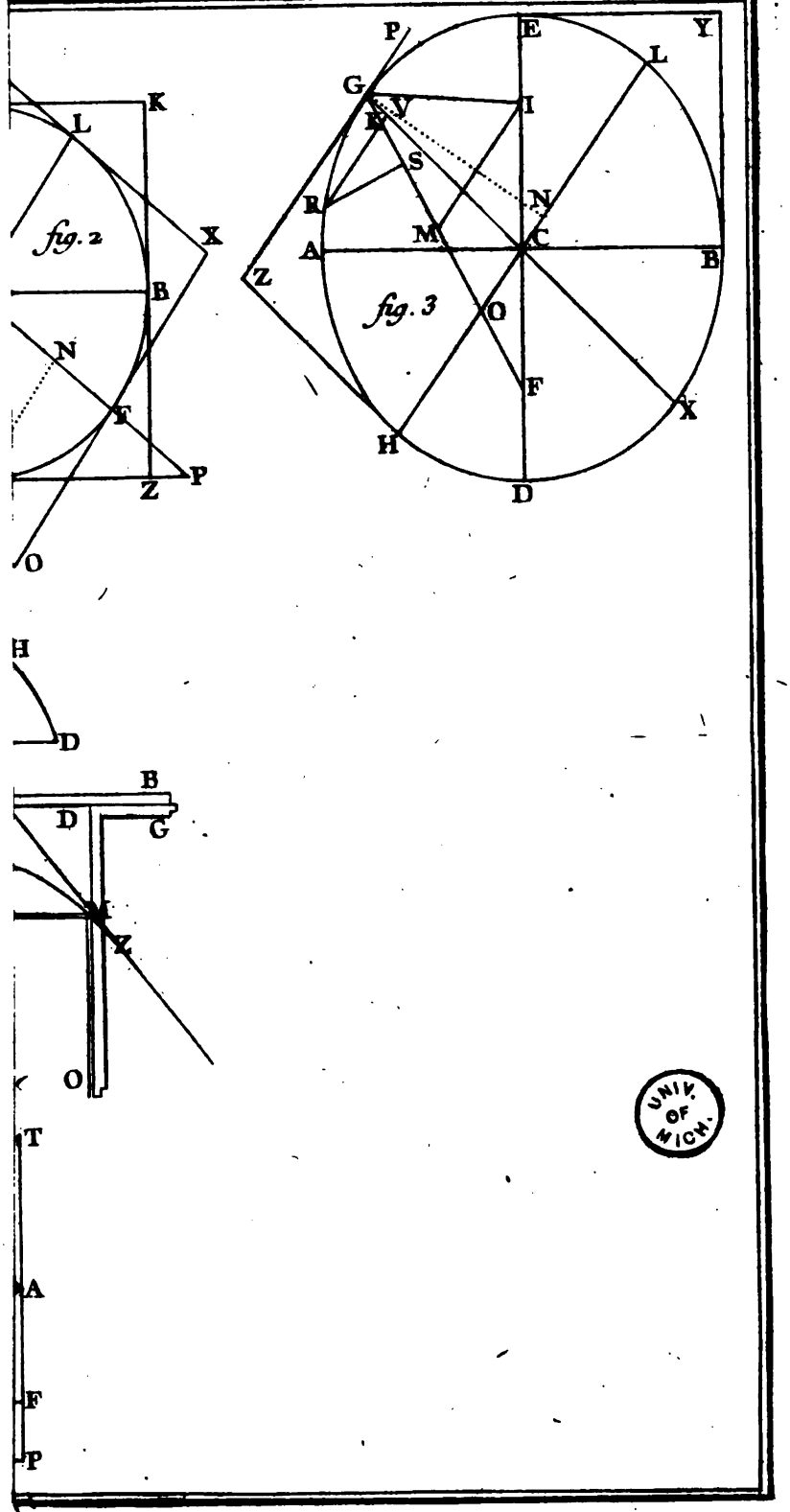
Les chiffres qui ſont à la fin des propoſitions montrent dans quel endroit du Livre des Elémens de M. RIVARD *ces propoſitions ſont expliquées & démontrées : ainſi ſi à la fin d'une propoſition citée il y a cette citation* (*Algeb. Liv.* I. *art.* 35.) *elle indiquera que la propoſition citée eſt expliquée au* 35e *article du premier Livre de l'Algebre. Il en eſt de même pour les propoſitions de Géométrie. L'Edition qu'on cite ici eſt la troiſiéme, imprimée chez* DESAINT & SAILLANT.

TABLE DES PROPOSITIONS D'ARITHMÉTIQUE *citées dans ce Traité.*

1. UN rapport géométrique ne differe pas d'une diviſion indiquée : ainſi le rapport de 30 à 5 peut être conſideré comme une diviſion qu'on propoſe de faire en diviſant 30 par 5, & dont le réſultat ou le quotient eſt 6. (*Liv. II. des Raiſons art.* 25.)

2. Par la diviſion on partage le dividende en autant de parties égales qu'il y a d'unitez au diviſeur, & le quotient eſt une de ces parties égales : ainſi ſi on propoſe de diviſer 30 en 5 parties égales en diſant 5 en 30, il y eſt 6 fois ; le quotient 6 étant contenu 5 fois dans le dividende 30 de même que le diviſeur 5 y eſt contenu 6 fois, on ſçait que le quotient 6 eſt la cinquiéme partie du dividende 30. (*Arit. Liv.* I. *art.* 85.)

3. Deux rapports qui ont un même antécedent ſont entr'eux réciproquement comme les conſéquens : ainſi les rapports de 40 à 10, & de 40 à 5, ſont entr'eux réciproquement comme 10 eſt 5 qui ſont les conſéquens. Car ces deux rapports peuvent être conſiderez comme deux diviſions indiquées, qui donnent pour quotient 4 & 8 : or 4 & 8 qui expriment les rapports de 40 à 10, & de 40 à 5, ſont entr'eux réciproquement comme les conſéquens 10 & 5. (*des proportions. Liv. II. art.* 50.)



UNIV. OF MICH.

4. Si on a deux rapports $\frac{10}{5} = 2$ & $\frac{12}{3} = 4$, qu'on multiplie les antécedens 10 & 12, & les conſéquens 5 & 3, la raiſon des produits qui eſt $\frac{120}{15}$ eſt dite compoſée de la raiſon de 10 à 5 & de celle de 12 à 3, & cela parce que le quotient 8 qui vient de la diviſion de 120 par 15, eſt égal au produit des quotiens 2 & 4 qu'on trouve en diviſant 10 par 5 & 12 par 3. En général ſi on a deux ou pluſieurs rapports $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ & qu'on multiplie les antécedens & les conſéquens, la raiſon $\frac{ac}{bd}$ des produits eſt dite compoſée de la raiſon de a à b & de celle c à d. Mais ſi on multiplie l'antécedent a par le ſecond conſéquent d, & le ſecond antécedent c par le premier conſéquent b, le nouveau rapport $\frac{ad}{bc}$ eſt appellé rapport compoſé du rapport direct de a à b, & du rapport *inverſe* de c à d, parce que les termes du rapport de c à d, ſont pris dans un ordre renverſé du rapport direct $\frac{c}{d}$. (*des propor. Liv. II. art.* 89. 92.)

5. Lorſque deux rapports ſont égaux & que l'antécédent de l'un eſt égal à ſon conſéquent, l'antécedent de l'autre rapport eſt auſſi égal à ſon conſéquent. (*des proportions. Liv. II. art.* 38.)

6. Le quotient étant multiplié par le diviſeur, donne pour produit le dividende. (*Arit. Liv. I. arti.* 72.)

7. Lorſqu'on a un produit qui réſulte de deux quantitez multipliées l'une par l'autre, ſi l'on diviſe ce produit par l'une d'elles, on trouve l'autre pour quotient: ainſi ſi on diviſe ab par a, le quotient eſt b, & ſi on diviſe ab par b on trouve a pour quotient. (*Arit. Liv. I. art.* 84.)

8. Si on multiplie deux termes d'un rapport par un même multiplicateur, ou qu'on diviſe l'un & l'autre par un même diviſeur, les produits ſont dans la même raiſon que les grandeurs multipliées & les quotiens dans la même raiſon que les grandeurs diviſées. Ainſi ſi l'on diviſe 40 & 30 par 5, les quotiens 8 & 6 ſont dans la même raiſon que 40 & 30, & ſi on multiplie les nombres 8 & 6 par un même multiplicateur 5, les produits 40 & 30 ſont dans la même raiſon que 8 & 6. (*des Raiſons. Liv. II. art.* 18. 19.)

9. Lorſque quatre grandeurs ſont en proportion, la ſomme ou la difference du premier antécédent & de ſon conſéquent eſt a l'antécédent ou au conſéquent comme la ſomme ou la difference du ſecond antécédent & de ſon conſéquent eſt à l'antécédent ou au conſéquent. Ainſi ſi l'on a 12 . 4 :: 15 . 5, on aura 16 . 4 :: 20 . 5, ou 16 . 12 :: 20 . 15, ou bien 8 . 4 :: 10 . 5, ou enfin 8 . 12 :: 10 . 15. (*des proportions. Liv. II. art.* 60. 61. *& ſuiv.*)

10. Les trois premiers termes d'une proportion étant connus, on trouve le 4.e en multipliant les deux moyens & en diviſant le

produit par le premier extrême. Ainſi on peut trouver le quatriéme terme de cette proportion 8 . 4 :: 6 . 3 en multipliant les deux moyens 4 & 6, & en diviſant le produit 24 par 8, & l'on aura 3 pour quatriéme terme. (*des proportions. Liv. II. art.* 72.)

11. Lorſque le produit de deux grandeurs eſt égal au produit de deux autres, on peut toujours diſpoſer les racines ou les produiſants en proportion : ainſi ſi $4\times6=8\times3$ les racines 4, 6, 8, 3, peuvent être diſpoſées en proportion, pourvu que les racines de l'un des produits ſoient les extrêmes & les racines de l'autre produit, les moyens de la proportion. (*des proport. Liv. II. art.* 43.)

12. Dans une proportion Géométrique le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens : ainſi dans la proportion 8 . 4 :: 6 . 3, le produit de 8 par 3 eſt égal au produit de 4 par 6. (*des proportions. Liv. II. art.* 40.)

13. Si deux raiſons ou deux fractions ſont égales, le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens, car les quatre termes des deux raiſons ou de deux fractions égales, ſont en proportion. (*des proportions. Liv. II. art.* 29. *des Fractions. art.* 138.)

14. On peut toujours ſubſtituer une raiſon ou un rapport à la place d'un autre qui lui eſt égal. Car dans un rapport on conſidere ſeulement la maniere dont l'antécédent contient ſon conſéquent : or lorſque deux rapports ſont égaux, l'antécédent du premier contient ſon conſéquent, de la même maniere que l'antécédent de l'autre rapport contient le ſien ; donc on peut mettre l'un à la place de l'autre. (*des proportions. Liv. II. art.* 25.)

15. Si on multiplie ou ſi on diviſe deux grandeurs égales par deux autres grandeurs pareillement égales, les produits ſont égaux de même que les quotients, (c'eſt un axiome ou propoſition évidente par elle-même)

16. Dans une ſuite de raiſons égales & dans une progreſſion, la ſomme des antécédens eſt à la ſomme des conſéquens comme un antécedent eſt à ſon conſéquent : par exemple, ſoient les raiſons égales $\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$ &c. la ſomme des antécédens qui eſt 12, eſt à la ſomme des conſéquens qui eſt 24, comme l'antécédent 3 eſt à ſon conſéquent 6, ou comme l'antécédent 4 eſt à ſon conſéquent 8 &c. (*des proportions. art.* 83. 84.)

17. Lorſque dans une proportion Géométrique on diviſe les antécédens par un même diviſeur, ou qu'on les multiplie par un même multiplicateur ; & qu'on diviſe ou qu'on multiplie auſſi les conſéquens par un même diviſeur ou multiplicateur, quoique different du diviſeur ou du multiplicateur des antécédens, les quatre

quotiens ou les quatre produits ſont encore en proportion. La preuve eſt la même que pour le cas ou l'on multiplie ou que l'on diviſe les deux termes d'un rapport par un même multiplicateur ou un même diviſeur. *Voyez la propoſition* 8e.

18. 19. & 20. Si on multiplie les deux termes d'un rapport par deux multiplicateurs differens, la raiſon devient plus grande ou plus petite ; ſi le multiplicateur de l'antécédent eſt double, triple du multiplicateur du conſéquent, la raiſon du premier produit au ſecond eſt double ou triple du rapport propoſé ; par exemple, ſi on a le rapport de 4 à 2, qu'on multiplie l'antécédent 4 par le multiplicateur 9, & le conſéquent 2 par le multiplicateur 3, les produits ſeront 36, & 6 ; il eſt évident que 36 contient 6 ſix fois, & que l'antécedent 4 ne contient ſon conſéquent 2 que deux fois : or 6 eſt triple de 2 ; donc la raiſon des produits 36 & 6 eſt triple de la raiſon propoſée de 4 à 2. Si le multiplicateur de l'antécédent 4 étoit trois fois moindre que le multiplicateur du conſéquent 2, la raiſon des produits ſeroit trois fois moindre. La preuve eſt la même que ſi on multiplioit l'antécedent 4 par 3, & qu'on laiſſât le même conſéquent 2, ou bien qu'on multipliât le conſéquent 2 par 3, & que l'antécédent 4 demeurât le même : or ſi cela étoit la raiſon ou le rapport de 4 à 2 deviendroit trois fois plus grand ou trois fois plus petit. (*des Raiſons. Liv. II. art.* 15. 16.)

21. Si on multiplie les termes d'une proportion par ceux d'une autre dans le même ordre, les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, les produits ſeront encore en proportion. Soient les deux proportions 8.4 :: 6.3. 5.15 :: 7.21, les produits dont il s'agit ſeront 40 . 60 :: 42 . 63 : or ces quatre produits ſont en proportion, car de même que 40 contient les deux tiers de 60 : ainſi 42 contient les deux tiers de 63. (*des proportions. Liv. II. arti.* 85.)

22. Dans une progreſſion Arithmétique, la difference de chaque antécédent à ſon conſéquent eſt la même dans toute la progreſſion. Par exemple, dans la progreſſion 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . &c. dans laquelle la difference de chaque terme à celui qui le ſuit eſt 2.

23. Si on diviſe deux grandeurs égales par deux diviſeurs differens, les quotiens ſont dans la raiſon inverſe ou réciproque des diviſeurs : cette propoſition ne differe de la troiſiéme que dans l'expreſſion & la preuve eſt la même. (*des proport. Liv. II. art.* 50.)

24. Si quatre grandeurs ſont en proportion Géométrique, leurs quarrez ſont auſſi en proportion ; & ſi les quarrez de 4 grandeurs

ſont en proportion, leur racines ſont auſſi en proportion. Soient les quatre nombres 8 . 4 . 6 . 3 qui ſont en proportion, leurs quarrez 64 . 16 . 36 . 9 ſont auſſi en proportion ; & ſi ces quatre quarrez ſont en proportion, leurs racines 8 . 4 . 6 . 3 ſont auſſi en proportion. (*des proportions. Liv. II. art.* 86.)

25. Dans une progreſſion Arithmétique, la ſomme de deux termes également éloignez du terme moyen eſt égale à la ſomme de deux autres termes auſſi également éloignez du terme moyen, & le terme moyen eſt la moitié de chacune de ces ſommes. Par exemple, dans la progreſſion Arithmétique 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13, la ſomme de 3 & de 11 qui ſont également éloignez du terme moyen 7 eſt égale à la ſomme de 5 & de 9 qui en ſont auſſi également éloignez l'un & l'autre, & le terme moyen 7 eſt la moitié de chacune de ces ſommes qui ſont l'une & l'autre égales à 14.

26. Dans une proportion continue le quarré du premier terme eſt au quarré du ſecond comme le premier eſt au troiſiéme. Soit la proportion 12 . 6 :: 6 . 3, les quarrez de 12 & de 6 ſont 144 & 36 : or le premier de ces quarrez eſt au ſecond comme le premier terme 12 eſt au troiſiéme qui eſt 3 ; car de même que 144 contient quatre fois 36 ; ainſi 12 contient 3 quatre fois. (*des proportions. Liv. II. art.* 113.)

27. Pour réduire un nombre entier en fraction ſans qu'il change de valeur, il faut le multiplier par le dénominateur de la fraction, & écrire le produit en fraction qui ait pour dénominateur le nombre par lequel on a multiplié l'entier. Pour réduire 4 en fraction qui ait pour dénominateur 3, il faut multiplier 4 par 3, & l'on aura la fraction $\frac{12}{3}$ qui vaut 4 : car la fraction $\frac{12}{3}$ étant une diviſion indiquée, il eſt viſible que le quotient qu'on aura en diviſant 12 par 3 eſt égal à 4. (*des Fractions. Liv. II. art.* 152.)

28. Deux gaandeurs qui ont même raiſon à une troiſiéme ſont égales. Car puiſqu'elles ont même raiſon à cette troiſiéme, elles la contiennent de la même maniere & autant de fois l'une que l'autre : or cela ne peut être ainſi qu'elles ne ſoient égales. (*des Raiſons. Liv. II. art.* 14.)

29. Si dans une proportion continue les deux extrêmes ſont connus, on peut connoître le terme moyen en multipliant les deux extrêmes & en tirant la racine quarrée du produit : ſuppoſons que l'on ait la proportion continue 8 . x :: x . 2 dans laquelle le terme moyen x eſt inconnu : pour connoître quel eſt ce terme, il faut multiplier 8 par 2, & tirer la racine quarrée du produit 16 laquelle eſt 4 : or 4 eſt moyen proportionnel entre 8 & 2, car 8 . 4 :: 4 . 2.

TABLE DES PROPOSITIONS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE qui ſont citées dans ce Traité.

1. UN rectangle eſt égal ou proportionnel au produit de ſa hauteur par ſa baſe, ou de ſa baſe par ſa hauteur. (*Géom. Liv. II. art.* 137.)

2. Deux lignes droites paralleles qui ſont compriſes entre deux autres paralleles ſont égales, ou ce qui eſt la même choſe, les côtez oppoſez d'un parallelogramme ſont égaux. (*Liv. I. art.* 97. *Liv. II. art.* 43.)

3. La perpendiculaire eſt la plus courte que l'on puiſſe mener d'un point ſur une meme ligne. (*Géom. Liv. I. art.* 73. 74.)

4. Si deux lignes ſont paralleles & qu'une troiſiéme ſoit perpendiculaire à l'une d'elles, elle eſt auſſi perpendiculaire à l'autre. (*Géom. Liv. I. art.* 92.)

5. Dans un triangle l'angle extérieur, c'eſt-à-dire, l'angle qui eſt formé par un côté du triangle & par le prolongement d'un autre côté, eſt plus grand qu'aucun des angles intérieurs oppoſez. (*Géom. Liv. II. art.* 17.)

6. Si du ſommet d'un triangle iſoſcele on abbaiſſe une perpendiculaire ſur la baſe, elle la diviſe en deux parties égales. (*Géom. Liv. II. art.* 24.)

7. Lorſque deux lignes ſont compriſes dans un eſpace parallele, & qu'elles ſont coupées par un troiſiéme parallele, les parties de l'une ſont proportionnelles aux parties de l'autre, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont coupées en parties proportionnelles, de même ſi dans un triangle on mene une ligne parallele à la baſe, & qui coupe les côtez, ils ſont diviſez en parties proportionnelles. (*Géom. Livre I. art.* 147. 151.)

8. 15. 26. Deux triangles ſemblables ont les côtez homologues, c'eſt-à-dire, oppoſez aux angles égaux proportionnels; d'où il ſuit que ſi les côtez de l'un des deux triangles ſont connus, & que dans l'autre triangle on connoiſſe un côté, on pourra au moyen de deux proportions, connoître les deux autres côtez: or deux triangles ſont ſemblables 1°. lorſque les angles de l'un ſont égaux aux angles de l'autre. 2°. Lorſque deux côtez de l'un ſont proportionnels à deux côtez de l'autre, & que les angles compris entre les côtez proportionnels ſont égaux. 3°. Lorſque les trois côtez de l'un ſont proportionnels aux trois côtez de l'autre. 4°. Lorſqu'ils ont deux côtez proportionnels & des angles oppoſez, l'un d'une part égal à l'angle correſpondant de l'autre part, & que de plus les deux autres

angles oppoſez ſont de même eſpece. (*Géom. Liv. II. art.* 53. 55. 56. 59.)

9. Lorſque dans un triangle rectangle on connoît deux côtez, on peut connoître le troiſiéme, ſoit par la Trigonométrie, ſoit par la propriété même du triangle rectangle ſuivant laquelle le quarré de l'hypothénuſe ou du grand côté eſt égal au quarré des deux autres côtez. Ainſi ſi l'on connoît les deux côtez de l'angle droit, on aura l'hypothenuſe ſi on ajoute en une ſomme les quarrez de ces deux côtez & qu'on en tire enſuite la racine quarrée. Si l'hypothénuſe eſt connnue avec l'un des côtez de l'angle droit, on aura l'autre côté ſi après avoir retranché du quarré de l'hypothénuſe le quarré du côté connu, on tire la racine quarrée du reſte. (*Géom. Liv. II. art.* 183.)

10. Si dans un triangle on connoît deux côtez & l'angle compris, on peut trouver le troiſiéme & les autres angles. (*Trigonom. art.* 46.)

11. Si dans un triangle on connoît deux côtez & l'angle oppoſé à l'un d'eux, on peut trouver le troiſiéme côté & les deux autres angles. (*Trigonom. art.* 48.)

12. Si dans un triangle on connoît tous les angles & un côté, on peut avoir les deux autres côtez. (*Trigonom. art.* 42.)

13. Les circonférences des cercles, les arcs ſemblables ſont dans la même raiſon que les diametres ou les rayons de ces circonférences. (*Géom. Liv. II. art.* 87. 89. 90.)

14. La tangente eſt perpendiculaire à l'extrêmité du rayon qui paſſe par le point de contingence. (*Géom. Liv. I. art.* 113.)

16. Si d'un point hors du cercle on mene une tangente & une ſecante qui rencontre la circonférence en deux points, la tangente eſt moyenne proportionnelle entre la ſecante & ſa partie hors du cercle. (*Géom. Liv. I. art.* 167.)

17. L'angle au centre a pour meſure l'arc compris entre ſes côtez, l'angle inſcrit a pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtez. (*Géom. Liv. I. art.* 42. 124.)

18. L'angle du ſegment formé par une tangente & une corde a pour meſure la moitié de l'arc ſoutenu par la corde. (*Géom. Liv. I. art.* 129.)

19. Les triangles ſemblables ſont entr'eux comme les quarrez des côtez homologues. (*Géom. Liv. II. art.* 178.)

20. & 22. Si deux triangles ont deux côtez égaux & les angles égaux, ils ſont égaux. (*Géom. Liv. II. art.* 27. 29.)

21. Les

21. Le ſinus d'un angle ou d'un arc eſt la perpendiculaire menée de l'extrêmité de l'arc ſur le rayon qui paſſe par l'autre extrêmité de l'arc. D'où il ſuit que ſi dans un triangle rectangle, on conſidere l'hypothénuſe comme le rayon d'un cercle ou comme le ſinus total, les côtez de l'angle droit ſeront les ſinus des angles qui leur ſont oppoſez. (*Trigonom. art.* 4.)

23. Si deux triangles ont deux côtez égaux & les angles compris entre ces côtez égaux, inégaux, le plus grand angle eſt oppoſé à la plus grande baſe. (*Géom. Liv. II. art.* 34.)

24. Les polygones réguliers ſemblables ont leurs perimetres comme les rayons droits & obliques ou encore comme les côtez homologues. (*Géom. Liv. II. art.* 86.)

25. Si dans un triangle on mene pluſieurs paralleles à la baſe, & qu'elles ſoient toutes également éloignées ou diſtantes entr'elles, elles augmentent du ſommet vers la baſe en progreſſion arithmétique, car ces paralleles ſont les baſes d'autant de triangles ſemblables dont les côtez augmentent du ſommet vers la baſe en progreſſion arithmétique, & dont les differences ſont toutes égales, puiſque les paralleles ſont également diſtantes entr'elles; donc les baſes augmentent auſſi en progreſſion arithmétique.

27. Si deux lignes ſont paralleles, les angles intérieur & extérieur du même côté qu'elles forment avec une troiſiéme ligne appellée ſecante, ſont égaux. (*Géom. Liv. I. art.* 90.)

28 Deux lignes droites qui ſont perpendiculaires à une troiſiéme ſont paralleles entr'elles. (*Géom. Liv. I. art.* 96.)

29. Si deux lignes droites ſont paralleles, elles forment avec une troiſiéme des angles alternes égaux. (*Géom. Liv. I. art.* 91.)

30. Si une ligne tombe ſur une autre, elle forme deux angles qui pris enſemble valent deux angles droits. (*Géom. Liv. I. art.* 54.)

31. L'angle au centre & l'angle à la circonférence d'un polygone régulier pris enſemble valent deux droits. (*Géom. Liv. II. art.* 104.)

32. Dans un poligone régulier les rayons obliques ſont égaux. (*Géom. Liv. II. art.* 74.)

33. L'angle inſcrit dans le demi cercle eſt droit. (*Géom. Liv. I. art.* 127.)

34. Un triangle eſt égal à la moitié du produit de ſa baſe & de ſa hauteur, il eſt auſſi égal à la moitié d'un rectangle de même baſe & de même hauteur. (*Géom. Liv. II. art.* 140.)

35. Deux triangles ou deux parallelogrammes égaux ont leurs

bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs. (*Géom. Liv. II. art.* 166.)

36. Deux triangles qui ont même baſe & même hauteur ſont égaux. (*Géom. Liv. II. art.* 126.)

37. Si du ſommet de l'angle droit d'un triangle rectangle on abbaiſſe une perpendiculaire ſur la baſe ou hypothénuſe, elle le diviſe en deux triangles ſemblables. (*Géom. Liv. II. art.* 62.)

38. L'angle au centre a pour meſure l'arc ſur lequel il eſt appuyé, & l'angle à la circonférence n'a pour meſure que la moitié de cet arc, s'il y eſt appuyé. (*Géom. Liv. I. art.* 126.)

39. Si des extrémitez d'une corde on mene un diametre dans le cercle & une perpendiculaire ſur ce diametre, la corde eſt moyenne proportionnelle entre le diametre & la partie compriſe entre la perpendiculaire & la corde. (*Géom. Liv. II. art.* 62.)

40. Les rectangles & les parallelogrammes de même hauteur ſont comme les baſes ; & s'ils ſont dans la raiſon des baſes, ils ſont comme les hauteurs. (*Géom. Liv. II. art.* 164. 165.)

41. Si pluſieurs triangles rectangles ont une même baſe ou hypothénuſe, ils peuvent être inſcrits dans un cercle qui auroit pour diametre cette hypothénuſe ; en ſorte que ſi on la diviſe en deux parties égales, que du milieu comme centre & avec un intervalle égal à la moitié de cette baſe, on décrive une circonférence, elle paſſera par les ſommets des angles droits qui s'appuient ſur ce diametre. (*Géom. Liv. I. art.* 127.)

42. Si deux priſmes ou deux cylindres ſont entr'eux comme les longueurs, ils ont des baſes égales ; & s'ils ont des baſes égales, ils ſont entr'eux comme les longueurs ; & ſi les hauteurs & les baſes ſont inégales, ils ſont entr'eux comme les produits des baſes & des hauteurs. (*Géom. Liv. III. art.* 112. 113. 114.).

TABLE
DES TITRES

Et des principales matieres contenues dans ces quatre premiers Livres.

Les chiffres qui ſont entre deux crochets, indiquent les articles du Livre où l'on trouvera les Titres & les Propoſitions énoncées dans cette Table.

PREMIER TRAITE' QUE L'ON DIVISE EN SIX LIVRES.

Dans le *premier* on conſidere le mouvement en tant qu'il convient à tous les corps; dans le *ſecond* on traite du mouvement de peſanteur; dans le *troiſiéme* du choc des corps; dans le *quatriéme* de la ſtatique ou de l'équilibre des puiſſances & des poids; dans le *cinquiéme* de l'hydroſtatique ou de l'équilibre des liqueurs; dans le *ſixiéme* de l'hydraulique ou du mouvement des fluides.

LIVRE PREMIER.

DU MOUVEMENT EN TANT QU'IL CONVIENT A TOUS LES CORPS.

DAns le mouvement on peut conſidérer le corps ou la maſſe qui eſt mue, la viteſſe, la quantité de mouvement qui réſulte de la maſſe & de la viteſſe, & la puiſſance qui meut le corps. On diviſe ce premier Livre en deux Chapitres. Dans le premier on conſidere la viteſſe & la quantité de mouvement. Dans le ſecond on traite des puiſſances qui produiſent le mouvement (1).

CHAPITRE PREMIER.

DE LA VITESSE ET DE LA QUANTITE' DE MOUVEMENT.

DEfinition ordinaire du mouvement. Il eſt *égal* & *uniforme*, ou *inégal* & *variable*. Dans ce Chapitre il ne s'agit que du mouvement uniforme (2).

DE LA VITESSE.

pour avoir une idée de la viteſſe il ne ſuffit pas de faire attention à l'eſpace parcouru, il faut encore y joindre la conſidération du tems, c'eſt pourquoi on définit la viteſſe le rapport de l'eſpace au tems (3). Si les tems des mouvements ſont égaux, les viteſſes ſont entr'elles comme les eſpaces parcourus (4). Si les

tems ſont inégaux, les viteſſes de deux mobiles ſont entr'elles comme les rapports des eſpaces aux tems (6). D'où il ſuit 1 que ſi les rapports des eſpaces aux tems ſont égaux, les viteſſes ſont égales (8). 2. Si les eſpaces parcourus ſont égaux, les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les tems (10). 3. Les viteſſes de deux mobiles ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon inverſe des tems (11). 4. Si les viteſſes de deux corps ſont égales, les eſpaces parcourus ſont comme les tems (12). 5. Si les eſpaces ſont dans la raiſon des temps, les viteſſes ſont égales (13). 6. Les eſpaces que deux corps parcourent ſont en raiſon compoſée des viteſſes & des tems (14). On déduit du Corollaire précedent que l'eſpace qu'un corps parcourt, eſt repréſenté par un parallelogramme rectangle dont les côtez exprimẽt l'un le tems, & l'autre la viteſſe (15). 7. Les tems des mouvemens ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des eſpaces & de la raiſon inverſe des tems (16). 8. De ce que la viteſſe eſt exprimée par le rapport de l'eſpace au tems, on en conclut que ſi on diviſe l'eſpace par le tems, le quotient fera connoître la viteſſe; & parce que dans la diviſion ſi on multiplie le diviſeur par le quotient, on retrouve le dividende; on en conclut encore que ſi on multiplie la viteſſe par le tems, on aura l'eſpace parcouru qui eſt le dividende. Puiſque l'eſpace parcouru eſt repréſenté par le produit du tems & de la viteſſe; il s'enſuit que ſi l'on diviſe l'eſpace par la viteſſe, le quotient donnera le tems du mouvement (17). 9. On donne enfin les expreſſions générales de la viteſſe, du tems & de l'eſpace parcouru avec leſquelles on peut démontrer d'une maniere courte & facile les differentes propoſitions qui concernent la viteſſe dans le mouvement uniforme (19).

La viteſſe dont on vient de parler eſt appellée *propre*, parce qu'elle n'appartient qu'à un corps qui eſt en mouvement; mais il y a une autre viteſſe qu'on peut nommer *relative* ou *reſpective* par laquelle deux corps s'approchent ou s'éloignent l'un de l'autre quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes propres. On remarquera ici que la connoiſſance de cette viteſſe eſt d'un uſage très étendu, puiſqu'un grand nombre de phenomenes & d'effets naturels non moins curieux qu'intéreſſant, ont pour fondement cette viteſſe.

De la viteſſe reſpective de deux corps.

Puiſque par la viteſſe relative ou reſpective, deux corps s'approchent ou ſe fuient; pour déterminer cette viteſſe il faut ſeulement avoir égard à l'eſpace que ces corps parcourent pour ſe fuir ou pour ſe joindre: or dans le cas où les corps s'approchent, l'eſpace qu'ils parcourent pour ſe joindre eſt égal à l'intervalle qui eſt entr'eux lorſqu'ils commencent à ſe mouvoir l'un vers l'autre; s'ils ſe fuient, l'eſpace qu'ils parcourent pour s'éloigner l'un de l'autre, eſt égal à la difference de l'intervalle qui eſt entr'eux lorſqu'ils commencent à s'éloigner l'un de l'autre à l'intervalle qui eſt entr'eux après un tems donné (22. 24): d'où il ſuit que ſi deux corps ſont mûs ſur une même ligne droite ſuivant des directions oppoſées, l'eſpace qu'il parcourt pour s'approcher eſt égal à la ſomme des eſpaces que chaque corps parcourt. Donc dans le cas préſent la viteſſe reſpective eſt égale à la ſomme des viteſſes propres (26). Mais ſi les corps ſont mûs dans les mêmes ſens, l'eſpace qu'ils parcourent pour s'approcher, eſt ſeulement égal à la difference des eſpaces que chaque corps parcourt par ſa viteſſe propre. Par conſéquent la viteſſe reſpective eſt pour lors égale à la difference des viteſſes propres (27). Dans les mouvemens relatifs il y a pluſieurs circonſtances à conſiderer; *les viteſſes propres* des mobiles, les *eſpaces parcourus*, les *tems des* mouvemens, la *diſtance*, la *ſituation* & les *lieux* des corps pour quelque tems que ce ſoit. Les mouvemens relatifs peuvent être réels dans toutes leurs circonſtances ou ſeulement apparens dans quelques-unes. On ſuppoſe d'abord que ces circonſtances en ſont toutes réelles, on ſuppoſe enſuite que quelques-unes ne ſont qu'apparentes (29). Deux corps qui s'approchent ou qui s'éloignent peuvent être mûs ſur une même ligne ou ſur deux lignes differentes, dans ce ſecond cas les lignes peuvent être paralleles ou inclinées l'une à l'autre, & faire un angle. On détermine les differentes circonſtances dont on vient de parler en les examinant dans chacun de ces trois cas, lors même que les corps ſont mûs ſur des circonférences des cercles. 1. Suivant les regles de la Géo-

métrie élémentaire ſans le ſecours des ſections coniques. 2. Par le calcul ſans tables de ſinus. (*Art.* 30 & *ſuivans juſqu'à l'art.* 65.) On paſſe aux mouvemens relatifs apparens.

DES MOUVEMENS APPARENS.

Des corps peuvent paroître en mouvement lorſqu'ils ſont en repos, ou paroître en repos lorſqu'ils ſont en mouvement : cette apparence a pour fondement la différente maniere dont l'œil peut être affecté par un objet, lors même que cet objet demeure à la même place, qu'il conſerve ſa ſituation, & qu'il ne change point d'état. C'eſt ſur-tout dans l'aſtronomie que paroît l'uſage que l'on peut faire de la théorie des mouvemens apparens, c'eſt pourquoi on ſe contente de les conſidérer dans le cercle (65). On établit enſuite les cauſes qui donnent lieu aux mouvemens apparens, & l'on remarque quels ſont les cas & en quelles occaſions un corps doit paroître en mouvement quoiqu'il ſoit en repos, ou paroître en repos lorſqu'il eſt en mouvement; il peut même ſe faire qu'il paroiſſe rétrograder quoiqu'il continue d'être mû ſuivant la même ligne (66. 67. 68). L'on fait voir après cela que ſi deux obſervateurs ſont mûs uniformément ſur deux circonférences concentriques, ils pourront paroître l'un à l'autre s'arrêter, ou même rétrograder & être affectez d'autres ſemblables apparences (70. 71. 72) ; mais afin qu'elles aient lieu, il faut que l'obſervateur qui eſt plus proche du centre, aille plus vîte que celui qui en eſt moins proche, car ſi leurs viteſſes étoient égales, il n'y auroit ni ſtation ni retrogradations, d'où l'on conclut que les ſtations & rétrogradations apparentes ont pour fondement l'inégalité des viteſſes (73. 74. *juſqu'à* 81). On détermine géométriquement quels ſont les endroits des circonférences où les deux obſervateurs doivent paroître l'un à l'autre directs, ſtationaires & rétrogrades (81.82.83.84.85. 86). On finit la matiere des mouvemens relatifs, réels & apparens, par la réſolution de deux Problêmes. Dans le premier on détermine tous les endroits d'un cadran où l'aiguille des minutes doit rencontrer celle des heures (87). Dans le ſecond on ſuppoſe que deux voyageurs marchent dans un même chemin, celui qui va moins vîte précede celui qui ſuit ; on propoſe de trouver quel eſt l'endroit du chemin où l'un attrapera l'autre. On ſuppoſe que les viteſſes ſont connues, de même que l'intervalle qui eſt entre les deux voyageurs lors du départ. Ce Problême eſt célebre dans l'antiquité ſous les noms d'Achille & de la Tortue ; à cette occaſion on tâche de découvrir & de réfuter le Sophiſme de Zenon (88).

DE LA QUANTITE' DE MOUVEMENT.

Si tous les corps étoient égaux en maſſe, leurs quantitez de mouvement ſeroient proportionnelles aux viteſſes (93). Et ſi les viteſſes ſont égales, les quantitez de mouvement ſont comme les maſſes (90). La *maſſe* d'un corps eſt la quantité de matiere qu'il contient, & le *volume* eſt la grandeur du corps en tant qu'il eſt long, large & profond (92). Si les maſſes & les viteſſes ſont inégales, les quantitez de mouvement ſont en raiſon compoſée des maſſes & des viteſſes (94). Il ſuit de cette derniere propoſition, 1. que ſi les quantitez de mouvement de deux corps ſont égales, les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les maſſes (95). 2. Si les viteſſes ſont dans la raiſon réciproque des maſſes, les quantitez de mouvement ſont égales (96). 3. Si les quantitez de mouvement ſont comme les viteſſes, les maſſes ſont égales (97). 4. Si les tems des mouvemens ſont égaux, les quantitez de mouvement ſont comme les produits des maſſes & des eſpaces parcourus (98). 5. Si les eſpaces parcourus ſont égaux, les quantitez de mouvement ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des maſſes & de la réciproque des tems (99). 6. Si on multiplie la maſſe d'un corps par ſa viteſſe, on aura la quantité de mouvement ; & ſi on diviſe la quantité de mouvement par la maſſe, on aura la viteſſe ; & ſi on la diviſe par la viteſſe, le quotient donnera la maſſe (100). Les principes qu'on a établis donnent le moyen de compoſer des formules ou expreſſions générales avec leſquelles on peut démontrer non-ſeulement les propoſitions qu'on vient d'énoncer, mais encore pluſieurs autres touchant le mouvement uniforme (101).

CHAPITRE SECOND.

DES FORCES QUI MEUVENT LES CORPS.

ON définit ce qu'il faut entendre par *cauſe*, *force* & *puiſſance* (103. 104. 105). Si le mouvement eſt produit par une ſeule puiſſance, il peut être appellé *ſimple*, ſi pluſieurs puiſſances concourent à ſa production, il eſt appellé compoſé (106).

DU MOUVEMENT PRODUIT PAR UNE SEULE PUISSANCE.

Un corps une fois mis en mouvement s'y conſerve juſqu'à ce qu'un obſtacle inſurmontable l'arrête & détruiſe ſa viteſſe (107). Si une puiſſance produit le mouvement par une ſeule impulſion, elle eſt appellée *force ſimplement motrice*, ſi elle le produit par des efforts réiterez, elle eſt appellée *force acceleratrice* (108). La force accélératrice eſt *conſtante* ou *variable* (109). La force conſtante produit des degrez égaux de viteſſe en tems égaux; mais ſi la force eſt variable, les degrez de viteſſe produits en tems égaux, ſont inégaux (110). Un corps en mouvement peut être conſideré comme une puiſſance qui meut les corps qu'il rencontre (111). Des auteurs célebres ont introduit la diſtinction des *forces vives* & des *forces mortes*; quelle eſt la notion qu'ils en donnent (112. 113). Un corps en repos ne réſiſte point au mouvement (114). D'où il ſuit que ſi deux forces ſimplement motrices meuvent des corps égaux, elles ſont entr'elles comme les viteſſes (115). Si les maſſes ſont inégales & les viteſſes égales, les forces ſont comme les maſſes (116). Mais ſi les *maſſes & les viteſſes ſont inégales*, les forces ſont entr'elles comme les produits des maſſes & des viteſſes (117).

On peut déduire ici les mêmes conſéquences qu'on a tirées l'orſqu'on a parlé du rapport des quantitez de mouvement de deux corps, & elles ont lieu à l'égard des forces motrices (118. & *ſuivans*).

DE LA FORCE ACCE'LE'RATRICE.

Le nombre de degrez de viteſſe que produit une force conſtante, eſt meſuré par le nombre des inſtans pendant leſquels elle agit (121). Si la force accélératrice eſt infiniment petite, le degré de viteſſe qu'elle produit à chaque inſtant eſt infiniment petit (123). D'où l'on conclut que l'eſpace qu'une force conſtante & infiniment petite fait parcourir à un corps pendant un tems fini & déterminé, eſt exprimé par un triangle rectangle dont la hauteur repréſente le tems, & la baſe la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems (126). Deux forces accélératrices conſtantes, ſont entr'elles comme les viteſſes qu'elles produiſent en même tems dans deux mobiles égaux, ou bien elles ſont entr'elles comme les eſpaces qu'elles leur fait parcourir en tems égaux (127. 128). Si le rapport des maſſes eſt conſtant, c'eſt-à-dire, le même pendant le tems du mouvement, quoique les maſſes augmentent ou diminuent, & que de plus les eſpaces parcourus ſoient égaux, les tems des mouvemens ſont égaux, pourvû que les forces accélératrices demeurent dans le rapport conſtant des maſſes, n'importe que ces forces ſoient conſtantes ou variables (129). Si un corps eſt mû par une force accélératrice le long d'une ligne droite d'une longueur déterminée, que de tous les points de cette ligne on éleve des perpendiculaires terminées par le quart de circonférence d'un cercle, ſi les viteſſes que le mobile a à chaque point de cette ligne, ſont entr'elles comme les perpendiculaires correſpondantes & terminées par le quart de circonférence; on prouve que ſi le corps eſt mû uniformément ſur le quart de circonférence avec la viteſſe qu'il aura acquiſe lorſqu'il ſera parvenu à l'extrémité de la ligne ſuppoſée, les tems des mouvemens ſur cette ligne & ſur le quart de circonférence ſont égaux (131). On démontre à cette occaſion pluſieurs autres propoſitions qui doivent ſervir à prouver.

dans le ſecond Livre, que ſi un corps commence à deſcendre par des arcs inégaux d'une cycloïde renverſée & dont le plan eſt perpendiculaire à l'horizon, il les décrira en des tems égaux.

Remarque sur les forces vives et les forces mortes.

On rapporte au long l'expoſé que M. Bernouilli fait lui-même de ſon ſentiment ſur ces deux ſortes de forces. On remarque encore que M. Camus de l'Académie Royale des Sciences, & M. Volfios donnent une idée de la force vive & de la force morte, differente de celle de M. Bernouilli. (*Voyez après l'article* 136).

Reflexions sur les forces des corps en mouvement, & ſur la maniere de les comparer.

On conſidere la force d'un corps comme étant produite ou détruite dans un inſtant ou ſucceſſivement : on la conſidere auſſi en elle-même & comme réſidant dans le corps qu'elle meut ; on fait par rapport à ces differentes manieres d'enviſager la force d'un corps, des réflexions qui tendent à prouver que les forces des corps en mouvement, ne ſont point entr'elles dans la raiſon des quarrez des viteſſes, mais comme les ſimples viteſſes (137. *juſqu'à* 159). On remarque auſſi que la diſtinction entre les forces vives & les forces mortes eſt très-bien fondée, & que la maniere de comparer ces deux ſortes de forces, doit être differente (140). On répond enſuite à une difficulté tirée de l'experience qui paroît fournir une preuve en faveur des forces vives, & établir qu'elles ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes (151).

Du mouvement en tant qu'il est produit par pluſieurs forces.

Lors qu'un corps eſt mû par pluſieurs forces qui le pouſſent à la fois, la ligne qu'il décrit eſt droite ou courbe.

Du mouvement en ligne droite, compoſé de pluſieurs forces.

L'expérience montre que ſi un corps eſt pouſſé à la fois par pluſieurs forces, il peut ſe faire que toutes ſes parties ſoient mûes perallelement à elles-mêmes ſans que le corps tourne, & l'on démontre que cela doit arriver lorſqu'une ſphere eſt pouſſée par deux forces dont les directions paſſent par le centre & qu'elles ſont immédiatement appliquées à cette ſphere. D'où l'on conclut que le mouvement ſe compoſe en un, de même que s'il n'étoit produit que par une force (152. 153). On prouve enſuite que ſi un corps étant pouſſé par deux forces ſuivant deux directions qui faſſent un angle ſur une direction moyenne ; que ſur les trois directions des corps & des deux puiſſances on décrive un parallelogramme, ces forces ou puiſſances ſont entr'elles comme les côtez du parallelogramme décrit, & la force moyenne qui meut le corps ſuivant la diagonale, comme les côtez ſont à cette diagonale : ainſi ces trois forces feroient décrire en même-tems chacune le côté qui la repréſente (154. 155). La propoſition inverſe eſt auſſi vraie : ſi un corps eſt pouſſé à la fois ſuivant les côtez d'un parallelogramme par des forces qui ſoient entr'elles comme ces côtez, il décrira la diagonale dans le même tems que ces forces lui feroient décrire les côtez qui leur ſont proportionnels (156). Si les forces ſont inſtantanées ou ſimplement motrices, le corps décrit la diagonale d'un mouvement uniforme, il la parcourt d'un mouvement accéleré ſi les forces ſont conſtantes ou variables, pourvu qu'elles demeurent entr'elles dans le meme rapport pendant le mouvement (158). La force moyenne qui pouſſe le corps ſuivant la diogonale, & qui réſulte de celles qui le pouſſent ſuivant les côtez, peut être produite par une infinité de paires de puiſſances differentes de celles qui ont concouru à la produire ; lors donc qu'un corps eſt pouſſé par deux forces, quant à la viteſſe & à la direction, il l'eſt de même que s'il n'étoit mû que par une force (160. 161) Si le corps eſt pouſſé à la fois par pluſieurs forces ou puiſſances differentes dont les directions concourent en un point, on trouvera la viteſſe & la direction du corps en réduiſant toutes ces forces ou puiſſances à deux (164).

De la décomposition des forces & des mouvemens.

L'expérience montre que de même que dans la nature pluſieurs mouvemens ou forces ſe compoſent en une, un mouvement ſimple, une force unique ſe décompoſe en pluſieurs autres (165). On peut appeller *forces dérivées* celles qui réſultent d'une ſeule. On prouve que cette décompoſition doit ſe faire ſuivant la diagonale d'un parallelogramme, & ſuivant la perpendiculaire à cette même diagonale, & les efforts dérivez doivent être tels qu'ils puiſſent reproduire la force d'où ils dérivent (168. 169. 170. 171). On détermine le rapport de ces efforts dérivez (172). On prouve encore la décompoſition des mouvemens par l'exemple d'un corps qui eſt pouſſé ſuivant une direction oblique à un plan : car ce corps preſſe le plan en même-tems qu'il eſt mû ſuivant le plan. On conclut une ſeconde fois que ſi un corps eſt mû par une force dont la direction eſt oblique à celle du corps, cette force eſt décompoſée en deux efforts dont l'un eſt perpendiculaire à la route du corps, & l'autre parallele à la même route (173. 179).

De la maniere dont l'équilibre ſe forme, déduite de la compoſition & de la décompoſition des forces.

L'équilibre eſt l'état de pluſieurs forces qui agiſſent les unes contre les autres, de maniere que tout demeure en repos (180). Lorſqu'un corps eſt pouſſé par deux puiſſances dont les directions concourent en un point, elles peuvent etre miſes en équilibre (182). Si deux puiſſances ſont retenues en équilibre par une troiſiéme, elles ont leurs directions en un même plan (188). Et ſi les directions de deux puiſſances ſont en un même plan, elles peuvent être retenues en équilibre par une troiſiéme puiſſance (189). Si trois puiſſances ſont en équilibre lorſqu'elles ſont immédiatement appliquées au point où leurs directions concourent, elles y ſeront encore ſi on les applique à un levier aux points où leurs directions rencontrent ce levier (192). Si trois puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, leurs directions concourent en un même point (194). Si trois puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, elles y ſeront encore ſi elles ſont immédiatement appliquées au point où leurs directions concourent (195). Les conditions pour l'équilibre de trois puiſſances, ſont 1. que leurs directions concourent en un point ; 2. qu'elles ſoient en un même plan ; 3. qu'elles ſoient entr'elles comme les côtez d'un parallelogramme formé ſur ces directions, & que l'une d'elles tire en ſens contraire des deux autres (190). On donne enſuite des exemples d'équilibre où deux puiſſances réſiſtent à une ſeule. Or ces puiſſances peuvent être déterminées ou indéterminées (196. 197). Si trois puiſſances ſont en équilibre, elles peuvent être conſiderées tour à tour comme puiſſances réſiſtantes (201).

Des mouvemens compoſez en ligne courbe, & des forces centrales.

L'expérience & le raiſonnement concourent à prouver qu'il faut plus d'une force pour faire décrire à un corps une ligne courbe (202). D'où il ſuit qu'un corps qui eſt mû décrit la ligne droite, ou qu'il tend à la ſuivre ; & que s'il décrit une courbe, il tend à chaque point à s'en éloigner (203. 204). Si la cauſe ou la force qui retient un corps ſur une courbe lorſqu'il la décrit, dirige ſon action vers un même point, elle eſt appellée *force centripete*, & la réſiſtance ou l'effort contraire que le mobile fait à cette force, eſt appellé *force centrifuge*, les deux efforts contraires ſont appellez enſemble *forces centrales*, & elles ſont égales & directement oppoſées (205. 206). Afin de traiter des forces centrales par rapport à un objet réel, on les conſidérera dans le cercle & l'ellipſe, (car on ſçait que les aſtres ſe meuvent dans des cercles ou des ellipſes, ou dans des figures qui en approchent fort. On conçoit les lignes courbes comme des polygones d'une infinité de côtez, le cercle comme un polygone regulier, & les autres courbes comme des

polygones.

polygones irréguliers ; & pour donner une idée plus diſtincte de la force centrale, on conſidere d'abord ce qui arrive à un corps qui décrit un polygone régulier d'un nombre fini de côtez.

Du mouvement d'un corps qui de'crit un polygone régulier d'un nombre fini de côtez, & de la force centrale dans le cercle.

Si la force qui retient un corps ſur un polygone régulier, dirige ſon action au centre, tous les côtez ſeront décrits en des tems égaux (209). D'où il ſuit que la viteſſe du mobile eſt uniforme (210). La force qui retient le corps, eſt d'autant plus petite que le polygone a de côtez, ſuppoſé que la viteſſe du corps demeure la même. Si les côtez du polygone ſont des angles intérieurs infiniment grands, ou les angles extérieurs infiniment petits, cette force eſt infiniment petite (212). Lorſque la viteſſe du mobile eſt connue ou que l'on a ſon expreſſion ou ſon rapport, on peut avoir auſſi celui de la force qui retient le mobile ſur le polygone décrit (213). Si deux corps décrivent deux polygones réguliers ſemblables, les efforts que les forces ſont aux angles des polygones pour les ramener, ſont entr'eux comme les viteſſes des mobiles (214). Et les tems périodiques ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des diſtances aux centres, & de la raiſon réciproque des viteſſes (216). Les propoſitions précédentes ſont vraies par rapport à tous les polygones réguliers ; elles ſont donc vraies dans le cercle conſideré comme polygone régulier (217). La force centrale n'eſt pas celle qui retient un corps ſur un polygone d'un nombre fini de côtez, il faut que le polygone en ait une infinité, & qu'il dégenere en ligne courbe (218.). Si deux corps ſont mûs ſur deux polygones réguliers ſemblables d'un nombre infini de côtez, les forces centrales ſont entr'elles comme les produits des viteſſes & des nombres des côtez que les mobiles parcourent en même-tems (219). Les nombres de côtez que les deux mobiles parcourent en même-tems ſur deux polygones réguliers ſemblables, qui ont une infinité de côtez, ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des viteſſes & de la réciproque des diſtances aux centres (221). On déduit de cette derniere propoſition celles que l'on démontre de la force centrale dans le cercle, dont les principales ſont 1. les forces centrales de deux mobiles ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes diviſez par les diametres ou les rayons (222). 2. Si les viteſſes des mobiles ſont entr'elles comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, les forces centrales ſont entr'elles réciproquement comme les quarrez des diametres ou des rayons (227). Si les viteſſes ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées des diametres ou des rayons, les quarrez des tems périodiques ſont entr'eux comme les cubes des rayons ou des diametres (228), &c.

Du mouvement d'un corps qui de'crit un polygone irrégulier, & de la force centrale dans l'ellipſe.

Si un corps décrit le perimetre d'un polygone irrégulier par la viteſſe une fois imprimée & par l'action d'une force qui dirige ſon action vers un même centre, le rayon vecteur, c'eſt-à-dire la ligne qui eſt tirée du centre du polygone au centre du corps, & qui tourne avec le corps, décrit des aires proportionnelles aux tems (231). D'où l'on déduit que ſi un corps décrit un cercle, & que la force centrale dirige ſon action vers un même point, mais different du centre, elle n'eſt pas la même par tout, & la viteſſe du mobile eſt variable (234). 2. Le cercle eſt la ſeule de toutes les figures qu'un mobile puiſſe parcourir par un mouvement uniforme (235). Si un corps décrit une ellipſe, & que la force centrale le ramene vers le foyer, les efforts qu'elles fait aux differens points de l'ellipſe, ſont entr'eux réciproquement comme les quarrez des diſtances au foyer (238). Les viteſſes avec leſquelles un mobile eſt mû aux differens points de l'ellipſe, ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées du foyer aux tangentes en ces points (239). Si deux corps décrivent deux ellipſes qui aient un même foyer vers lequel les forces centrales dirigent leur action, & qu'elles ſoient entr'elles récipro-

quement comme les quarrez des diſtances, les quarrez des tems périodiques ſont entr'eux comme les cubes des grands axes (242). Les viteſſes des deux mobiles, ſont entr'elles comme les racines quarrées des parametres diviſées par les perpendiculaires menées du foyer ſur les tangentes aux points où les mobiles ſe trouvent (243).

LIVRE SECOND.

DU MOUVEMENT DES CORPS PESANS.

ON diviſe ce Livre en quatre Chapitres ; dans le premier on explique les propriétez les plus générales des corps peſans ; dans le ſecond on traite du mouvement des corps jettez ſuivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horizon ; dans le troiſiéme, des corps jettez ſuivant toute autre direction differente de la verticale ; dans le quatriéme, du mouvement des corps le long des plans inclinez.

CHAPITRE PREMIER.

DES PROPRIETEZ LES PLUS GE'NE'RALES des corps peſans.

ON explique les differentes ſignifications du mot *peſanteur* (1). Galilée eſt le premier qui à la faveur des expériences ait raiſonné juſte ſur les effets de la peſanteur ; quelles ſont ces expériences (3). Les expériences de Galilée le conduiſent à faire une hypotheſe fort ſimple & qui a été adoptée par tous les auteurs qui ont écrit ſur les effets de la peſanteur : cette hypotheſe conſiſte à dire que la peſanteur eſt une force conſtante (4). Galilée s'étoit contenté de faire des expériences ſur les corps terreſtres ; mais M. Neuton joint la théorie des forces centrales aux obſervations aſtronomiques, pour prouver que la peſanteur eſt une force variable qui diminue en allant du centre vers la circonférence (5). Mais cette diminution de force ſe fait par des degrez ſi petits, qu'à quelque diſtance qu'on porte les corps terreſtres, elle eſt inſenſible ; c'eſt pourquoi l'hypotheſe de Galilée par rapport aux corps terreſtres demeure dans ſon entier (6). Dans ce Chapitre on parle 1. de la direction des corps peſans, 2. du centre de gravité, 3. des rapports des peſanteurs.

DE LA DIRECTION DES CORPS PESANS.

On prouve que les corps peſans tendent au centre de la terre ou fort près de ce centre, & on en apporte pluſieurs preuves. Le point dont il s'agit ici eſt néceſſairement lié avec la figure de la terre ; ſi la terre eſt ſphérique, les corps peſans tendent au centre ; mais ſi elle a une figure differente de la ſphérique, les corps ne tendent pas droit au centre (7). On détaille pluſieurs effets de la peſanteur, ſoit réels, ſoit hypothétiques (8. 9. 10. 11. 12. 13. 14).

DU CENTRE DE GRAVITE'.

On définit le centre de gravité un point par lequel une figure peſante étant librement ſuſpendue, toutes les parties ſe contrebalancent également & ſont en équilibre, quelque poſition qu'elles aient par rapport au centre de la terre (16). Si les directions de la peſanteur concourent au centre ou à quelque autre point, dans la rigueur Géométrique il n'y a pas de centre de gravité au ſens de la définition (19). Cependant comme les parties des corps peſans ſont fort proches les unes des autres & le centre de la terre fort éloigné, on peut ſuppoſer que les directions des parties d'un même corps ſont paralleles, & qu'il y a dans tous un centre de gravité (20). Plus un corps peſant s'approche du centre de la terre, plus il devient léger, non que la force qui lui eſt appliquée & qui le pouſſe vers ce centre ſoit moindre, mais parce que la force néceſſaire pour le ſoutenir eſt d'au-

tant moindre, qu'il eſt plus proche de ce centre (21). On détermine le centre de gravité d'un triangle, d'une portion de polygone régulier, d'un ſecteur de cercle & de la pyramide (23 *juſqu'à* 37). Maniére de trouver mécaniquement le centre de gravité d'un corps (37) On décrit pluſieurs propriétez du centre de gravité (38 *juſqu'à* 46).

DES RAPPORTS DES POIDS DE DIFFERENTE MATIERE.

On rapporte pluſieurs expériences, deſquelles on peut conclure que les peſanteurs de deux corps ſont entr'elles comme les maſſes (46 *juſqu'à* 51). Si les corps ſont de même matiere, les poids ſont entr'eux comme les volumes (51). La peſanteur ſpécifique d'un corps eſt le poids de ce corps comparé au poids d'un autre corps de même volume. Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps qui ont des volumes égaux, ſont entr'elles comme les maſſes (52). Si deux corps peſent également, les péſanteurs ſpécifiques ſont dans la raiſon réciproque des volumes (53). Les peſanteurs ſpécifiques de deux corps ſont en raiſon compoſée de leurs peſanteurs propres & de la raiſon réciproque des volumes (54). Les peſanteurs propres ſont en raiſon compoſée des peſanteurs ſpécifiques & des volumes (55).

CHAPITRE SECOND.

DU MOUVEMENT DES CORPS JETTEZ ſuivant la direction verticale ou perpendiculaire à l'horizon.

SI un corps eſt jetté verticalement de bas en haut, il monte par un mouvement retardé, & un corps qui deſcend eſt mû d'un mouvement accéleré (60). Les degrez de viteſſes qu'acquiert un corps qui tombe librement, augmentent comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. (61) L'eſpace parcouru par un corps qui tombe librement, eſt répréſenté par un triangle rectangle dont la haureur eſt proportionnelle au tems, & la baſe à la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems (62). Cet eſpace eſt la moitié de celui que le corps parcourroit s'il étoit mû uniformément pendant un tems égal avec la viteſſe acquiſe à la fin de ce tems (63). Donc dans un tems égal à la moitié du tems de la deſcente il parcourroit uniformément avec la viteſſe acquiſe; l'eſpace qu'il a parcouru en deſcendant (64). Les eſpaces qu'un corps parcourt en temps égaux lorſqu'il tombe librement, ſont dans la raiſon des nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, &c. (65). Si on ſuppoſe que l'eſpace parcouru pendant la premiere partie du tems, eſt exprimée par un nombre different de l'unité, par exemple, par 15, les eſpaces parcourus en tems égaux ſeront 1 ⋈ 15, 3 ⋈ 15, 5 ⋈ 15, 7 ⋈ 15, &c. (66). Si l'eſpace qu'un corps parcourt dans le premier tems de la deſcente eſt exprimé par l'unité, pour avoir celui qu'il parcourt dans une autre partie du tems égale à la premiere, par exemple, dans la 6e dans le 7e, &c. il faut doubler 6 & 7, & des produits 12 & 14 retrancher l'unité, les reſtes 11 & 13 ſeront les eſpaces que l'on veut trouver. Si l'eſpace parcouru dans le premier tems, eſt different de l'unité; qu'il ſoit, par exemple, exprimé par 15, il faut multiplier les nombres 11, 13, &c. par 15, & les produits ſeront les eſpaces parcourus dans le 6e & le 7e tems de la deſcente (69). Les eſpaces qu'un corps a parcourus en comptant depuis le repos, ſont entr'eux comme les quarrez des tems, ou comme les quarrez des viteſſes acquiſes à la fin de ces tems (70. 71). D'où il ſuit que ſi l'on connoît l'eſpace qu'un corps parcourt dans un tems donné, par exemple, d'une ſeconde, on pourra trouver l'eſpace qu'il parcourroit dans un autre tems donné. Suivant M. Huygen un corps parcourt, en tombant, 15 pieds dans la premiere ſeconde (72). Les tems des deſcentes & les viteſſes acquiſes, ſont entr'elles comme les racines quarrées des eſpaces parcourus (73). Si deux corps ſont mûs uniformément avec les viteſſes acquiſes en tombant de deux hauteurs, & que les eſpaces qu'ils parcourent ſoient dans la raiſon des racines quarrées de ces hauteurs, ils ſeront parcourus en tems égaux (74).

Si l'on connoît l'eſpace qu'un corps a parcouru dans un certain tems, par exemple, d'une, de deux ſecondes, &c. on peut trouver l'eſpace qu'il a parcouru depuis le repos juſqu'au tems donné excluſivement (75). Un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut monte d'un mouvement uniformément rerardé (77). Il ſera donc autant de tems à monter à la hauteur d'où il eſt deſcendu, qu'il en a été à deſcendre (78). Un corps qui eſt pouſſé verticalement de bas en haut avec la viteſſe qu'il a acquiſe en tombant d'une certaine hauteur, perdra toute ſa viteſſe en remonrant au point d'où il eſt deſcendu (80). Les eſpaces parcourus en tems égaux par un corps qui monte, ſont comme les nombres impairs de la ſuite 1, 3, 5, 7 comptés à rebours (81). Si on compte les tems depuis le dernier inſtant de la montée, les eſpaces parcourus ſont comme les quarrez des tems (82). L'eſpace parcouru par un corps qui monte, eſt la moitié de l'eſpace qu'il parcourroit uniformément pendant le tems de la montée, s'il étoit mû avec la viteſſe qu'il a lorſqu'il commence à monter (83). Si l'on connoît l'eſpace qu'un corps parcourt au premier tems de la montée, on peut déterminer ſa viteſſe & la hauteur à laquelle il peut monter (84). Si un corps eſt tombé de trois hauteurs differentes, on peut déterminer géométriquement les eſpaces qu'il parcourra en même-tems ou en tems égaux, uniformément avec les viteſſes acquiſes (85). Les propoſitions que l'on a démontrées ſur le mouvement accéleré & retardé des corps peſans, peuvent être exprimées d'une maniere générale, & être réduites en formule (90). On propoſe & on réſout par nombres & géométriquement pluſieurs Problêmes ſur le mouvement accéleré & retardé des corps peſans (*91 juſqu'à 96*). Remarque ſur la réſiſtance que les corps peſans trouvent dans l'air : le mouvement d'un corps peſant ne doit pas toujours s'accélerer ; il y a un tems durant la deſcente après lequel les corps peſans deſcendent d'un mouvement uniforme (*96*). Si la terre tourne, un corps peſant ne tombe perpendiculairement que relativement à l'endroit auquel il répond (*97. 98.*).

CHAPITRE TROISIE'ME.

DU MOUVEMENT DES CORPS JETTEZ ſuivant les directions inclinées à l'horizon.

DAns ce Chapitre on examine 1. quelle eſt la ligne courbe que les corps jettez décrivent. 2. Les propriétez & les circonſtances des jets. 3. On applique les principes établis à la réſolution des Problêmes qu'on propoſe ordinairement ſur les jets obliques.

DE LA LIGNE COURBE QUE LES CORPS JETTEZ décrivent.

Le mouvement des corps jettez ſuivant une direction differente de la verticale, réſulte du mouvement de projection & de l'action de la peſanteur (*99*). La peſanteur étant une force conſtante doit produire des efforts égaux en tems égaux, & les directions ſuivant leſquelles elle pouſſe un corps pendant qu'il eſt en mouvement, être paralleles entr'elles (*101. 102*). On répréſente la figure courbe que le corps décrit ſous l'idée de polygone, ce qui donne une grande facilité pour déterminer le lieu du corps ſur cette courbe pour chaque inſtant que ce ſoit, lorſqu'on connoît la direction ſuivant laquelle il a été pouſſé, & la viteſſe qu'il a reçue, & l'on prouve que cette courbe eſt la parabole ordinaire (*103. 104. 105*). On nomme *ſommet* de la parabole le point de la courbe où le corps ceſſe de monter. On définit ce que c'eſt que *l'étendue du jet* ou *l'amplitude* de la parabole, la ligne *de projection*, la ligne *de chute reſpective*, la ligne *de diſtance* (*106*). Quoique les corps jettez décrivent une parabole ; on peut néanmoins expliquer les propriétez des jets obliques ſans aucune connoiſſance de cette courbe, c'eſt ce qu'on fait dans le cours de ce chapitre.

DES PROPRIETEZ ET CIRCONSTANCES des jets obliques.

Dans les jets il y a à conſidérer le corps jetté, la force qui le pouſſe, la ligne de projection, la hauteur du jet, ſon étendue, ſa durée, le lieu du corps, & le terme où il s'arrête. Pour ce qui eſt du corps il faut proportionner la force qui le pouſſe à ſa maſſe (107).

DE LA FORCE DU JET ET DES CHANGEMENS QUI ARRIVENT à cette force.

En ſuppoſant que c'eſt le même corps qui eſt jetté ſuivant toutes les directions poſſibles, la force du jet eſt proportionnelle ou égale à la viteſſe qu'il reçoit ſuivant toutes ces directions, & on peut l'appeller viteſſe *d'impulſion* (108). Cette viteſſe ſe décompoſe ſuivant deux déterminations, l'une horizontale, l'autre verticale ou perpendiculaire à l'horizon (109). La viteſſe d'impulſion étant exprimée par l'hypoténuſe d'un triangle rectangle, la viteſſe horizontale eſt exprimée par le côté horizontal de ce triangle & la viteſſe verticale par le côté vertical (111). La viteſſe horizontale demeure la même pendant la durée du mouvement, mais la viteſſe verticale augmente ou diminue à chaque inſtant (112.113). On appelle angle d'inclinaiſon celui qui eſt formé par la ligne horizontale, & la ligne d'impulſion ou de projection (116). On peut ſuppoſer que la viteſſe d'impulſion a été acquiſe par le corps jetté en tombant d'une certaine hauteur, & on peut conſidérer cette hauteur comme la force même du jet (117). La viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon (118). D'où l'on voit que la viteſſe verticale augmente & diminue dans la raiſon du ſinus de l'angle d'inclinaiſon. On prouve que ſi la viteſſe d'impulſion eſt exprimée par le diametre d'un cercle, la viteſſe verticale eſt répréſentée par la corde du même cercle, ſuivant laquelle le corps eſt jetté ; qu'ainſi ſi le corps eſt jetté ſuivant différentes directions avec la même force, les viteſſes verticales ſont entr'elles comme les cordes du cercle ſur leſquelles les directions ſont couchées (120. 121). D'où l'on conclut que ſi le mobile étoit mû uniformément le long de toutes ces cordes avec les viteſſes qui leur ſont proportionnelles, elles ſeroient parcourues en tems égaux, & ce tems ſeroit égal au tems par le diametre du cercle parcouru auſſi uniformément avec la viteſſe d'impulſion (122. 123). On prouve auſſi que la viteſſe d'impulſion eſt à la viteſſe verticale comme la corde ſur laquelle la direction du mobile eſt couchée, eſt à la partie du diametre compriſe entre une des extrêmitez de la corde & la perpendiculaire tirée de l'autre extrêmitez de la corde ſur le diametre (124). Ces differentes expreſſions du rapport de la viteſſe d'impulſion à la viteſſe verticale conduiſent à conclure que la partie du diametre compriſe entre la corde & la perpendiculaire dont on vient de parler, eſt la hauteur à laquelle le corps peut monter lorſqu'il eſt jetté ſuivant cette corde avec la viteſſe d'impulſion, & que dans le tems de la montée & de la deſcente par cette hauteur, le mobile parcourroit uniformément avec la viteſſe d'impulſion ainſi dirigée ſuivant la corde, un eſpace quadruple de la même corde (126. 127. 128).

DE L'ETENDUE DU JET.

L'on conclut facilement des propoſitions précédentes que l'étendue du jet eſt quadruple de la perpendiculaire abbaiſſée de l'extrêmité de la corde dont on a parlé juſqu'ici, ſur le diametre (129). Doù il ſuit qu'il y a toujours deux jets faits avec la même force qui ont une égale étendue, & que le jet qui ſe fait ſous l'angle de 45 degrez à la plus grande étendue (129. 130. 131. 132. 133). Les étendues des jets faits avec la même force, ſont entr'elles comme les ſinus des angles doubles des angles d'inclinaiſon (134).

De la hauteur du jet.

Si on compare les hauteurs de deux jets faits avec une même force, elles ſont entr'elles en raiſon doublée des ſinus des angles d'inclinaiſon, ou comme les ſinus verſes des mêmes angles (136. 137).

Du tems et de la durée des jets.

Le tems ou la durée d'un jet eſt à la durée d'un autre jet comme le ſinus de l'angle d'inclinaiſon du premier eſt au ſinus de l'angle d'inclinaiſon du ſecond. Ces tems ſont encore comme les cordes du cercle ſuivant leſquelles le corps eſt jetté, d'où il ſuit que le jet de la plus longue durée eſt celui qui ſe fait ſuivant la direction verticale (138. 139).

Du lieu du corps pendant le mouvement.

Si on veut avoir le lieu du corps pour chaque inſtant du mouvement, il faut ſe ſervir de trois lignes qui ſont entr'elles en proportion continue : la premiere de ces lignes eſt celle que M. Caſſini nomme *ligne d'égalité* : elle eſt quadruple de la hauteur, d'où l'on ſuppoſe que le mobile eſt tombé pour acquérir la viteſſe d'impulſion : la ſeconde eſt la ligne de *projection* : la troiſiéme la ligne de chûte reſpective : ces deux lignes ſe déterminent l'une l'autre : la ligne de projection eſt la partie de la ligne de direction compriſe entre le point de départ & la ligne de chûte reſpective, & la ligne de chûte reſpective eſt compriſe entre la ligne de projection & un point de la courbe que le corps jetté décrit, en ſorte qu'il y a autant de lignes de projection & de chûte reſpective qu'il y a de points dans la courbe décrite. Or au moyen de ces trois lignes on peut trouver pour chaque tems le lieu du corps ſur la courbe, & la décrire (140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148).

Des jets qui sont faits par des forces differentes.

Si deux corps, quelles que ſoient leurs maſſes, ſont pouſſez ſuivant la même direction avec des viteſſes differentes, ils parviendront à des hauteurs qui ſont dans la raiſon des hauteurs par leſquelles les viteſſes d'impulſion auroient été acquiſes. Les étendues des jets ſont auſſi dans la raiſon de ces hauteurs, & les viteſſes verticales dans la raiſon des viteſſes d'impulſion (150. 151. 152).

Application des principes precedens à la réſolution des queſtions ou problêmes qu'on propoſe ordinairement ſur les jets.

Dans ces problêmes on détermine par nombres & géométriquement les differentes queſtions que l'on peut faire ſur les jets, la hauteur, l'étendue, la direction, le tems, la force, &c. On peut en voir les titres ou les énoncés aux articles (153. 154. 155. 156. 157). On renvoie au ſecond traité le problême où l'on propoſe de faire tomber un corps ſur un lieu marqué.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

Des corps pesans mus sur des plans inclinez d'un mouvement accéleré ou retardé par la peſanteur.

DAns ce Chapitre on conſidere 1. les corps en tant que mûs ſur un ſeul plan. 2. Ce qui leur arrive lorſqu'ils ſont mûs ſur pluſieurs plans contigus & differemment inclinez. 3. On applique les principes établis aux mouvemens des pendules (159).

DES CORPS PESANS EN TANT QUE MUS SUR UN SEUL PLAN INCLINÉ.

Un corps qui deſcend par un plan incliné, reçoit dans tous les inſtans des degrez égaux de viteſſe, laquelle eſt par conſéquent uniformément accélerée ; & lorſqu'il monte le long du plan, elle eſt uniformément retardée, & il eſt autant de tems à remonter qu'il en a été à deſcendre, & avec la viteſſe qu'il a acquiſe au bas du plan, il remonte à la hauteur d'où il a commencé à deſcendre ; en ſorte que l'on peut établir ſur le mouvement accéleré & retardé d'un corps qui eſt mûs ſur un plan incliné les mêmes propoſitions, que pour le mouvement vertical, & les démontrer de la même maniere (164. 165. 166. 167. 168. 169).

On conclut de tout ce qui vient d'être dit du mouvement accéleré & retardé des corps peſans qui ſont mûs ſur des plans inclinez, que l'action qui les accélere & les retarde, eſt une action conſtante de même que l'action qui les accélere & les retarde dans le mouvement vertical ; c'eſt pourquoi on peut diſtinguer dans la peſanteur deux efforts, l'un qu'elle exerce ſuivant ſa direction naturelle, l'autre lorſqu'elle pouſſe un corps ſur un plan incliné, & chacun de ces efforts demeure égal à lui-même, conſtant & uniforme. Le premier eſt appellé *peſanteur* ou *gravité abſolue*, le ſecond *gravité* ou *peſanteur relative* ; cette derniere force eſt égale à celle qui tiendroit le corps peſant en équilibre ſur le plan incliné ſuivant une direction parallele au plan (170. 171. 172). La peſanteur abſolue eſt à la force qui retient un corps ſur un plan incliné ſuivant la direction parallele au plan, comme la longueur eſt à la hauteur ; par conſéquent la peſanteur relative qui eſt égale à cette force qui retient le corps, eſt à la peſanteur abſolue comme la hauteur du plan eſt à la longueur ; d'où l'on conclut une ſeconde fois que la peſanteur relative & la peſanteur abſolue ſont dans un rapport conſtant, & que tandis que le corps parcourroit par l'effort de la peſanteur abſolue, un eſpace égal à la longueur du plan, il parcourroit par la peſanteur relative, un eſpace égal à la hauteur ; & parce que ſi de l'angle droit du plan incliné, on abbaiſſe une perpendiculaire qui en rencontre la longueur, la partie compriſe entre le ſommet & la perpendiculaire, eſt à la hauteur comme la même hauteur eſt à la longueur, il s'enſuit que la peſanteur relative eſt à la peſanteur abſolue comme cette partie de la longueur du plan incliné eſt à la hauteur ; qu'ainſi dans le tems que par la peſanteur relative, il parcourroit cette partie de la longueur, il parcourroit par la peſanteur abſolue, la hauteur du plan incliné (173. 174. 175. 176. 177. 178). Cette derniere propoſition ſert à prouver que le tems de la deſcente depuis le ſommet juſqu'au bas du plan incliné, eſt au tems de la deſcente par la hauteur perpendiculaire du même plan comme la longueur eſt à la hauteur ; qu'ainſi les tems par la longueur & par la hauteur du plan, ſont dans la raiſon réciproque des forces ou des peſanteurs qui les font parcourir, car la peſanteur relative qui fait parcourir la longueur du plan, eſt à la peſanteur abſolue qui fait parcourir la hauteur, comme la hauteur eſt à la longueur, d'où l'on conclut que les viteſſes que ces deux forces ont imprimé à un corps lorſqu'il eſt deſcendu du ſommet en parcourant la longueur & la hauteur perpendiculaire du plan, ſont égales ; qu'ainſi ſi un corps deſcend par pluſieurs plans inclinez qui ont la même hauteur, il aura acquis la même viteſſe lorſqu'il ſera arrivé au bas de tous ces plans (179. 180. 181. 182). Si un corps deſcend par pluſieurs plans inclinez qui ont une même hauteur, les tems ſont entr'eux comme leurs longueurs (183). Si pluſieurs plans inclinez ont la même hauteur, que de l'angle droit on abbaiſſe ſur la longueur de chacun une perpendiculaire, les parties compriſes entre le ſommet commun & les perpendiculaires menées, ſeront parcourus en tems égaux, c'eſt-à-dire, dans un tems égal au tems de la deſcente par la hauteur commune : d'où l'on infere que toutes les cordes d'un cercle vertical menées des extrêmitez d'un diametre pareillement vertical, ſont parcourues en tems égaux, ce tems eſt égal au tems par le diametre. Les viteſſes acquiſes au bas des cordes ſont comme ces cordes, de même que les viteſſes inſtantanées que le corps y reçoit. Mais ſi un corps parcourt dans deux cercles differens des cordes d'arcs ſemblables & ſemblablement ſituées, les viteſſes acquiſes ſont en raiſon ſous-doublée de ces cordes (184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192).

Du mouvement des corps pesans sur plusieurs plans contigus & differemment inclinez.

Lorſqu'un corps parcourt pluſieurs plans contigus les uns aux autres, & qui forment entr'eux differens angles, il perd quelque choſe de ſa viteſſe à chaque changement d'angles, & toutes les fois qu'il rencontre un nouveau plan; mais cette perte doit être d'autant moindre que le nouveau plan s'oppoſe moins au paſſage du corps; en ſorte que ſi l'angle formé par deux plans contigus, eſt infiniment grand, la viteſſe perdue ſera infiniment petite; or on démontre que non-ſeulement cette perte eſt infiniment petite, mais encore que ſi le mobile commence à décrire avec une viteſſe finie une courbe, par exemple, la circonférence d'un cercle qu'on peut regarder comme compoſée d'une infinité de plans contigus les uns aux autres, il pourra la parcourir une infinité de fois avant que d'avoir perdu toute ſa viteſſe, qu'ainſi on peut ſuppoſer que s'il n'eſt mû que pendant un tems fini, il conſerve toute ſa viteſſe (193. 194. 195). D'où l'on conclut que ſi un corps deſcend par pluſieurs plans contigus les uns aux autres qui faſſent entr'eux des angles intérieurs infiniment grands (tels ſont ceux que font entr'eux les côtez d'une courbe) lorſqu'il ſera deſcendu au bas de tous, il aura acquis la même viteſſe que s'il étoit tombé verticalement par les hauteurs de tous ces plans, & que ſi le corps eſt repouſſé vers le haut de tous ces plans avec la viteſſe qu'il a acquiſe en deſcendant, il parviendra en perdant ſa viteſſe par degrez à la hauteur, d'où il a comencé à deſcendre, (196. 197. 198). On définit ce que c'eſt que plans contigus ſemblables & ſemblablement inclinez. Les viteſſes acquiſes par deux ſuites de plans ſemblables & ſemblablement inclinez, ſont entr'elles comme les racines quarrées des longueurs de ces plans, les tems des deſcentes ſont auſſi entr'eux comme les racines quarrées des longueurs: le même rapport ſe trouve auſſi ſi deux corps peſans décrivent des arcs verticaux ſemblables & ſemblablement ſituez (200. 201. 202. 203). Si un corps deſcend par une cycloïde renverſée, il parvient au bas en des tems égaux, de quelque hauteur qu'il commence à deſcendre. Si ce corps eſt mû uniformément avec la viteſſe acquiſe au bas, il parcourra un eſpace égal à la demi cycloïde dans un tems qui eſt au tems de la deſcente comme le diametre du cercle générateur eſt à la demi-circonférence. Le tems de la deſcente par la demi-cycloïde eſt au tems de la chûte verticale le long du diametre du cercle générateur comme la demi-circonférence eſt au diametre, & le tems par la cycloïde entiere eſt au tems de la chûte verticale par le même diametre comme la circonférence eſt au diametre (204. 205. 206. 207).

Des Pendules.

Définition ou deſcription du pendule. Si dans le mouvement il conſerve la même longueur, il décrit un arc de cercle; mais ſi cette longueur varie, l'arc décrit eſt une portion de courbe differente d'un arc de cercle. (208).

Proprietez communes a tous les pendules.

Lorſqu'un pendule eſt abandonné à lui-même & qu'il eſt en repos, la longueur eſt verticale ou perpendiculaire à l'horizon. Si on le retire du repos & qu'on le laiſſe enſuite, il redeſcend; & après être deſcendu au repos ou à l'endroit le plus bas, il ne s'y arrête pas, mais il monte à la hauteur d'où il eſt deſcendu (209. 210. 211. 212). Vibration ſimple, vibration compoſée (213).

Du pendule circulaire.

Son mouvement eſt perpétuel & ne ſe perd point. Les viteſſes qu'il acquiert en décrivant differens arcs, ſont entr'elles comme les cordes de ces arcs; & ſi deux pendules décrivent des arcs ſemblables, les tems des vibrations ſont entr'eux comme les racines quarrées de ces arcs, ou des longueurs des mêmes pendules. Les nombres des vibrations qu'ils font en même-tems, ſont entr'eux réciproquement comme les racines quarrées des longueurs des deux pendules. Les longueurs de deux pendules ſont en raiſon doublée de la réciproque des nombres de vibrations faites en même tems (214. 215. 216. 217. 218. 219).

Du-

Du pendule qui décrit la cycloïde.

Ce pendule s'accourcit & s'allonge alternativement pendant tout le tems du mouvement. La propriété ſinguliere que M. Huygens découvrit dans ce pendule, le rendit pour lors recommandable. Les vibrations grandes & petites, c'eſt-à-dire, celles qui ſe font par de grands & de petits arcs ſont iſochrones ou d'égale durée. Cette propriété ſinguliere fit penſer à M. Huygens que ce pendule étoit très-propre pour regler les horloges; car la régularité du mouvement de cette machine conſiſte en ce que chaque piece ſoit mûe également vîte; or il eſt viſible que ſi le pendule qui modere & regle la viteſſe de chacune eſt mû lui-même, de maniere que ſes allées & ſes retours ſe faſſent en tems égaux, quelque grand ou quelque petit que ſoit l'eſpace qu'il parcourt, toutes les parties de l'horloge ſeront mûes d'une égale viteſſe; le mouvement de la machine ſera donc la juſte meſure du tems que l'on conçoit s'écouler également vîte. Il faut cependant convenir que l'éxécution n'a pas tout-a-fait répondu aux vues de l'inventeur. On ne peut pas cependant dire que le pendule qui décrit la cycloïde, ſoit tout-a-fait inutile à la pratique, car on peut s'en ſervir comme de principe, pour prouver que le pendule circulaire a à peu de choſe près la même propriété, ſans en avoir les défauts, c'eſt-à-dire, que les vibrations du pendule circulaire ſont ſenſiblement iſochrones, pourvu que les arcs décrits lorſqu'ils ſont inégaux, ne ſoient pas grands. La preuve que quelques Auteurs donnent de cette propoſition eſt défectueuſe. M. Huygens prouve auſſi par la propriété du pendule qui décrit la cycloïde, que les corps peſans qui tombent librement dans l'air parcourent pendant la premiere ſeconde de leur chûte, 15 pieds, 1 pouce, & il appuie ſon raiſonnement d'une experience répétée exactement pluſieurs fois (222. 223. 224. 225. 226. 227. 228). On réſout 4 problêmes ſur le mouvement du pendule (229. 230. 231. 232).

LIVRE TROISIE'ME.

Du choc ou de la percuſſion des corps.

C'Eſt l'experience qui montre qu'un corps en mouvement peut mouvoir les corps qui ſe trouvent ſur ſon paſſage. On n'entre point dans les queſtions qu'on peut faire ſur la cauſe efficiente du mouvement. L'eſprit ne découvre pas certainement avec évidence qu'il y ait dans les corps quelque vertu ou puiſſance pour produire quoi que ce ſoit, il paroît au contraire plus conforme à la droite raiſon de penſer que Dieu ſeul produit le mouvement, & que le choc n'eſt que comme une occaſion qui détermine cet Etre ſuprême à mouvoir les corps.

Quoique les corps ne ſoient pas des cauſes vraiment productrices du mouvement, néanmoins comme le mouvement eſt l'effet d'une cauſe ou force & que l'on eſt porté à croire que cette force réſide là où elle exerce ſon action & où elle produit ſon effet, rien n'empêche que pour la clarté du diſcours on ne conſidere la force qui produit le choc comme appliquée ou réſidente dans le corps qui choque, & comme faiſant impreſſion ſur le corps qui eſt choqué. (1. 2. 3.). On diviſe ce troiſiéme Livre en quatre Chapitres; dans le premier, on expoſe les propriétez & les circonſtances communes à tous les chocs; dans le ſecond, on traite du choc des corps ſans reſſort; dans le troiſiéme, du choc des corps à reſſort; dans le quatriéme, du choc qui produit la refléxion & la réfraction (4).

CHAPITRE PREMIER,

Dans lequel on expoſe les proprietez & les circonſtances communes à tous les chocs.

LEs corps ont des qualitez qui peuvent modifier & varier conſidérablement l'action qu'ils exercent les uns ſur les autres: telles ſont la dureté, la fluidité, la molleſſe & l'élaſticité: on définit ce que c'eſt que corps *dur*, corps *mou*, corps

élaſtique ou *à reſſort*, corps ſans reſſort. On peut ſuppoſer que les corps changent de figure dans le choc, ainſi que l'expérience montre que cela arrive; ceux qui ſont élaſtiques reprennent leur premiere figure ſi le reſſort eſt parfait, ou ils ne la reprennent qu'en partie, ſi le reſſort eſt imparfait; ou enfin ils conſervent celle qu'ils ont reçue, ſi le reſſort eſt inſenſible. Que les corps les plus durs changent de figure dans le choc, l'experience de M. Mariote rapportée dans ſon Traité de la Percuſſion le prouve (5. 6. 7. 8. 9. 10).

Dans le choc il y a à conſiderer 1. la réſiſtance réciproque des corps. 2. La communication du mouvement. 3. La force du choc.

DE LA RESISTANCE RECIPROQUE DES CORPS DANS LE CHOC.

Deux ſortes de réſiſtances, l'une quon peut appeller *propre*, l'autre *impropre*. La premiere détruit, diminue, ou empêche l'effet de la force motrice; par exemple la réſiſtance réciproque de deux hommes qui ſe pouſſent en ſens contraires. La réſiſtance impropre laiſſe produire à la force motrice tout l'effet qu'elle peut produire: un corps en repos qui eſt choqué ou pouſſé réſiſte à la force motrice. Cette réſiſtance n'eſt pas l'effet de la peſanteur, ni de l'air ou du fluide environnant, mais elle eſt l'effet immédiat de la volonté très-libre de Dieu qui a établi la loi du choc. (11. 12. 13. 14). Les deux ſortes de réſiſtances dont on vient de parler, l'une propre, l'autre impropre, ſi on les conſidere en elles-mêmes, ont des effets fort differens; mais ſi on les conſidere par rapport à la force motrice, elles ont des effets entierement ſemblables, car de même que la réſiſtance propre diminue le mouvement de la force motrice & rend l'exercice de ſon action plus pénible & plus difficile, de même la réſiſtance impropre a un effet tout ſemblable, puiſque ſi un corps choque un autre corps en repos, il perd de ſon mouvement, que le corps choqué eſt pour lui un vrai obſtacle qu'il a à ſurmonter, & qu'il éprouve la même difficulté que s'il étoit repouſſé en arriere. Cette réſiſtance qui eſt comparable à une force contraire eſt moindre que la force du choquant, puiſque le choquant ne perd jamais tout ſon mouvement lorſqu'il choque un corps en repos. (16. 17. 18).

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT dans le choc.

Dieu eſt le maître abſolu de la communication du mouvement, & il auroit pu en établir de toutes differentes de celles que l'expérience a fait découvrir, d'où il ſuit qu'on ne peut pas les déduire de la ſeule idée que l'on a de la matiere & du mouvement. L'eſprit de ſiſtême, en cette matiere conſiſte à choiſir entre les faits obſervez, ceux qui ſont les plus ſimples, & à en déduire méthodiquement ceux qui ſont compoſez; c'eſt ce qu'on tâche de faire en prenant pour principe 1. Que les corps ſe réſiſtent dans le choc. 2. Que cette réſiſtance ne détruit pas le mouvement, mais eſt ſeulement un moyen de communication. 3. Les corps dans le choc changent de figure & ſont applatis (19. 20).

DE LA COMMUNICATION DU MOUVEMENT DANS LE CHOC. des corps mous & ſans reſſort.

Dans le choc des corps mous ſans reſſort, le mouvement ſe communique ſucceſſivement dans un tems fini; mais s'ils ſont abſolument durs la communication ſe fait dans un inſtant (21. 22). Lorſqu'un corps choque un autre corps en repos il perd de ſa viteſſe, & il ne ceſſe d'en perdre que lorſque le choqué eſt mû avec la même viteſſe que le choquant. Le choqué reçoit tout le mouvement que le choquant perd. Si le choqué eſt mû dans le ſens du choquant mais plus lentement lorſqu'il ſera atteint par le choquant, il recevra pareillement tout le mouvement que celui-ci, c'eſt-à-dire, le choquant perdra dans le choc. Si deux corps vont directement l'un contre l'autre, le plus foible perdra ſon mouvement & le plus fort une quantité égale à celle du plus foible, le plus fort choquera enſuite le plus foible avec la difference des mouvemens, de même que s'il le rencontroit en

repos. Lorſqu'un corps en choque un autre, il ne perd de ſon mouvement qu'autant qu'il eſt néceſſaire pour que les deux corps aillent après le choc d'une égale viteſſe (23. 24. 25. 26. 27. 28. 29).

De la communication du mouvement dans le choc des corps à reſſort.

Le reſſort eſt de deux ſortes, parfait & imparfait. Le reſſort parfait ſe comprime & ſe rétablit avec une force égale à celle qui lui eſt appliquée; le reſſort imparfait ſe comprime & ſe rétablit avec une force moindre que celle qui lui eſt appliquée. On ſuppoſe que les corps qui ſe choquent ſont à reſſort parfait. La communication du mouvement dans le choc des corps à reſſort, ſe fait préciſément de la même maniere que dans le choc des corps mous ſans reſſort, c'eſt-à-dire, que pendant tout le tems que le choquant frappe le choqué, le reſſort eſt aſſujetti de maniere qu'il ne détruit ni ne communique par ſa réaction aucune partie du mouvement, mais pour que cela arrive, il faut que le choquant & le choqué ſe compriment, non-ſeulement dans la partie qui eſt immédiatement ſous la force du choc & par où les corps ſe touchent lorſqu'ils ſe rencontrent, mais il faut de plus que chaque corps ſoit applati dans ſa partie anterieure & poſterieure; or on prouve que dans le choc des corps à reſſort parfait, la compreſſion ſe fait de la maniere qu'on l'a décrit ici, & que ſi les deux corps ſe compriment chacun dans les deux parties extrêmes, le reſſort eſt aſſujetti pendant tout le tems que l'un des corps va plus vite que l'autre, de maniere qu'il ne peut en réagiſſant détruire ni communiquer aucun mouvement. C'eſt pourquoi tant que l'un des corps, c'eſt-à-dire, le choquant va plus vite que le choqué, la communication du mouvement ſe fait de la même maniere que ſi les corps étoient ſans reſſort. D'où il ſuit que dans le choc des corps à reſſort il faut diſtinguer deux tems, le tems de la compreſſion & le tems de la reſtitution du reſſort (30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39). On répond à deux difficultez qu'on peut faire ſur la maniere dont on vient d'expliquer la compreſſion du reſſort (40. 41.)

De la force du choc.

La force du choc eſt l'impreſſion que deux corps reçoivent lorſqu'ils ſe rencontrent ou bien la force du choc eſt proportionnelle à cette impreſſion. Or cette impreſſion eſt égale à la quantité de mouvement qu'elle détruit ou qu'elle produit (42). Dans la ſuite on appellera *choquant* celui des deux corps qui dans le choc communique toujours du mouvement ſans en recevoir, & *choqué* celui qui en reçoit, ou bien qui en perd & en reçoit. Suivant ces définitions, la force du choc eſt proportionnelle à la quantité de mouvement que le choquant perd dans le choc. Pour juger de la force du choc, il faut avoir égard à la viteſſe reſpective (43. 44.). Le choc eſt direct ou oblique.

De la force du choc direct.

Dans le choc direct la ſomme des maſſes eſt à celle du choqué comme la viteſſe reſpective eſt à la viteſſe que le choquant perd dans le choc. Cette propoſition eſt comme une regle générale par laquelle on peut déterminer d'une maniere aiſée la viteſſe que le choquant & le choqué prennent dans le choc ſoit direct, ſoit oblique, ſoit qu'ils ſoient à reſſort ou ſans reſſort.

Il eſt évident que ſi les maſſes demeurent les mêmes, la force du choc ou la viteſſe que le choquant perd, eſt d'autant plus grande que la viteſſe reſpective eſt elle-même plus grande. Si la viteſſe reſpective eſt la même, la force du choc eſt auſſi la même, quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes propres (45. 46. 47.).

De la force du choc oblique.

Dans le choc oblique il faut auſſi avoir égard à la viteſſe reſpective avec laquelle les corps ou leurs centres s'approchent ; & parce que le choc ſe fait par le contact ou l'application d'une partie de la ſurface du choquant à celle du choqué, on peut concevoir que le corps qui choque rencontre un plan, & que ce plan eſt en repos ou en mouvement ſelon que le choqué eſt mû ou qu'il eſt en repos : on appellera ce plan, plan d'incidence ; l'angle d'incidence eſt formé par la direction du choquant & le plan d'incidence. Ces notions poſées, la force du choc oblique eſt moindre que la force du choc direct, & dans tout choc oblique il faut diſtinguer deux efforts, l'un par lequel le choquant frappe le plan d'incidence, l'autre par lequel il eſt mû le long de ce plan. Si un même corps eſt pouſſé directement contre un plan & obliquement contre le même plan & d'une égale viteſſe, la force du choc direct eſt à la force du choc oblique comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence. (48. 49. 50. 51). Dans les propoſitions ſuivantes, on ſuppoſe que le plan d'incidence eſt attaché au choqué, en ſorte que ſi ce corps eſt en repos le plan d'incidence y eſt auſſi ; ſi le choqué eſt mû, le plan d'incidence eſt mû avec la même viteſſe. La force du choc oblique eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective, c'eſt-à-dire, à la viteſſe par laquelle le choquant s'approche du plan d'incidence, quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes & les directions du choquant & de ce plan. D'où il ſuit que ſi la viteſſe reſpective change la force du choc, reçoit les mêmes changemens (on ſuppoſe que les maſſes demeurent les mêmes) n'importe que les directions & les viteſſes propres demeurent les mêmes ou non (52. 53. 54. 55.)

CHAPITRE SECOND.

Du choc des corps sans ressort où l'on expoſe les loix que ces corps ſuivent dans le choc.

Dans les loix du choc on détermine les quantitez du mouvement, les viteſſes & les directions que les corps prennent dans le choc (37).

Des loix du choc direct des corps sans ressort exprimées en nombres.

Premier cas. Lorſque le choqué eſt en repos, on peut avoir la viteſſe des deux corps après le choc en deux manieres. 1. En diviſant la quantité de mouvement du choquant par la ſomme des maſſes, & le quotient exprimera la viteſſe commune des corps après le choc. 2. Par la proportion de l'article 45. la ſomme des maſſes eſt à celle du choqué comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le choquant perd dans le choc. Si on retranche de la viteſſe du choquant celle qu'il perd & que l'on détermine par la proportion, on aura la viteſſe commune des corps après le choc. Pour avoir la quantité de mouvement, il faut multiplier les maſſes par la viteſſe commune : ou bien faire la proportion : La ſomme des maſſes eſt à l'une d'elles comme la quantité de mouvement du choquant eſt à la quantité que reçoit la maſſe qui entre dans la proportion, c'eſt-à-dire, qu'il faut diviſer la quantité du mouvement proportionnellement aux maſſes. Il ſuit de cette proportion que ſi le choqué eſt infiniment grand, le choquant perdra ſenſiblement toute ſa viteſſe ; & celle du choqué étant égale à celle qui reſte au choquant, il s'enſuit que le choqué ſera après le choc ſenſiblement en repos ; & ſi la viteſſe du choquant eſt d'autant plus grande que ſa maſſe eſt petite, il rompra le choqué plutôt que de le déplacer. (56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64).

Second cas. Lorſque le choquant & le choqué ſont mûs dans le même ſens, dans ce ſecond cas, il faut diviſer la ſomme des mouvemens avant le choc par la ſomme de maſſes, & le quotient exprimera la viteſſe commune après le choc : on peut trouver cette viteſſe par la proportion de l'article 45 : La ſomme des maſſes eſt à

celle du choqué comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le choquant perd dans le choc. Si de la viteſſe propre du choquant on retranche la viteſſe exprimée, par ce quatriéme terme le reſtant ſera la viteſſe commune. On peut avoir la quantité de mouvement de chaque corps par une operation ſemblable à celle du cas précédent (66. 67. 68, 69).

Troisie'me cas. Lorſque les corps ſont mûs ſuivant des directions oppoſées. 1. Si les quantitez de mouvement ſont égales, en ſorte que les viteſſes ſoient dans la raiſon réciproque des maſſes après le choc, ils ſeront en repos. 2. Si les quantitez de mouvement ſont inégales, pour avoir la viteſſe commune, il faut diviſer la difference des mouvemens par la ſomme des maſſes, & le quotient ſera la viteſſe commune ; ou bien ſe ſervir de la proportion de l'article 45 ; & après avoir retranché de la viteſſe du choquant celle qu'il perd dans le choc, le reſtant ſera la viteſſe commune. Pour avoir la quantité de mouvement, il faut multiplier les maſſes par la viteſſe commune, ou bien diviſer la difference des mouvemens proportionnellement aux maſſes (72. 73. 74. 75. 76. 77. 78). Ce ſeroit ici le lieu de donner les loix du choc des corps parfaitement durs ; mais on ne convient point des principes ſur leſquels il faut les établir. Cependant ſi on veut raiſonner de ces ſortes de corps avec quelque vraiſemblance, il faut que ce ſoit par analogie avec ceux que l'on connoît ; pour lors on verra que les corps durs ne ſuivent pas dans le choc d'autres loix que celles des corps mous ſans reſſort (79).

Maniere de de'terminer ge'ometriquement la viteſſe commune des corps mous ſans reſſort dans le choc direct.

On peut déterminer cette viteſſe dans les trois cas généraux par la proportion de l'article 45 : La viteſſe reſpective étant exprimée par une ligne, on trouvera par la proportion une autre ligne qui réprèſentera la viteſſe que le choquant perd dans le choc. Si de la ligne qui réprèſente la viteſſe propre du choquant avant le choc, on retranche la viteſſe perdue, on aura la viteſſe commune (80) ; ce que l'on entend ici par le centre commun de gravité du choquant & du choqué. Dans le choc direct des corps ſans reſſort, le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc. Si le choc eſt entre trois corps, le centre commun de gravité des trois eſt mû auſſi avec la même viteſſe avant & après le choc (81. 82. 83. 84).

Des loix du choc oblique des corps sans ressort.

Dans le choc oblique, la viteſſe abſolue de chaque mobile ſe réſout en deux autres, dont l'une eſt parallele au plan d'incidence, & l'autre eſt perpendiculaire au même plan. C'eſt par la viteſſe perpendiculaire que les corps ſe choquent & par la viteſſe parallele ils ne font que gliſſer l'un a côté de l'autre : cependant toute la viteſſe perpendiculaire n'eſt pas toujours employée à faire le choc, il faut avoir encore égard à la viteſſe reſpective laquelle eſt égale à la ſomme ou à la difference des viteſſes perpendiculaires (85). Cela poſé il faut déterminer par la proportion de l'article 45, la partie de la viteſſe perpendiculaire que le choquant perd dans le choc, laquelle étant retranchée de la viteſſe perpendiculaire, on aura pour reſte la viteſſe commune. A l'égard des viteſſes paralleles, elles ne reçoivent aucune altération ; après le choc les deux corps ſont donc pouſſez ſuivant deux déterminations, l'une qui eſt dans le ſens de la perpendiculaire au plan d'incidence, l'autre ſuivant la parallele au même plan ; ils décriront donc les diagonale de deux parallelogrames, dont l'un des cotez exprime la viteſſe commune qu'ils prennent en vertu du choc, & les deux autres côtez réprèſentent les viteſſes paralleles (86. 87). Dans le choc oblique des corps ſans reſſort le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc ; & cela ſans changer ſa direction (88. 89).

CHAPITRE TROISIE'ME.

DU CHOC DES CORPS A RESSORT, où l'on expoſe les loix que ces corps ſuivent dans le choc, & les circonſtances communes à tous les choc des corps à reſſort parfait.

DAns le choc des corps à reſſort parfait, il faut diſtinguer deux tems, le tems de la compreſſion, & le tems de la reſtitution du reſſort. Tant que le choquant preſſe le choqué avec une viteſſe finie, le reſſort ſe comprime, & il ne peut ſe développer. Le reſſort ſe comprime dans le choquant & le choqué avec une force égale à celle que le choquant perd durant la compreſſion. Si lorſque le reſſort ſe rétablit le choquant & le choqué ne ſe touchoient point, qu'il y eût un intervalle entre deux, le reſſort ne communiqueroit en ſe rétabliſſant aucun mouvement, ou plutôt il n'augmenteroit ni ne diminueroit le mouvement que les corps prennent en vertu du choc. Si lorſque le reſſort ſe rétablit les corps ſe touchent, ils reçoivent l'un & l'autre une quantité de mouvement égale à celle que le choquant a perdue dans le choc. Pendant que le reſſort ſe rétablit les corps ſe touchent & la partie du contact eſt un point fixe pour le reſſort de l'un & de l'autre corps. D'où il ſuit que le reſſort communique au choquant & au choqué des quantités de mouvement égales à celle que le choquant a perdue dans le choc; le mouvement que le choquant en reçoit eſt contraire au mouvement primitif. D'où il ſuit qu'après le choc, il ne doit reſter dans le choquant que la différence des mouvemens qu'il auroit après le choc s'il étoit ſans reſſort, & du mouvement que le reſſort lui donne. Si le choqué eſt en repos lorſque le choquant l'attrappe, ou s'il eſt mû dans le même ſens, la quantité de mouvement qu'il reçoit tant par la force du choc que de la force du reſſort, eſt égale au double de celle que le choquant perd dans le choc, ou égale au double de celle que le reſſort lui communique. Si les corps ſe choquent en allant l'un contre l'autre, la quantité de mouvement que le choqué reçoit tant de la force du choc que de la force du reſſort, eſt égale à la différence de celle que le même choqué perd dans le choc, & du double de celle que le choquant y perd auſſi, ou du double de celle que le reſſort lui communique (90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102). Dans le choc des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective ſe partage en vertu du reſſort, aux corps en raiſon renverſée des maſſes quelles que ſoient les viteſſes propres & les directions avant le choc (103).

DES LOIX DU CHOC DIRECT DES CORPS A RESSORT PARFAIT.

Comme dans le choc des corps à reſſort il faut diſtinguer deux tems, celui du choc ou de la compreſſion du reſſort, & celui de la reſtitution, la viteſſe avec laquelle ils ſont mûs après le choc, réſulte auſſi de celle qu'ils prennent pendant ces deux tems. Celle qu'ils prennent dans le premier en vertu du choc eſt appellée viteſſe commune; celle qu'ils prennent dans le ſecond tems en vertu du reſſort, eſt appellée viteſſe de reſſort.

REGLE GE'NE'RALE POUR DE'TERMINER LES VITESSES & les directions des corps à reſſort parfait dans le choc direct.

1. Il faut par les regles du Chapitre précédent, trouver la viteſſe commune. 2. Diviſer la viteſſe reſpective dans la raiſon réciproque des maſſes. 3. La différence de la viteſſe commune & de la viteſſe reſpective, ſera la viteſſe du choquant après le choc, mais le choqué ſera mû après le choc avec la ſomme de ces viteſſes. On applique cette regle aux trois cas généraux, mais on peut abbreger beaucoup l'opération preſcrite par la proportion de l'article 45, énoncée en ces termes: La ſomme des maſſes eſt à celle du choqué, comme la viteſſe reſpective eſt à celle que le cho-

quant perd dans le choc ; car ſi de la viteſſe propre du choquant, on retranche la viteſſe qu'il perd, on aura la viteſſe commune ; mais la viteſſe qu'il perd eſt égale à celle que le reſſort lui donne ; donc ſi de la viteſſe reſpective on retranche la viteſſe que le choquant perd dans le choc, on aura la viteſſe de reſſort du choqué ; on aura donc la viteſſe commune & la viteſſe de reſſort de l'un & de l'autre corps (104. 105. 106). Dans le cas où l'un des corps eſt en repos, ſi le choquant & le choqué ont des maſſes égales, le choquant demeure en repos & le choqué prend la viteſſe du choquant avant le choc. Si le choquant eſt plus grand que le choqué, il ſera mû après le choc, ſuivant ſa premiere direction ; mais s'il eſt plus petit, il retournera en arriere. Si le choquant eſt infiniment petit, il ſera réfléchi avec toute la viteſſe qu'il avoit avant le choc (107. 108. 109. 110). Dans le ſecond cas, il peut arriver que la viteſſe de reſſort ſoit plus grande ou moindre que la viteſſe commune, lors même que le choquant eſt moindre que le choqué ; il peut donc arriver que le choquant retourne en arriere ou qu'il ſoit mû ſuivant ſa premiere direction ; mais ſi le choquant eſt plus grand ou même égal au choqué, il ſera mû après le choc ſuivant ſa premiere direction. Dans le troiſiéme cas, ſi les viteſſes avant le choc ſont dans la raiſon réciproque des maſſes, & que les quantitez de mouvement ſoient égales, les corps après le choc retournent en arriere avec leur premiere viteſſe ; ſi les quantitez de mouvement ſont inégales, on trouvera la viteſſe de chaque corps, comme dans le premier des trois cas généraux (111. 112. 113. 114. 115).

Cas particuliers des corps a reſſort parfait.

1. Si deux corps égaux ſe choquent directement en ſens contraires, ils ſeront réfléchis en faiſant échange de leurs viteſſes avant le choc. 2. Si deux corps ſe choquent directement en ſens contraires avec des viteſſes égales & que le plus grand ſoit triple du moindre corps, le grand corps après le choc demeurera en repos, & le moindre ſera mû avec la ſomme des viteſſe avant le choc (116. 117). Dans le choc direct des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc (118.)

Maniere de déterminer geometriquement les viteſſes des corps à reſſort parfait après le choc.

On détermine ces viteſſes de la même maniere que l'on l'a fait en nombres dans le premier des trois cas généraux, & l'on fait voir que la viteſſe reſpective, eſt la même avant & après le choc, & que le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc (119. 120).

Du choc direct des corps a reſſort lorſqu'ils ſont pluſieurs de ſuite ſur une même ligne.

L'experience fait voir que ſi pluſieurs boules d'ivoire ſont ſur une même ligne, & qu'elles ſe touchent, ſi l'on pouſſe une boule contre la premiere boule de la file, la derniere ſe détachera ; ſi on pouſſe à la fois deux boules contre la premiere de la file, les deux dernieres ſe détacheront & ainſi de ſuite : or les principes précédens ſervent à rendre raiſon de cet effet (123. 124. 125). Trois corps inégaux ſont poſez ſur une même ligne ; le premier choque le ſecond en repos ; le ſecond choque le troiſiéme auſſi en repos, la viteſſe que le troiſiéme reçoit ainſi par l'interpoſition de ce ſecond, eſt plus grande que s'il avoit été choqué immédiatement par le premier, n'importe que le choc commence par le grand ou par le petit : on prouve cette propoſition par un calcul fort ſimple (126. 127). Si le corps qui eſt entre le premier & le dernier eſt moyen proportionnel géométrique entre ces deux corps, la viteſſe que le dernier corps recevra par l'interpoſition du corps moyen géométrique, eſt la plus grande qu'il eſt poſſible : dans tous les autres cas ſi le corps interpoſé eſt plus grand ou plus petit que le corps moyen géométrique, la viteſſe que le dernier recevra étant choqué en repos par le corps interpoſé, ſera plus petite. Si entre le premier & le dernier, on place pluſieurs corps moyens géométriques, en ſorte que pris de ſuite ils ſoient en progreſſion géométrique, la viteſſe que le dernier recevra par l'interpoſition de tous les corps moyens, comparée à celle que le même dernier

recevroit, étant choqué immédiatement par le premier, ſera d'autant plus grande, qu'il y aura plus de corps interpoſez, & elle ſera la plus grande qu'il eſt poſſible. On peut voir le calcul que M. Huygens fait de ces viteſſes (126. 127. 128. 129. 130. 131).

Du choc oblique des corps a reſſort parfait.

Dans le choc oblique la viteſſe de chaque mobile eſt décompoſée en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan d'incidence, l'autre paralelle au même plan: la force du choc eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective qui réſulte des viteſſes perpendiculaires: l'on détermine la viteſſe commune que les corps prennent en vertu du choc, & la viteſſe de reſſort: la ſomme de ces deux viteſſes pour le choqué & la difference pour le choquant, ſont les viteſſes perpendiculaires des deux corps après le choc; ils ſont donc pouſſez à la fois avec ces viteſſes, ſuivant la perpendiculaire au plan d'incidence, & avec les viteſſes parallelles ſuivant la longueur du plan: ſi on décrit ſur ces directions deux rectangles, dont les cotez répréſentent ces viteſſes, les diagonales indiqueront les directions & répréſenteront les viteſſes des corps après le choc (132. 133. 134). Dans le choc oblique des corps à reſſort parfait, la viteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc. Le centre commun de gravité eſt mû avec la même viteſſe avant & après le choc: il eſt mû auſſi ſur la même ligne droite avant & après le choc. (135. 136. 137.) Si dans le choc on ne fait pas attention aux mouvemens particuliers, mais à celui des corps conſiderez comme ne faiſant qu'une maſſe, lequel ne peut être dirigé que vers un côté, la quantité de mouvement des corps eſt la même avant & après le choc (138).

Du choc des corps a reſſort imparfait.

Le reſſort imparfait eſt celui qui ne ſe rétablit pas avec toute la force qui lui a été appliquée: or par les regles précédentes, on peut déterminer quels ſont les corps à reſſort parfait, & s'ils ſont à reſſort imparfait, quel en eſt le dégré d'imperfection (139. 140. 141. 142). On finit le Chapitre par un Problême, où l'on propoſe de faire choquer deux corps avec des viteſſes qui ſoient en raiſon donnée, c'eſt-à-dire, dont l'un ſoit double triple, &c. de l'autre.

CHAPITRE QUATRIE'ME.

Du choc qui produit la reflexion et la refraction du mouvement de reflexion.

Le mouvement de reflexion conſiſte en ce qu'un corps venant à rencontrer un obſtacle qu'il ne peut ſurmonter eſt renvoyé & retourne en arriere. M. Deſcartes explique la reflexion indépendamment du reſſort; mais M. de Mairan prouve par pluſieurs raiſons, que dans l'hypotheſe d'un corps inébranlable, tel que M. Deſcartes le ſuppoſe, il n'y auroit point de reflexion, puiſque le reſſort eſt une force exiſtante; que d'ailleurs elle peut produire la reflexion; on peut lui rapporter ce mouvement, ſinon comme à une cauſe générale, du moins comme une cauſe qui ſuffit. Dans le mouvement de reflexion, il faut conſiderer la ligne de direction, laquelle eſt appellée ligne d'incidence, la ligne de reflexion, le point d'incidence, l'angle d'incidence, l'angle de reflexion, l'angle d'inclinaiſon (144. 145. 146). Dans le choc direct, toute la force ou le mouvement du choquant eſt employée à bander le reſſort. Dans le choc oblique, cette force eſt décompoſée en deux efforts, l'un perpendiculaire, l'autre parallelle; l'effort parallele fait gliſſer le corps ſur le plan, & l'effort perpendiculaire ſe conſume à comprimer le reſſort; or puiſque dans le tems que le reſſort ſe comprime, le corps eſt mû le long du plan, il s'enſuit que le point d'incidence eſt different du point de reflexion; ſi le plan eſt mathématique, c'eſt-à-dire, parfaitement poli, le corps doit gliſſer; mais ſi le plan eſt raboteux, le corps doit rouler pendant la compreſſion du reſſort. Si le plan d'incidence eſt parfaitement poli & inflexible, la force parallele demeure la même pendant la compreſſion du reſſort, & la direction du mobile devient de plus en plus inclinée au plan d'incidence.

Si

Si le plan d'incidence eſt raboteux & inégal, l'effort parallele eſt diminué par la réſiſtance des inégalitez. Si le plan d'incidence eſt parfaitement poli, le reſſort eſt comprimé par tout l'effort perpendiculaire. Si le plan eſt raboteux, le globe roule, & la compreſſion du reſſort ſe fait ſucceſſivement ſur pluſieurs parties du globe, ſçavoir ſur celles par leſquelles il touche le plan; or lorſque la partie comprimée ceſſe d'être appliquée contre le plan, elle ſe rétablit dans ſon premier état & le reſſort ſe détend avant que la compreſſion finiſſe, comment eſt-ce donc que le reſſort redonnera au corps toute la force par laquelle il a été comprimé. M. de Mairan qui ſe propoſe la difficulté, la leve pleinement (147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156). Si un corps de figure ſpherique & à reſſort parfait, choque un plan inébranlable & parfaitement poli, il eſt réfléchi de maniere que l'angle de reflexion eſt égal à l'angle d'incidence. Si le reſſort eſt imparfait, l'angle de reflexion ſera moindre que l'angle d'incidence. Si le plan eſt raboteux, l'angle de reflexion ſera plus grand que l'angle d'incidence (157. 158. 159).

DU CHOC QUI PRODUIT LA RÉFRACTION.

La réfraction conſiſte en ce qu'un corps qui paſſe d'un milieu dans un autre de differente denſité, par exemple de l'air dans l'eau, eſt détourné de ſa direction, & en prend une qui eſt autre que celle qu'il ſuivoit avant la rencontre du nouveau milieu, c'eſt ce détour qu'on appelle mouvement de réfraction, ou ſimplement réfraction. Dans la réfraction, le corps peut s'approcher ou s'éloigner de la perpendinulaire au point d'incidence. Dans la réfraction, il faut conſiderer la ſurface refringente, le point d'incidence qui eſt auſſi celui de la réfraction, l'angle *d'incidence*, la perpendiculaire d'incidence & de réfraction, l'angle d'incidence, l'angle de réfraction, & l'angle d'inclinaiſon. Si un corps de figure ſphérique tombe perpendiculairement ſur le nouveau milieu, il n'y a point de réfraction: ſi le corps rencontre obliquement le nouveau milieu, il y a réfraction; & ſi le nouveau milieu réſiſte moins, le corps ſe détourne en s'approchant de la perpendiculaire; mais il s'en éloigne, ſi le nouveau milieu réſiſte davantage. Si une ſphere en entrant dans un nouveau milieu s'éloigne de la perpendiculaire, le nouveau milieu qu'elle pénétre réſiſte davantage que celui qu'elle quitte (160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168). Si un corps traverſe deux milieux qui réſiſtent inégalement, qu'il parcoure dans l'un & l'autre en tems égaux des eſpaces qui ſoient entr'eux comme les ſinus de l'angle d'inclinaiſon eſt au ſinus de l'angle de réfraction, il ſuivra le chemin de la plus courte durée: or en ſuivant un tel chemin il s'approche de la perpendiculaire au point d'incidence lorſqu'il paſſe d'un milieu aiſé à pénetrer dans un autre qui l'eſt moins, ce qui renverſeroit les propoſitions précedentes; mais comme la verité de cette propoſition n'eſt fondée que ſur une hypotheſe arbitraire, on ne peut en rien conclure contre celles qu'on vient de prouver, & qui ſont établies ſur la nature de la réſiſtance des milieux.

LIVRE QUATRIE'ME.

DE LA STATIQUE.

LA ſtatique eſt une ſcience qui traite de l'équilibre des puiſſances en tant qu'appliquées aux machines, & qui détermine les rapports que ces mêmes puiſſances doivent avoir entr'elles dans l'équilibre. L'équilibre eſt l'état de pluſieurs forces qui agiſſent les unes contre les autres, de maniere que tout demeure en repos (1). Puiſſance eſt tout ce qui peut mouvoir un corps, on l'appelle auſſi quelquefois force mouvante. La direction d'une puiſſance eſt la ligne droite ſuivant laquelle elle tend à mouvoir un corps (4). Les machines ſimples ſont au nombre de ſix: Le levier, le tour ou treuil, la poulie, le plan incliné, la vis & le coin, auxquelles on peut joindre la machine funiculaire. Les machines compoſées ſont des aſſemblages de machines ſimples (5. 6). Dans une puiſſance il faut diſtinguer la force abſolue & la force relative (7). Remarque où l'on expoſe les differens principes

qu'ont ſuivi les auteurs anciens & nouveaux qui ont écrit ſur la ſtatique (8). On diviſe ce Livre en quatre Chapitre ; dans le premier on traite du levier, de la poulie & du tour ou treuil ; dans le ſecond du plan incliné, de la vis, du coin, & des poids ſoutenus avec des cordes ; dans le troiſiéme des machines compoſées ; dans le quatriéme on donne la conſtruction de la balance, du peſon, & l'on y réſout quelques problêmes de ſtatique les plus ordinaires (12).

CHAPITRE PREMIER.

DU LEVIER, DE LA POULIE ET DU TOUR OU TREUIL.

TOutes les machines ſimples peuvent être rapportées au levier & au plan incliné, comme on l'a remarqué dans ce Chapitre art. 84, & au commencement du ſecond. Cette maniere de conſiderer les machines abbrege, & par-là l'on a eu la facilité de traiter la mécanique ſuivant trois principes differens, ſans néanmoins groſſir beaucoup ce Livre, en ſorte que l'on a mis comme trois traitez dans un.

DU LEVIER.

Le levier dont les ouvriers ſe ſervent eſt une barre de fer, de bois ou de quelque autre matiere dure & non ſujette à ſe courber. Lorſqu'on ſe ſert du levier il faut qu'il ſoit poſé ſur un appui qu'on appelle auſſi hypomochlion ; on diſtingue le levier de la premiere, de la ſeconde & de la troiſiéme eſpece. On donne trois démonſtrations du levier (14. 15. 16).

PRÉPARATION POUR LA PREMIERE DÉMONSTRATION DU LEVIER.

Dans l'équilibre une force qui eſt appliquée à un corps tend à lui communiquer tout le mouvement qu'elle peut produire ſuivant ſa direction. D'où l'on conclut que ſi un poids eſt attaché ſucceſſivement à differens points du levier, & qu'une puiſſance tende à le mouvoir, elle tend auſſi dans l'équilibre à lui communiquer des viteſſes ou des quantitez de mouvement qui ſont dans la raiſon des diſtances à l'appui, non-ſeulement lorſque les directions de la puiſſance & du poids ſont paralleles, mais auſſi lorſqu'elles concourent. Lorſque deux poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui dans l'équilibre, ils tendent à être mûs avec des quantitez égales de mouvement (17. 18. 19). Pour avoir une juſte idée de l'équilibre, il faut concevoir diſtinctement la réſiſtance que les puiſſances ſe font les unes aux autres : or on a diſtingué Liv. I. art. 11. deux ſortes de réſiſtances l'une propre, l'autre impropre. La réſiſtance impropre eſt proportionnelle à la maſſe, la réſiſtance propre eſt proportionnelle à la force contraire qui la fait, chacune de ces réſiſtances peut être conſiderée en elle-même & d'une maniere abſolue ou relativement à la puiſſance qui tend à la ſurmonter : or on prouve que cette diſtinction de réſiſtance abſolue & de réſiſtance relative eſt bien fondée, & que la réſiſtance propre & impropre demeurant la même, chacune peut augmenter ou diminuer relativement à la puiſſance qui tend à la ſurmonter : ainſi un poids ou une puiſſance réſiſte d'autant plus qu'il eſt ſollicité ou contraint de parcourir en même-tems ou en tems égal des eſpaces plus grands contre ſa propre direction (21. 22).

PREMIERE DEMONSTRATION DU LEVIER.

Cette démonſtration eſt tirée des propoſitions précedentes, & l'on prouve que ſi deux poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui aux directions, il y a équilibre, l'un des poids ne pouvant l'emporter ſur l'autre, parce que la réſiſtance que l'un des poids fait à l'autre, eſt préciſément égale à la force que cet autre exerce pour la ſurmonter. L'équilibre ſur le levier (ſuivant le principe qu'on emploie ici) conſiſte donc en ce que les poids étant dans la raiſon réciproque des diſtances à l'appui, le grand trouve dans le petit une réſiſtance d'autant plus grande que le

petit poids eſt plus éloigné de l'appui, & au contraire le petit poids trouvé dans le grand une réſiſtance d'autant moindre que ce grand poids eſt plus proche du même appui, en ſorte que la réſiſtance d'une part eſt équivalante à la force contraire de l'autre part. C'eſt à cette égalité de force & de réſiſtance que ſe réduit le principe de M. Deſcartes, lorſqu'il dit qu'il faut autant de force pour élever un poids d'une livre à la hauteur de 100 pieds que pour en élever un de 100 livres à la hauteur d'un pied. D'où l'on conclut que le principe de M. Deſcartes bien entendu, ne peut non-ſeulement être mis à couvert des difficultez qu'on lui oppoſe ordinairement, mais encore qu'il eſt concluant, & qu'on peut l'étendre à l'équilibre dans les cas où les directions concourent (24. 25. 26. 27. 28. 29. 30). Pour fixer encore davantage le bon ſens que doit avoir le principe de M. Deſcartes tiré du mouvement, on établit quelques Corollaires, d'où l'on déduit enfin un principe général & fondamental que voici. Si deux puiſſances agiſſent l'une contre l'autre, & que l'une d'elles ne puiſſe ſe mouvoir ſans qu'elle ne faſſe parcourir à l'autre puiſſance un eſpace contre ſa propre direction, celle-ci réſiſtera d'autant plus que cet eſpace ſera plus grand; & ſi les eſpaces que ces deux puiſſances ſont ſollicitées de parcourir en même-tems, l'une en montant, l'autre en deſcendant, ſont entr'eux réciproquement comme ces puiſſances, il y aura équilibre (31. 32. 33. 34. 35. 36).

PRE'PARATION ET SECONDE DEMONSTRATION DU LEVIER.

La préparation conſiſte à faire la récapitulation de ce que l'on a dit dans le premier Livre ſur la maniere dont l'équilibre ſe forme, déduite de la compoſition & de la décompoſition des forces. Selon ce principe on démontre que ſi deux puiſſances ſont appliquées à un levier ſuivant des directions qui ſoient dans un même plan, il y a équilibre ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions : car on fait voir que ces deux forces ſe compoſent en une ſeule, dont la direction paſſe par l'appui, & mouve par conſéquent une réſiſtance qui l'empêche de produire le mouvement (37. 38. 39).

PRE'PARATION ET TROISIE'ME DEMONSTRATION DU LEVIER.

Dans la préparation on explique quelques propriétez des corps peſans. La demonſtration eſt tirée de la propriété du centre de gravité. Si un corps eſt ſoutenu par ſon centre de gravité toutes les parties de ce corps ſont en équilibre autour de ce point; or ſi deux poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de l'appui, & qu'on conſidere ces deux corps ainſi joints par un levier comme n'étant qu'un ſeul & même corps, le point du levier qui répond à l'appui eſt le centre commun de gravité des deux corps; donc ces deux poids doivent être en équilibre ſur le levier ainſi poſé ſur l'appui (40. 41. 42. 43. 44). Comme cette troiſiéme démonſtration ſuppoſe que les directions des poids ſont paralleles, afin de donner une démonſtration pour le cas où les directions concourent, on fait quelques ſuppoſitions au moyen deſquelles on prouve que des puiſſances ſont en équilibre ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions, lors même que ces directions concourent (45. 46. 47. 48. 49. 50). Non-ſeulement deux puiſſances appliquées à un levier ſont en équilibre ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions; mais ſi deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, elles ſont entr'elles réciproquement comme les diſtances de l'appui aux directions. On donne deux démonſtrations de cette propoſition (51. 52). On déduit de ces deux propoſitions fondamentales quinze Corollaires où l'on explique le détail de ces mêmes propoſitions en conſiderant les differens changemens qui peuvent arriver aux puiſſances, aux directions, aux angles qu'elles forment entr'elles & avec le levier, leur point de rencontre, & au lieu du rapport des diſtances on ſubſtitue le rapport des ſinus. Ce qui eſt d'une grande commodité pour les calculs (*Art.* 53. 54. 55. 56. &c. *juſqu'à* 72).

De l'equilibre sur le levier eu egard a quelques circonſtances particulieres.

1. Si les directions des poids concourent au centre de la terre & que deux poids ſoient en équilibre ſur un levier horizontal, ils ceſſeront d'y être ſi le levier devient incliné à l'horizon. Quoiqu'on ne puiſſe pas vérifier par l'expérience la certitude de cette propoſition, elle eſt néanmoins vraie en la conſiderant dans l'exactitude Géométrique. 2. Si deux poids fixement attachez à un levier horizontal ſont en équilibre, & que la ligne droite qui joint leurs centres de gravité paſſe par l'appui, ils ſeront encore en équilibre quelque ſituation qu'on donne au levier. Mais ſi cette ligne qui joint les centres de gravité ne paſſe pas par l'appui, l'équilibre ſera rompu, ſi le levier ceſſe d'être horizontal. Lorſque la ligne qui joint les centres de gravité des deux poids ne paſſe pas par l'appui, l'on a un levier courbé, cette courbure ſe trouve encore lorſque le levier eſt ſuſpendu par un anſe : or dans tous ces cas ſi deux poids ſont en équilibre, le levier étant horizontal, ils n'y ſeront plus s'il devient incliné, & ſi au lieu de l'un des poids on met une puiſſance pour faire équilibre avec l'autre poids dans les differentes inclinaiſons du levier, il faudra augmenter ou diminuer cette force (72. 73. 74. *juſqu'à* 83).

De la poulie.

Deux ſortes de poulies l'une fixe, l'autre mobile. On peut conſidérer l'une & l'autre poulie comme un levier ; la poulie fixe comme un levier où l'appui eſt entre la puiſſance & le poids, & la poulie mobile comme un levier ou l'appui eſt à l'une des extrémitez du levier. Dans la poulie fixe le rapport de puiſſance au poids eſt un rapport d'égalité, c'eſt-à-dire, que la puiſſance eſt égale au poids, quelles que ſoient d'ailleurs leurs directions paralleles ou concourantes. Dans la poulie mobile ſi les directions ſont paralleles, la puiſſance eſt au poids comme 1 eſt à 2 ; ſi les directions concourent, elle eſt au poids comme le rayon de la poulie eſt à la ligne qui joint les points d'attouchement de la corde. Ainſi il faut que la puiſſance faſſe un plus grand effort pour ſoutenir un poids à l'aide d'une poulie mobile, lorſque les directions concourent, que lorſqu'elles ſont paralleles.

Du tour ou treuil, et des machines qui y ont rapport.

Cette machine eſt compoſée d'un cylindre ſupporté ſur deux appuis, & dans lequel on implante des barres ou bâtons pour avoir la facilité de le faire tourner ; quelquefois on paſſe le cylindre dans une roue perpendiculairement à ſon plan, en ſorte que l'axe du cylindre enfile la roue par ſon centre. On appelle alors cette machine l'eſſieu dans la roue. Il n'eſt pas néceſſaire pour l'équilibre que les directions de la puiſſance & du poids ſoient en un même plan ; le double appui qui ſe trouve dans cette machine donne la liberté à la puiſſance de diriger ſon action à volonté. Dans cette machine les directions ne ſont dans un même plan que lorſqu'elles ſont paralleles: dans tous les autres cas elles ſont dans des plans differens. Lorſqu'elles ſont perpendiculaires à l'axe ; on peut ſuppoſer qu'elles ſont en un même plan, parce que à quelque endroit du treuil que la puiſſance ſoit appliquée, elle fait la même impreſſion ſur le treuil pour le faire tourner, & cet effort eſt tranſmis au poids ou fardeau ; or c'eſt cet effort qui met le poids en équilibre : il eſt donc indifferent d'appliquer la puiſſance à tel endroit du treuil que l'on voudra pourvu que ſa direction demeure perpendiculaire à l'axe, & qu'elle en ſoit à la même diſtance ; dans cette hypotheſe le treuil ne differe pas d'un levier droit ou angulaire qui a ſon appui ſur le point de l'axe où le plan des directions le rencontre. C'eſt pourquoi ſi la puiſſance & le poids ſont dans la raiſon réciproque des diſtances de ce point aux directions, il y aura équilibre. Si les directions ne ſont pas perpendiculaires à l'axe, on peut néanmoins faire en ſorte qu'elles ſoient dans deux plans paralleles, & l'on a encore la liberté de les conſidérer comme étant dans un même plan de même que ſi elles étoient paralleles. L'on détermine la ſituation de ces deux plans, &

ſans faire la ſuppoſition ordinaire que les directions ſont perpendiculaires à l'axe ni qu'elles ſont en un même plan, on donne le rapport de la puiſſance au poids, ce rapport eſt compoſé, lorſqu'on veut l'avoir pour tous les cas poſſibles; mais ſi on demande quel eſt le rapport de la puiſſance au poids dans certains cas particuliers, & ſur-tout dans le cas de la ſuppoſition ordinaire que les directions ſont perpendiculaires à l'axe, ce rapport eſt ſimple (*depuis* 94 *juſqu'à* 115).

DU MOMENT OU FORCE RELATIVE DES PUISSANCES.

On ſçait, & l'expérience montre qu'un petit poids peut faire équilibre avec un grand, d'où eſt-ce donc que procede la force par laquelle le petit contrebalance le grand, car le petit ne devient pas plus peſant pour être ſuſpendu à une plus grande diſtance de l'appui? Or on fait voir que la réſiſtance du petit poids augmente relativement au grand lorſqu'il eſt attaché à une plus grande diſtance de l'appui, parce que le grand poids ne peut ſe mouvoir & entraîner le petit à moins qu'il ne ſurmonte la réſiſtance du petit, d'autant plus ſouvent que le petit eſt plus éloigné de l'appui, ce qui augmente la difficulté du grand poids, & conſume une plus grande partie de ſa force. On a déja démontré au commencement de ce Livre l'exiſtance de la force relative & les changemens qu'elle peut recevoir, quoique la force abſolue demeure la même; le ſtile connu & ſerré qui eſt propre à la démonſtration, n'a pas permis que l'on s'étendît autant qu'il auroit été néceſſaire pour faire toucher comme au doigt cette force, c'eſt pourquoi on propoſe ici de nouveau l'idée de cette force, & l'on en donne une explication plus développée & plus circonſtanciée; & l'on conclut que cette force eſt proportionnelle au produit de la force abſolue, & de l'eſpace que la même force abſolue eſt ſollicitée ou preſſée de parcourir contre ſa propre direction, ou bien que la force relative eſt proportionnelle au produit de la force abſolue & de la diſtance de cette force à l'appui. L'on remarque auſſi que le principe de M. Deſcartes eſt peut être le ſeul qui puiſſe bien faire entendre la nature de la force relative (115. 116 &c. *juſqu'à* 125).

DE L'UTILITE' DES MOMENS DANS LA STATIQUE.

Les momens ſont une voie courte & facile pour démontrer & pour s'aſſurer s'il y a équilibre, lorſque plus de deux puiſſances ſont appliquées à un levier poſé ſur un appui. Si deux ou pluſieurs puiſſances agiſſent contre pluſieurs autres que la ſomme des momens d'une part, ſoit égale à la ſomme des momens de l'autre part, il y a équilibre. La connoiſſance que l'on a de l'uſage des momens, donne la facilité de ſubſtituer une puiſſance à deux ou deux à une, ſoit que la puiſſance qu'il faut ſubſtituer ſoit donnée ou laiſſée au choix de celui qui doit l'appliquer au levier. Le treuil étant une eſpece de levier, ce qui vient d'être dit des momens par rapport au levier convient auſſi au treuil (125. 126, &c. *juſqu'à* 146).

DES APPUIS.

Il eſt utile de connoître la charge que la puiſſance & le poids font porter à l'appui, & la réſiſtance qu'il peut faire à cette charge. On conſidere d'abord l'appui dans le levier, enſuite les appuis dans le treuil.

DE L'APPUI DANS LE LEVIER.

Il y a deux choſes à conſidnrer, la charge & la direction de cette charge. Lorſque deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier, leurs efforts ſe compoſent en un, & c'eſt cet effort qui fait la charge de l'appui, & cette charge ou plutôt la réſiſtance qui lui eſt oppoſée eſt comparable à une puiſſance qui réſiſteroit à cette charge ou effort réſultant des efforts particuliers de la puiſſance & du poids. Lors donc que deux puiſſances ſont en équilibre ſur un levier poſé ſur un appui, on peut conſiderer ce levier comme étant tiré par trois puiſſances, & chacune d'elles peut être regardée à ſon tour comme faiſant l'office d'appui. D'où l'on conclut que dans l'équilibre la réſiſtance de l'appui, & l'une des puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées à leurs directions, menées dis-je, du point d'application de la puiſſance qui fait l'office d'appui, ſuppoſant encore que l'équilibre de deux puiſſances appliquées à un levier qui eſt poſé ſur un

appui; ſe fait ſuivant la même loi, que ſi au lieu de l'appui il y avoit une puiſſance, on peut démontrer par le principe de M. Deſcartes le rapport que ces trois puiſſances doivent avoir. On déduit du rapport des trois puiſſances appliquées à un levier pluſieurs Corollaires ou l'on explique les differens changemens qui arrivent à la charge de l'appui ſelon que les directions des puiſſances en équilibre, ſont des angles plus ou moins ouverts, & l'on démontre que lorſque ces directions ſont paralleles, cette charge eſt la plus grande qu'il eſt poſſible. & qu'elle eſt égale à la ſomme ou à la difference des mêmes puiſſances, à la ſomme, ſi l'appui eſt entre les puiſſances, à la difference, ſi l'appui eſt à l'une des extrémitez du levier (146. 147 &c. *juſqu'à* 166). Si les puiſſances en équilibre ſur un levier ſont au nombre de plus de deux, & que leurs directions ſoient paralleles, la charge de l'appui eſt encore égale à la ſomme ou à la difference des mêmes puiſſances. Mais ſi les directions concourent, on donne un moyen de les réduire à deux qui chargent l'appui comme feroient toutes ces puiſſances enſemble (166). On répond enfin à cette difficulté pourquoi un petit poids qui fait équilibre avec un grand poids & le contrepeſe, ne charge ou ne preſſe cependant l'appui que par un effort égal à celui de ſa peſanteur abſolue (167).

DES APPUIS DANS LE TOUR OU TREUIL.

On avertit que ce que M. Varignon dit de la charge des appuis dans le treuil, eſt inſuffiſant, & on propoſe ce qu'on en va dire comme une eſpece de ſupplément à ce qu'il a démontré du rapport des puiſſances ſur le treuil. Avant d'entrer dans la détermination de la charge des appuis dans le treuil, on fait pluſieurs réflexions préliminaires; & parce que ſi une puiſſance preſſe au moyen d'un levier deux appuis, on peut dire en général que les charges ou preſſions qu'elle y produit, & les réſiſtances des appuis ſont indéterminées, on examine en quel ſens il faut entendre cette indétermination. Or on fait voir que ſi les charges ou preſſions que les appuis ſupportent, ſont indéterminées dans un certain ſens, dans le ſens qu'on peut leur oppoſer une infinité de réſiſtances differentes, elles ſont néanmoins déterminées en ce que les puiſſances en équilibre ne ſont pas naître une infinité de preſſions differentes, mais elles produiſent deux charges d'une meſure déterminée, & dont les directions ſont aſſignables (168. 169 *juſqu'à* 185). Les charges des appuis dans le treuil peuvent être déterminées géométriquement ou par nombres & par le calcul, & on diſtingue trois cas où les directions ſont perpendiculaires à l'axe, ou bien l'une eſt perpendiculaire & l'autre oblique, ou elles ſont toutes deux obliques. On arrive aux déterminations qu'on ſe propoſe de donner avec le ſecours de la compoſition des forces: on conçoit un plan qui paſſe par l'axe du treuil & qui rencontre l'une des deux directions lorſque cela eſt poſſible, ce plan rencontre auſſi l'autre direction: or la puiſſance qui agit ſuivant cette direction eſt décompoſée en deux efforts, dont l'un eſt perpendiculaire au plan par l'axe, & c'eſt cet effort qui fait équilibre avec le poids ou l'autre puiſſance; le ſecond effort eſt parallele au même plan & ſe perd ſur les appuis, leſquels lui réſiſte: on détermine enſuite par la propriété du levier ce que chaque appui doit porter de la ſomme des efforts perpendiculaires au plan par l'axe & de l'effort parallele. Ces efforts ainſi diſtribuez aux deux appuis, ſe compoſent en deux preſſions qui ſont les charges que l'on s'eſt propoſé de déterminer (185. 186, &c. *juſqu'à* 192). S'il y avoit plus de deux puiſſances en équilibre ſur le treuil, on auroit les charges en décompoſant chaque puiſſance en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan par l'axe & l'autre parallele. L'on conclut de là qu'un corps qui eſt tiré par tant de puiſſances que l'on voudra ſuppoſer & ſuivant toutes les directions poſſibles, peut être retenu en équilibre par deux réſiſtances ou deux puiſſances. Les charges ou preſſions qu'on vient de déterminer peuvent être ſuppléées par une infinité de paires de puiſſances differentes: or les directions de chaque paire de ces puiſſances réſiſtantes ſont dans le même plan que les directions des charges que les puiſſances en équilibre ſur le treuil produiſent en preſſant les appuis. On donne enfin une expreſſion du rapport de la charge de chaque appui, ou au poids ou à la puiſſance ſuppoſez en équilibre ſur le treuil (192. 193, &c. *juſqu'à* 196).

CHAPITRE SECOND.

DU PLAN INCLINE', DE LA VIS, DU COIN ET DES POIDS ſoutenus avec des cordes.

LEs machines ſimples dont il s'agit ici, peuvent être rapportées au plan incliné de même que la poulie & le treuil peuvent l'être au levier.

DU PLAN INCLINE'.

Comme la théorie de cette machine eſt fondamentale, on s'applique d'une maniere particuliere à en démontrer les propriétez, conformément à la méthode que l'on a ſuivie pour le levier. On donne trois démonſtrations du rapport de la puiſſance au poids. La premiere eſt titée du mouvement dans le ſens du principe de M. Deſcartes. La ſeconde eſt fondée ſur les forces compoſées. Dans la troiſiéme on conſidere le plan incliné comme faiſant l'office d'appui à l'égard d'un levier ſur lequel la puiſſance & le poids ſont en équilibre, c'eſt-à-dire, qu'on ramene le plan incliné au levier, ſelon la maniere de raiſonner des anciens. Avant de propoſer ces trois démonſtrations, on fait pluſieurs réflexions préliminaires qui ſervent de préparations à chacune des trois. Tous les corps en équilibre ſur le plan incliné pouvant être répréſentez par la ſphere, on prouve que la direction de la puiſſance doit paſſer par le centre : or ſi du centre on mene une perpendiculaire au plan incliné, laquelle rencontre la baſe du corps, c'eſt-à-dire, la ſurface grande ou petite par laquelle le corps s'applique au plan incliné, il y aura équilibre entre la puiſſance & le poids, s'ils ſont entr'eux réciproquement comme les diſtances ou perpendiculaires menées de l'appui ou du point d'attouchement aux directions. Par l'appui l'on entend ici le point où la perpendiculaire menée du point de concours des directions, rencontre la baſe du corps. La propoſition inverſe eſt auſſi vraie. Si une puiſſance retient un poids en équilibre ſur un plan incliné, leur rapport eſt égal au rapport inverſe des perpendiculaires menées du point d'attouchement aux directions. On conclut de ces deux propoſitions, que ſi la direction de la puiſſance eſt parallele au plan incliné, elle eſt au poids comme la hauteur du plan eſt à la longueur; & ſi la direction de la puiſſance eſt parallele à la baſe du plan incliné, elle eſt au poids comme la hauteur du plan eſt à la baſe. On explique enſuite dans quelques Corollaires le détail des differentes circonſtances qui ſe trouvent dans l'équilibre ſur le plan incliné, & l'on ſubſtitue le rapport des ſinus au rapport des perpendiculaires menées du point d'attouchement aux directions (197. 198 *juſqu'à* 237). Si deux puiſſances égales tiennent deux poids en équilibre ſur deux plans inclinez qui ont la même hauteur ſuivant des directions paralleles aux plans, les poids ſont entr'eux comme les longueurs; & ſi ces poids agiſſent l'un contre l'autre au moyen d'un cordon qui paſſe au-deſſus d'un point fixe, ils ſont dans la même raiſon, c'eſt-à-dire, comme les longueurs des plans. Et ſi les directions des puiſſances égales ſont paralleles aux baſes des plans inclinez, les poids qu'elles retiennent en équilibre ſont dans la raiſon des baſes; & ſi ces poids agiſſent l'un contre l'autre au moyen d'un cordon qui les joint & qui eſt parallele aux baſes des plans, ils ſont entr'eux comme ces baſes (237. 238. 239. 240).

DE LA CHARGE DU PLAN INCLINE'.

Cette charge eſt au poids ou à la puiſſance comme le ſinus de l'angle formé par leurs directions eſt au ſinus de l'angle formé par la perpendiculaire au point d'attouchement & la direction de la puiſſance qui n'entre point dans la proportion. Si la direction de la puiſſance eſt parallele au plan incliné, la charge eſt exprimée par la baſe; mais ſi la direction de la puiſſance eſt parallele à la baſe, la charge eſt exprimée par la longueur. Si un poids eſt retenu entre deux plans inclinez, il y cauſe des preſſions qui ſont entr'elles réciproquement comme les ſinus des angles formez par la direction du poids & les perpendiculaires aux points d'attouchement. L'on

remarque que par la charge du plan incliné, il ne faut pas entendre le poids ou la partie de ce poids que le plan ſoutient : on détermine enſuite quelle eſt la partie de de ce poids que le plan incliné ſoutient (241. 242, &c. *juſqu'à* 255).

DE LA VIS.

La vis eſt un cylindre ſur la ſurface duquel on a entaillé un cordon qui l'entoure en forme de ligne ſpirale qui s'étend depuis l'extrémité inferieure juſqu'à l'extrémité ſupérieure. Lorſqu'on développe le cylindre, chaque tour du cordon ſpiral, (on l'appelle ſpire ou hélice,) répréſente la diagonale d'un parallelogramme qui a pour baſe la circonférence de la baſe du cylindre, & pour hauteur l'étendue que la ſpire ou l'hélice occupe ſur le cylindre ſuivant la longueur de l'axe ; elle eſt auſſi égale à la diſtance ou intervalle qui eſt entre deux ſpires ou deux tours de cordon ſpiral. Si le cordon ſpiral eſt roulé ſur la ſurface convexe du cylindre, la vis eſt appellée intérieure, elle eſt appellée vis extérieure ou écrou ſi le cordon ſpiral eſt ſur la ſurface concave du cylindre. Si les deux cylindres, l'un convexe & l'autre concave, ſont de même diametre, & que le cordon ſpiral, & les intervalles des ſpires de l'un ſoient égaux aux intervalles des ſpires de l'autre, le cordon ſpiral de la vis extérieure pourra s'ajuſter avec le cordon ſpiral de la vis intérieure comme les circonférences de deux anneaux égaux, pour lors l'un des cordons pourra gliſſer ſur l'autre; & parce que chaque cordon ſpiral s'étend en tournant depuis le bas juſqu'au haut du cylindre, il s'enſuit que celui des deux qui gliſſera ſur l'autre, y avancera comme ſur un plan incliné ; & venant à rencontrer un obſtacle, il preſſera le cordon ſur lequel il eſt mû comme un poids preſſe un plan incliné lorſqu'il y eſt retenu. D'où l'on voit que ſi la puiſſance qui tend à faire tourner la vis, étoit immédiatement appliquée aux ſpires de la vis mobile, le rapport qu'elle auroit au poids ou a la preſſion produite par la réſiſtance de l'obſtacle ſeroit le même que dans le plan incliné ; mais la puiſſance tend à faire tourner la vis avec un levier, c'eſt pourquoi ſi ſa direction eſt parallele à la baſe du cylindre, elle eſt à la preſſion ou réſiſtance de l'obſtacle comme l'intervalle qui eſt entre deux ſpires, eſt à la circonférence qu'elle décrit. Si la direction de la puiſſance eſt parallele au cordon ſpiral le rapport qu'elle a à la réſiſtance de l'obſtacle, eſt moindre que lorſque la direction eſt parallele à la baſe du cylindre ou de la vis (255. 256, &c. *juſqu'à* 269).

DU COIN.

Le coin ordinaire eſt un corps ou ſolide qui a la figure d'un priſme triangulaire, on y diſtingue la tête, la baſe & le taillant, les faces par leſquelles il s'applique aux corps qu'on veut lui faire écarter l'un de l'autre. On ſe ſert du coin pour élever des poids à une petite hauteur, ou bien pour fendre & diviſer les corps. On emploie pour cet effet ou la ſimple preſſion ou la percuſſion. Lorſque l'action du coin conſiſte dans une ſimple preſſion ſans choc comme ſeroit la peſanteur, la réſiſtance de l'obſtacle peut être aſſez grande pour faire équilibre avec cet effort ; mais ſi le coin agit par la percuſſion, & que le choc ne ſoit pas infiniment grand, l'obſtacle eſt toujours ſurmonté en tout ou en partie. Lorſque la force du coin eſt employée à élever un corps, la réſiſtance eſt comme toute réunie à l'endroit où le coin touche le corps; mais lorſqu'on ſe ſert du coin pour fendre, ſon effort agit de l'un à l'autre extrémité de la fente, & parce que tous les corps ſont flexibles & extenſibles ; lorſque le coin tient les côtez de la fente écartez, ils ſe courbent, & les fibres qui réſiſtent à la diviſion s'allongent, mais inégalement ; en ſorte que l'eſpace qui eſt entre les côtez de la fente a la forme triangulaire, les mêmes côtez touchent auſſi le coin par une portion de leur ſurface: il arrive de-là que la preſſion que le coin exerce à droite & à gauche eſt dirigée ſuivant la perpendiculaire à cette ſurface commune; mais parce que tout l'effort par lequel le coin preſſe les deux côtez de la fente retombe ſur le coin, on peut ſuppoſer que cet inſtrument eſt repouſſé ſuivant des directions perpendiculaires aux faces par leſquelles il touche les côtez de la fente. Si le coin qu'on ſuppoſe iſoſcele étoit diviſé ſuivant une ligne qui paſſât par l'angle oppoſé à la baſe, & qui fût perpendiculaire à la même baſe, les preſſions que les côtez de la fente exerceroient ſur les faces du coin étant obliques au plan ou à la ſurface commune par leſquelles les deux

coins

coins partiels ſe toucheroient, elles tendroient en partie à appliquer ces deux coins partiels l'un contre l'autre, & en partie à les faire gliſſer l'un ſur l'autre, les efforts par leſquels ces deux coins ſe preſſeroient l'un l'autre, ſe détruiroient ou s'empêcheroient mutuellement ; mais à l'égard des efforts par leſquels ils tendroient à gliſſer l'un ſur l'autre, il faudroit une force pour les réprimer, & pour retenir les deux coins entre les côtez de la fente : or quoique le coin ne ſoit pas diviſé en deux parties, les efforts dont on vient de parler ont également lieu : l'on conclut de-là que le coin qui eſt engagé entre les côtez de la fente, fait l'office de deux plans inclinez ; & que lorſqu'il eſt employé à élever ou à ſoutenir un poids, il ne differe pas non-plus d'un plan incliné (*269. 270, &c. juſqu'à 279*). Ces notions ſuppoſées, on détermine dans ce dernier cas le rapport de la puiſſance au poids, & dans le ſecond le rapport de la puiſſance à la réſiſtance conſiderée à l'extrêmité de la fente & à l'endroit où le coin en touche les côtez (*279. 280 juſqu'à 288*).

De la machine funiculaire ou des poids ſoutenus avec des cordes.

Cette machine peut être rapportée au plan incliné ou au levier ; & l'on démontre que ſi un poids eſt ſoutenu par deux cordons qui faſſent un angle, ce poids eſt à l'une des puiſſances comme le ſinus de l'angle formé par leurs directions, eſt au ſinus de l'angle formé par la direction du poids & de la puiſſance qui n'entre point dans la proportion : d'où l'on déduit 1. qu'il eſt comme impoſſible de tendre une corde en ligne droite lorſqu'elle a quelque peſanteur & une certaine longueur, comme on peut l'obſerver en pluſieurs rencontres. 2. Si un poids eſt ſoutenu par une corde, & qu'une puiſſance tire cette corde ou le poids ſuivant une direction horizontale, elle fait monter le poids ſi petite qu'elle ſoit & ſi grand que puiſſe être le poids, pourvu qu'elle ait un rapport fini avec ce poids. Si deux puiſſances ſoutiennent un poids avec une corde ſuivant deux directions differentes, on détermine la partie de ce poids que chaque puiſſance ſupporte (*289. 290, &c. juſqu'à 296*).

CHAPITRE TROISIE'ME.

Des machines compoſe'es.

Les machines compoſées ſont des aſſemblages de machines ſimples qui concourent toutes à ſoutenir ou à élever un même poids. Dans les machines compoſées, l'effort qui tend à faire tourner chaque machine ſimple, eſt tranſmis à celle qui ſuit immédiatement, & l'effort qui eſt produit à la rencontre de deux machines, peut être conſideré ſous deux rapports comme cauſe ou puiſſance en tant que cet effort tend à faire tourner la machine à laquelle il eſt communiqué, & comme réſiſtance en tant que cette machine réſiſte ou n'obéit point à l'effort qui la ſollicite à tourner. Les machines compoſées les plus ordinaires ſont les mouffles, les roues dentées, & la vis ſans fin auxquelles on a joint une machine compoſée du treuil & du plan incliné, & une autre compoſée d'une ou de deux roues & d'un levier, dans laquelle le levier pouſſe continuellement la roue, & où le mouvement eſt continu.

Des mouffles.

Les mouffles ſont des aſſemblages de pluſieurs poulies dont les unes ſont fixes & les autres mobiles, les poulies fixes ſont toutes retenues par une même chape qui eſt fixe : les poulies mobiles ſont auſſi pour l'ordinaire dans une même chape mobile. La corde qui embraſſe les poulies peut être parallele dans les differens tours qu'elle fait, ou bien n'être pas parallele ; or de quelque maniere qu'elle embraſſe chaque poulie, elle eſt également tendue par tout : d'où il ſuit 1. que l'effort qui la tire dans toute ſa longueur, eſt égal à l'effort de la puiſſance qui lui eſt appliquée. 2. Que l'effort du poids ſe diſtribue de maniere que chaque poulie mobile en ſupporte une partie : toutes les poulies mobiles ſont également chargées, ſi les cordons ſont paralleles ou bien que deux à deux ils faſſent des angles égaux ; d'où l'on conclut que ſi l'une des extrêmitez de la corde eſt attachée à la chape fixe, la puiſſance eſt au poids comme l'unité eſt au nombre double des poulies mobiles. Si la corde eſt at-

tachée par ſon extrêmité à la chape mobile, la puiſſance eſt au poids comme l'unité eſt à la ſomme de l'unité & du double du nombre des poulies mobiles. Si les directions concourent & que les angles qu'elles font ſoient inégaux, le rapport de la puiſſance au poids eſt plus grand que celui qu'on vient de déterminnr. Il y a une maniere de mouffler les poulies où la chape qui embraſſe une poulie, eſt attachée par un bout à un point fixe, & par l'autre à la chape de la poulie ſuivante; dans cette machine ſi les cordons ſont paralleles, & qu'il y ait deux poulies mobiles, la puiſſance ſera au poids comme 1 eſt à 4. S'il y en a 3, comme 1 eſt à 8. S'il y en a 4, comme 1 eſt à 16, &c. (297 *juſqu'à* 307).

DES ROUES DENTÉES.

Les roues dentées ou à dents ſont des roues dont les circonférences ſont diviſées en un certain nombre de dents égales & également diſtantes les unes des autres. Si on en joint pluſieurs de maniere que les unes agiſſent ſur les autres & les faſſent tourner, on aura une machine compoſée de roues à dents autrement rouage : pour qu'une roue puiſſe en faire tourner une autre, on entaille le rouleau de la roue auquel on donne un certain nombre de dents égales entr'elles & égales à celles de la roue ſuivante, & l'on fait en ſorte que les dents du rouleau de la roue qui précede, engrainent dans les dents de la roue ſuivante. Le rouleau d'une roue ainſi entaillé & diviſé en dents, eſt appellé pignon. Dans les roues dentées la puiſſance eſt au poids comme le produit des rayons des rouleaux ou pignons eſt au produit des rayons des roues (307. 308 *juſqu'à* 314). On donne auſſi la deſcription de la vis ſans fin ; d'une machine compoſée du plan & du treuil, & d'une machine compoſée de deux roues dentées & d'un levier. Dans cette derniere machine le mouvement eſt continu, & le levier agit lorſqu'il va & qu'il revient. On donne auſſi pour ces trois machines le rapport de la puiſſance au poids (314. 315 *juſqu'à* 320).

REMARQUE GE'NE'RALE SUR LES MACHINES ſimples & compoſées.

Dans cette remarque on examine quels ſont les avantages que l'on peut raiſonnablement attendre des machines en mouvement, & l'on fait voir qu'une petite force appliquée à quelque machine que ce ſoit, ne peut pas donner un grand produit ; qu'ainſi ceux-là ſe trompent qui ſe promettent d'arriver à des grands effets en employant des machines fort compoſées, &c. (320 *juſqu'à* 324).

CHAPITRE QUATRIE'ME.

DE LA CONSTRUCTION DE LA BALANCE ET DU PESON, avec la réſoltion de quelques Problêmes de ſtatiques.

DE LA CONSTRUCTION DE LA BALANCE & de ſes défauts.

EN donnant la conſtruction de la balance on remarque les principaux défauts que cette machine peut avoir (324 *juſqu'à* 335).

DE LA ROMAINE OU PESON, ET DE SA CONSTRUCTION.

La romaine differe de la balance en ce que ſes bras ſont inégaux, & qu'avec un même poids on peut peſer des corps fort inégaux : pour faire la diviſion du long bras de la romaine, on peut ſuppoſer 1. que le petit avec ſes accompagnemens eſt en équilibre avec le grand, ou bien que le grand l'emporte ſur le petit, ou bien que le petit eſt plus fort que le long bras : on donne la maniere de faire la diviſion propoſée pour ces trois cas (335 *juſqu'à* 343). Réſolutions de quelques Problêmes les plus ordinaires de la ſtatique (345 *& ſuivans*).

De l'Imprimerie de PH. NIC. LOTTIN, rue S. Jacques, à la Vérité. 1741.

PRINCIPES
SUR
E MOUVEMENT
ET
L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION
aux Mécaniques & à la Phyſique.

A PARIS,

Chez JEAN DESAINT & CHARLES SAILLANT, Libraires,
rue Saint Jean-de-Beauvais, vis-à-vis le Collége.

M. DCC. XLI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

mouvement eſt comme l'agent univerſel qui dirigée par l'Intelligence ſouveraine, fait exécuter à la matiere les fonctions auxquelles elle eſt deſtinée. La Phyſique conſidere donc non-ſeulement la matiere & la ſtructure de ſes parties, mais encore le mouvement; ſans le mouvement la matiere n'eſt qu'une maſſe informe; c'eſt du mouvement qu'elle reçoit ſes beautez & cette variété inépuiſable qui ravit d'admiration tous ceux qui prennent goût à la méditer.

Les Philoſophes du dernier ſiécle raiſonnant tous ſur le même principe, que tout ce qui appartient à ce monde viſible s'opere avec la matiere & le mouvement, ſe partagerent en deux claſſes. Les uns ſe confiant en la ſupériorité qu'ils ſe ſentoient, firent eſſai de leurs forces: ils voulurent voir de quoi la matiere miſe en mouvement étoit capable, & juſqu'où le principe qu'ils prenoient pour guide pouvoit les conduire. Dans cette penſée M. Deſcartes dreſſa ſon ſyſtême général du monde, & le propoſa aux Phyſiciens non comme copie fidele du vrai monde, mais comme une ſimple hypothèſe. Juſqu'à M. Deſcartes le langage inintelligible des Peripatéticiens avoit prévalu dans les Ecoles; il crut donc que le meilleur moyen de diſſiper les anciens préjugez étoit de faire un ſyſtême dans lequel on vît clairement qu'en Phyſique comme dans les autres ſciences peu de principes lorſqu'ils ſont évidens, peuvent faire découvrir un grand nombre de véritez du moins hypothétiques. Il eſt vrai qu'il entre dans un certain détail, mais ce n'eſt pas tant pour expliquer de point en point ce qu'il y a de plus caché dans la nature, que pour tracer un modele de la maniere dont il faut s'y prendre pour raiſonner dans les matieres de Phyſique. Le regret qu'il a témoigné de n'être pas en état de faire les expériences qu'il auroit ſouhaité, prouve aſſez, que bien loin de croire que ſon monde fût une repréſentation au naturel du vrai monde, il étoit au contraire perſuadé que dans les conſéquences & dans les explications particulieres des phenomenes il pouvoit s'être trompé.

Phyſique ſiſtématique.

La Phyſique cultivée par M. Deſcartes & par ceux qui l'ont ſuivi ou qui ont travaillé ſur le même plan eſt, appellée *Phyſique ſyſtématique*. C'eſt un corps de principes par le moyen deſquels on peut conjecturer avec vraiſemblance les premieres cauſes: plus les cauſes ſont intimement liées avec les effets qu'on leur attribue & qu'on en fait dépendre, plus on eſt aſſuré d'approcher de la vérité. Il eſt bien difficile qu'un ſyſtême général de Phyſique ſoit porté à la perfection qu'il peut avoir, & qu'il ſe ſoutienne éga-

ment bien dans toutes ſes parties, ſi l'examen d'un grand nombres de phénomenes, & même de la nature entiere, n'a produit auparavant pluſieurs ſyſtêmes particuliers, qui par leur accord concourent à former le ſyſtême général. M. Deſcartes en réduiſant toute la Phyſique à des principes mécaniques, peut avoir donné la bonne méthode de raiſonner en cette ſcience; mais oſeroit-on fixer le tems auquel on doit ſe promettre d'en recueillir les fruits?

Phyſique Mathématique.

D'autres Philoſophes d'un grand nom prirent une route un peu différente; ſentant bien qu'il eſt d'une difficulté extrême de pénétrer dans la vraie ſtructure de l'univers, & de parvenir juſqu'aux premieres cauſes, ils crurent que les progrès de la Phyſique ſeroient plus prompts s'ils n'embraſſoient d'abord qu'une partie de ſon objet: ils bornerent donc pour lors leurs recherches au ſeul mouvement; ce ſujet eſt ſuſceptible d'évidence; & pour établir la certitude des conſéquences qu'on en peut déduire, il n'eſt pas néceſſaire d'entrer dans les qualitez les plus intimes des corps, ni de connoître leurs vraies cauſes, les cauſes qui concourent à leur formation ou qui les meuvent. Les mouvemens qui dans la nature ſe perpétuent de ſiécle en ſiécle, ſont reglés par des loix certaines & conſtantes: or ce ſont ces loix là même qu'il importe & qu'il ſuffit de bien connoître; lorſqu'on vient à bout de découvrir la loi ſuivant laquelle un mouvement s'exécute, on peut dire que tout eſt fait: les circonſtances qui accompagnent ce mouvement & les effets qui en naiſſent ſe préſentent avec facilité, il n'y a plus qu'à raiſonner conformément à la loi établie: cette méthode d'analyſer les mouvemens & d'en écarter toutes les circonſtances qui ne ſont point néceſſaires à la recherche qu'il en faut faire, fut la ſource d'un grand nombre de découvertes qui enrichirent pour lors la Phyſique, & les progrès qu'ont fait dans la ſuite ceux qui ont tenu la même route, ſont encore plus ſurprenans & plus rapides. La partie de la Phyſique dont l'objet eſt d'examiner & de déterminer les loix qui reglent les mouvemens qui ſubſiſtent dans cet univers, a reçu le nom de *Phyſique Mathématique*, parce qu'elle eſt toute fondée ſur les rapports qui ſont l'objet des Mathématiques.

Certitude de la Phyſique Mathématique.

On ne s'arrête pas à prouver au long la certitude & l'évidence de cette partie de la Phyſique, chacun peut s'en convaincre par ſes propres réflexions. Dieu en créant l'univers matériel, a aſſujetti la formation & la naiſſance des corps à un ordre, il a voulu qu'ils s'entrecommuniquaſſent leurs mouvemens, & que tout ſe

fît par la correſpondance mutuelle des parties : ſouverainement libre dans ſes ouvrages & dans le choix des moyens, il auroit pû donner à chaque choſe toute ſa perfection en un moment, & lui faire remplir par lui-même les fonctions auxquelles elle eſt propre ; mais il a eu deſſein de faire paſſer ſes productions par divers degrés, & de les faire émaner les unes des autres, afin qu'il y eût une ſucceſſion de cauſes & d'effets. Par cette diſpoſition permanente, Dieu conſerve ſon ouvrage & l'entretient dans l'état où il l'a mis, ſans qu'on s'apperçoive qu'il change, quoique ce ſoit dans le plan général qu'il a choiſi. Les mêmes cauſes ſont toujours ſuivies des mêmes effets, & leur retour annonce les mêmes évenemens.

Certitude dans ſon objet.

Certitude dans ſes principes.

Lors donc que des obſervations exactes & des expériences faites & réitérées avec ſoin nous manifeſtent quelque partie de ce bel ordre, non-ſeulement nous ſommes aſſurez de la vérité des choſes que nous voyons & dont nous ſommes témoins, mais nous pouvons dire, ſans danger de nous tromper, que dans la ſuite des ſiécles les mêmes expériences auront encore les mêmes ſuccès. L'illuſion des ſens n'eſt point à craindre ici, le ſcrupule mal fondé des Pyrrhoniens peut bien faire naître un doute méthodique & de ſimple ſpéculation, mais il ne ſauroit être ſérieux.

Certitude dans ſes conſéquences.

Comme l'expérience ne dévoile pas tout, la Phyſique quoique certaine, ſeroit très-bornée ſi elle ne s'étendoit pas plus loin que l'obſervation ; les vérités d'expérience ne ſont que des vérités détachées, ſans ſuite, ſans dépendances ; mais l'eſprit venant à méditer ſur les expériences, va au delà de l'expérience même ; il compare les faits, il combine les circonſtances, il conſidere la part que chacune peut avoir dans les phénomenes qu'il examine, & enfin par un travail aſſidu, il arrive à des concluſions qui ont la même certitude que les principes dont elles découlent : de cette ſorte il rapproche des vérités qui en elles-mêmes paroiſſent très-éloignées, il les diſpoſe ; & par l'arrangement qu'il leur donne, il forme une chaîne qui lui repréſente d'un bout à l'autre la partie de l'univers qui fait l'objet de ſes méditations.

Méthode que l'on ſuit dans la Phyſique Mathématique.

Il n'eſt pas néceſſaire pour cela qu'il approfondiſſe les premieres cauſes, ni qu'il diſcute les premiers principes des corps ; la méthode de traiter la Phyſique qu'on propoſe ici, en diſpenſe, car il s'agit ſeulement d'exprimer les effets naturels par certains rapports : cette méthode eſt la plus aiſée & la plus à la portée de l'eſprit humain ; rien ne lui eſt plus familier que les rapports, & il ne conçoit jamais mieux une choſe que lorſqu'on la lui préſente à la lumiere de quelque rapport. Dans la nature tout eſt ſupputé,

tout s'y opere avec poids & meſure ; c'eſt donc ſe conformer aux vûes de la Nature, ou de ſon Auteur, & la ſuivre pied à pied, que de développer ſes opérations par une ſuite de rapports. Le Mouvement & ſes effets, de même que les nombres & l'étendue, ſont ſuſceptibles de *plus* & de *moins*, ce ſont des quantitez qui peuvent être augmentées ou diminuées : ainſi comparer deux mouvemens, dont l'un ſoit, par éxemple, deux fois auſſi grand que l'autre, c'eſt une même choſe que de comparer deux lignes, ou deux nombres dont l'un contienne l'autre deux fois ; car les rapports égaux donnent le même réſultat, quelles que ſoient les eſpeces de quantité que l'on compare. En fait de rapports on peut donc raiſonner des mouvemens, comme des nombres & des dimenſions de l'étendue ; c'eſt-là auſſi la méthode que l'on ſuit dans la Phyſique-Mathématique.

Utilité de la Phyſique-Mathématique.

Il ſeroit ſuperflu de s'étendre ſur les avantages de la Phyſique-Mathématique, ou de la Science du Mouvement : de quelque côté qu'on jette les yeux on voit des traces de ſon utilité ; la plûpart des Sciences & des Arts la ſuppoſent, comme l'Aſtronomie, la Navigation ; ou en font partie, comme la Mécanique ; & en particulier la partie de la Phyſique qui conſidere la ſtructure des corps, leurs qualitez & leur formation, ne ſçauroit ſe paſſer de la Science du Mouvement, puiſque c'eſt de cette Science qu'il faut apprendre de quelle maniere s'uniſſent les principes qui entrent dans leur compoſition.

On eſt perſuadé aujourd'hui que les Sciences qui procedent par voie de démonſtration, comme la Géométrie, la Science des Nombres, &c. ſont les plus propres pour former le jugement ; la certitude des véritez, l'évidence des preuves, la ſimplicité de la méthode que l'on y ſuit, peuvent autoriſer cette préférence : or un Traité du Mouvement tel qu'on le conçoit ici, n'étant qu'une Géométrie appliquée aux effets naturels, peut en inſtruiſant l'eſprit des merveilles de l'Univers, lui fournir des modéles de raiſonnement auſſi parfaits que ceux qu'il trouve dans la Géométrie pure, & plus intéreſſans par l'agrément de l'objet.

Depuis que la bonne Phyſique a commencé à s'introduire dans les Ecoles, depuis que les Maîtres ſe ſont appliquez à faire choix des matieres pour ne propoſer à leurs Diſciples que des choſes qui ſoient certaines, utiles & propres à piquer la curioſité, on s'apperçoit du progrès que font les jeunes gens qui ont du goût pour les choſes ſolides ; & qui eſt-ce qui ne goûte point la vérité lorſqu'elle eſt miſe dans un bel ordre, & qu'elle eſt préſentée avec

clarté ? On voit, dis-je, que ces jeunes amateurs de la Philoſophie ſont attentifs & animez d'une noble émulation ; le tems eſt bien employé, & ils ont la ſatisfaction à la fin de leur cours, de s'être inſtruits d'un grand nombre de véritez qui ſont autant de preuves de la majeſté & de la toute-puiſſance de celui qui les a créées : elles leur font ſentir que l'homme qui eſt ſi grand en lui-même, puiſqu'il eſt capable de ſi hautes connoiſſances, doit néanmoins vivre dans une dépendance entiere à l'égard de cet Etre ſuprême ; & lorſqu'après avoir fait des réflexions ſérieuſes ſur ce qui ſe paſſe dans cet univers, ils voient que la plus petite force qui ſe joint de nouveau à un mouvement déja éxiſtant, par exemple, celui de la Lune, doit à la longue l'altérer & y produire des changemens conſidérables, il ne leur eſt pas difficile de ſe convaincre & de reconnoître que rien n'arrive par hazard, & que tout eſt conduit par une Intelligence ſouveraine ; car comment pourroit-t-il ſe faire qu'entre tant de mouvemens divers, il ne s'en joignît jamais aucun à celui de la Lune pour la détourner de ſa route, pour en accélérer ou en retarder les révolutions, ſans aucune regle & ſuivant des meſures incertaines, ce qui troubleroit ſans doute la proportion & l'ordre dans leſquels elle les fait.

La Société trouve auſſi ſon utilité dans cette étude : les jeunes gens munis des principes qu'ils ont amaſſez ſont en état d'éxaminer les Ouvrages de l'Art, de s'en inſtruire & d'en juger ſainement ; & ceux qui ſe deſtinent à les éxécuter & à en faire une profeſſion, ont une plus grande facilité à réuſſir que ceux qui ne ſont guidez dans leurs opérations que par la ſimple pratique.

But de cet Ouvrage.

C'eſt pour entretenir ces heureux commencemens, les fortifier, s'il eſt poſſible, ou même pour contribuer en quelque choſe à les former, que j'ai compoſé cet Ouvrage. Mon premier deſſein étoit d'abord de ne travailler que pour les Ecoliers qui font leur Phyſique dans les Colleges, & de me borner aux ſeules matieres de Mécanique que MM. les Profeſſeurs expliquent de vive voix, ou dans les écrits qu'ils dictent ; mais je fis réflexion que la brieveté du tems oblige les Maîtres de reſſerrer les matieres, d'en traiter pluſieurs ſommairement, & de laiſſer à leurs Diſciples le ſoin de les étendre par leurs méditations particulieres, ou en y joignant la lecture de quelque Livre : je crus donc qu'il étoit à propos de donner premierement à cet Ecrit une étendue proportionnée aux divers beſoins, & telle à peu-près que des élémens doivent avoir ; & que ſi les Maîtres qui ſont prépoſez pour l'inſtruction de la jeuneſſe, jugeoient enſuite qu'un abrégé dût être utile, il y auroit plus de fa-

cilité à l'éxécuter, parce que je ſerois à portée de profiter des obſervations qu'ils auroient eu le tems de faire ſur l'Ouvrage entier.

La Science du Mouvement eſt d'une grande étendue : il y faut diſtinguer deux ſortes de connoiſſances, les unes que l'on peut acquérir par la méthode ordinaire, qui eſt la Synthèſe ; elle conſiſte à mettre en ordre les principes qui prouvent une vérité connue, & à les déduire les uns des autres, de maniere que l'on voie avec évidence la liaiſon qu'ils ont avec la vérité que l'on ſe propoſe de démontrer ; mais il y a d'autres connoiſſances qui dépendent d'une théorie plus difficile & plus compliquée, & où l'on n'arrive que par certaines méthodes connues ſeulement de ceux qui ont fait une étude particuliere des calculs ; c'eſt une eſpece d'Analyſe qui fait trouver ces véritez; & la recherche que l'on en fait, ſuppoſe la plûpart de celles qui ſont déja connues par la Synthèſe : c'eſt pour cette raiſon que j'ai intitulé ce Traité *Principes*, parce que ceux qui veulent tenter ces découvertes, peuvent y trouver les premieres notions qui doivent ſervir de fondement à leur théorie. Une autre raiſon m'a déterminé à donner ce titre : quoique ce Traité ſoit aſſez ample, il ne contient pas néanmoins tout ce qu'on démontre du Mouvement, entre un grand nombre de Propoſitions, j'ai choiſi celles qui m'ont paru les plus belles, & que j'ai jugé avoir plus de rapport aux choſes d'uſage. Le but que je me propoſe n'eſt pas de traiter les matieres à fond, ni de dire tout, mais d'aſſembler des véritez qui ſoient comme fondamentales, d'établir des principes, de les déduire avec clarté, & de les mettre dans un ordre qui ſoit à la portée des Commençans.

Les perſonnes que j'ai en vûe n'étant point encore inſtruites, éxigent de moi que je n'omette rien de ce qui peut ſervir à leur donner des idées nettes & préciſes ; une expreſſion équivoque, une propoſition entendue dans un ſens différent de celui dans lequel elle eſt démontrée, déroutent un eſprit qui n'a pas encore une idée bien formée de l'objet de ſon étude ; ces conſidérations engagent à dire les choſes plus au long que lorſqu'on écrit pour des perſonnes qui ſont déja au fait des matieres. Quoique j'aie tâché en écrivant de profiter de tout ce que l'expérience & l'habitude d'enſeigner peuvent m'avoir fait remarquer ſur le progrès des eſprits, pour concilier la brieveté avec la clarté, je ne me flate pas d'avoir réuſſi; je ſçai qu'une certaine longueur eſt ennuyeuſe à ceux qui ſont inſtruits, qui ont l'imagination vive, & qui ſaiſiſſent promptement: je prie les uns & les autres d'uſer d'indulgence, & d'excuſer les endroits qui leur paroîtront avoir ce défaut. Dans le doute ſi je

ne ſerois pas obſcur en épargnant quelques mots, j'ai mieux aimé courir le riſque d'excéder, je ſuis tombé dans des redites, & les doubles expreſſions d'une même choſe m'ont paru quelquefois néceſſaires : un Ouvrage où la clarté & la méthode ſont, pour ainſi dire, l'unique regle, doit être regardé comme aſſez court lorſqu'il eſt étendu.

Plan & deſſein de l'ouvrage.

J'ai diviſé cet Ecrit en ſix Livres. Le premier contient ce qu'on démontre du Mouvement conſidéré d'une maniere générale, & en tant qu'il convient à tous les corps, abſtraction faite de toutes leurs qualitez ſenſibles. On eſtime le mouvement d'un corps par la connoiſſance qu'on a de ſa maſſe, & de l'eſpace qu'il parcourt dans un certain tems, c'eſt-à-dire, de ſa *viteſſe*. Le mouvement d'un corps fait connoître la grandeur de la force qui lui eſt appliquée. Si un corps eſt mû d'un mouvement inégal qui augmente ou qui diminue à chaque inſtant, il faut que la force qui l'accélere ou le retarde ne diſcontinue point de le pouſſer. Si un corps n'eſt pouſſé que par une force, il ſuit la ligne droite ; cette ligne eſt appellée la *direction* ou la *détermination* du corps ; ſi le corps eſt pouſſé à la fois par pluſieurs forces, ſon mouvement eſt appellé *compoſé*, & il peut ſuivre encore la ligne droite ſi les forces qui le meuvent ſont dans un rapport conſtant ; mais ſi le rapport des forces varie, le corps décrit une ligne courbe. Si l'une des forces pouſſe le corps continuellement vers un même point, elle eſt appellée *force centrale*. L'objet du premier Livre eſt de conſidérer ces différentes circonſtances du mouvement, de déterminer le rapport des eſpaces parcourus & des tems.

Dans le ſecond Livre on conſidere le mouvement des corps peſans ſuivant toutes les déterminations que la force mouvante peut leur donner. Tous les corps terreſtres tendent à deſcendre & à s'approcher du centre de la terre : le principe qui leur donne cette tendence eſt appellé *peſanteur*. Or ſuivant quelque direction qu'un corps ſoit mû, il eſt néceſſité à obéïr aux impreſſions de la peſanteur, à moins qu'il ne ſoit ſoutenu, comme lorſqu'il eſt mû ſur un plan horizontal ; lorſqu'il eſt mû ſur la direction même de la peſanteur, il eſt ſimplement accéléré ou retardé ; s'il eſt mû ſur un plan incliné, il eſt auſſi accéléré ou retardé ſuivant la même loi que lorſqu'il deſcend ou qu'il monte directement contre l'effort de la peſanteur, & dans tous ces cas le corps ſuit la ligne droite : mais s'il eſt mû ſuivant une autre direction, il décrit une ligne courbe qui eſt appellée *parabole*. Lorſqu'une fois on a déterminé l'eſpace que la peſanteur peut faire parcourir dans un certain tems, on peut

connoître

connoître tout ce qui arrive aux corps jettez pendant le tems du mouvement.

Le troiſiéme Livre traite du choc des corps. Dieu a voulu que les corps s'entrecommuniquaſſent leurs mouvemens dans leur rencontre mutuelle, & que cette communication ſe fît dans une certaine proportion, eu égard à leurs qualitez, de dureté, de moleſſe, d'élaſticité : or le ſecond Livre enſeigne à trouver les viteſſes des corps après le choc, & les directions qu'ils ſuivent.

La Statique ou la Mécanique des ſolides fait l'objet du quatriéme livre : elle enſeigne les rapports que doivent avoir les parties des machines afin qu'une force d'une meſure & d'un degré connu puiſſe faire équilibre avec telle autre force qu'on voudra lui oppoſer. L'on s'eſt appliqué à montrer en quoi conſiſte la *force relative* d'une puiſſance, & que l'on appelle auſſi *moment*. Le pere Dechales traite le même ſujet au commencement du premier Livre de ſa Mécanique : il rapporte & examine différens ſentimens des auteurs ſur ce point.

Dans le cinquiéme Livre qui eſt ſur l'Hydroſtatique, on examine l'équilibre qui eſt entre les parties d'une même liqueur qui eſt en répos. Cet équilibre réſulte de la tendance que la liqueur a à fluer & à ſe répandre ; de là vient la force qu'elle a pour preſſer également en tout ſens, laquelle peut ſe multiplier juſqu'au point d'être incomparablement plus grande que n'eſt le poids de la liqueur : non-ſeulement les parties d'une liqueur ſont en équilibre les unes avec les autres, mais elles peuvent encore ſoutenir les corps fermes, & les empêcher d'aller au fond. Les fluides peuvent auſſi preſſer par la force de reſſort s'ils en ont : cette force des fluides eſt très-grande, & l'on n'en connoît pas encore les bornes.

Dans le ſixiéme Livre qui eſt ſur l'Hydraulique, on cherche les loix des mouvemens des fluides, les viteſſes avec leſquelles les liqueurs ſortent de leurs réſervoirs, les produits que ces mêmes réſervoirs donnent, ou les quantitez de liqueur qui s'écoulent par les ouvertures, que l'on y fait ; la force avec laquelle les parties de la liqueur choquent les corps fermes qu'elles rencontrent à leur ſortie du réſervoir ou lorſqu'elles coulent dans un canal ; la réſiſtance que les fluides font aux corps en mouvement & pluſieurs autres effets que je ne détaille point ici.

La Phyſique-Mathematique peut conſiderer chaque eſpéce de mouvement en lui-même d'une maniere abſtraite & générale, ſans

en appliquer les principes à aucun ſujet particulier, & ſans égard aux circonſtances qui peuvent modifier, changer & altérer les effets que les forces devroient produire ſi elles étoient libres, & ſi agiſſant conformément à leur inſtitution & à leur nature, aucun empêchement ne troubloit leur action, c'eſt ainſi que l'on traite du mouvement dans les ſix Livres qui compoſent ce Volume; on peut le regarder comme une introduction à la Phyſique Mathematique générale, & comme devant ſervir de fondement à un autre Volume que j'ai deſſein de donner ſi le public ne déſaprouve pas ce premier eſſai: je me propoſe d'appliquer les principes établis dans ces ſix Livres à des ſujets curieux & intéreſſans, aux matiéres qui ſont d'uſage dans la ſociété & dans le cours de la vie; l'on aura occaſion de remarquer que la rigueur des démonſtrations géometriques n'eſt pas toujours d'accord avec les effets, par la raiſon que je viens de dire que les cauſes ſont ſouvent empêchées, & que divers obſtacles troublent leur action. Les différens traitez que ce ſecond Volume contiendra pourront ſervir d'introduction à la Phyſique Mathématique particuliere; les effets que l'on y détaillera joints aux principes qu'on va expoſer dans ce premier donneront une idée des phenomenes les plus remarquables de la nature & des ouvrages des arts qui ſont des dépendances de la Phyſique mathématique; ceux qui ſe contentent des connoiſſances ordinaires, & qui ne veulent pas ignorer tout-à-fait les cauſes prochaines des productions dont ils ſont les ſpectateurs continuels, y trouveront dequoi ſe ſatisfaire: s'ils ſe ſentent portez à aller plus loin, le chemin qu'ils auront fait ne leur ſera pas inutile, ils auront plus de facilité pour entendre les auteurs qui approfondiſſent davantage les matieres. On avertit ici que le ſecond Volume doit ſuppoſer la lecture du premier; mais le premier eſt indépendant du ſecond & peut en être ſéparé, il eſt complet dans ſon genre; & les principes y ſont expliquez auſſi amplement qu'ils doivent l'être dans un traite élémentaire du mouvement & de l'équilibre, ainſi rien n'oblige de joindre ce ſecond ouvrage au premier.

Il me reſteroit à citer les auteurs que j'ai lûs, & à leur faire honneur des lumieres que j'ai puiſées dans leurs écrits; je l'ai fait en différens endroits de ce Livre lorſque j'ai ſuivi la propre idée d'un auteur, & que je n'ai fait que la commenter; dans le gros de l'ouvrage en travaillant à un ſujet je me ſuis d'abord abandonné à mes refléxions, lorſqu'elles m'ont fourni des idées, & que j'ai trouvé de la facilité à les ſuivre, je les ai diſpoſées & les ai miſes

dans l'ordre qui m'a paru le plus convenable : lorſque j'ai été arrêté, & que je n'ai pû lever la difficulté à l'heure même, j'ai laiſſé repoſer la matiere, & je n'ai conſulté les Livres qu'après pluſieurs tentatives, lorſque je n'ai eu ni aſſez d'adreſſe ni aſſez d'habileté pour trouver par moi-même le denoument. Il me ſeroit bien difficile de reconnoître ce que j'ai emprunté de chacun ſi quelqu'un ſe trouve lezé de ce côté-là, c'eſt contre mon intention, il peut revendiquer ſans autre forme un bien qu'il croit lui appartenir.

Un traité du mouvement a une ſi grande correſpondance avec l'Aſtronomie, & l'Aſtronomie en a une ſi grande avec un traité de la *Sphere*, que ces deux traités enſemble peuvent être regardez comme une introduction à cette ſcience. Dans le traité que je préſente j'ai établi pluſieurs propoſitions qui y ont un rapport immédiat : ceux qui les liront & qui ont du goût pour l'Aſtronomie regretteront peut-être de n'avoir pas les ſecours néceſſaires pour ſe diſpoſer à apprendre les matiéres plus à fond : les mêmes perſonnes ſeront ſans doute bien aiſes que je leur indique deux ouvrages où ils trouveront de quoi ſatisfaire leurs deſirs ; ils tendent l'un & l'autre au même but, quoique par des voies différentes. Le premier eſt un traité de la Sphere par M. *Rivard* Profeſſeur de Philoſophie au Collége de Beauvais. L'auteur y ſoutient parfaitement la réputation d'être très-clair & très-méthodique, c'eſt le témoignage que les Journaux rendent de ſon ouvrage : il contient non-ſeulement les matiéres & les queſtions qui ſont expliquées dans les traités ordinaires de la Sphere, mais encore pluſieurs autres qui ſont non moins curieuſes qu'intéreſſantes ; en un mot l'on peut dire que cet écrit ne cede en rien aux élémens de Géometrie du même Auteur, leſquels ont mérité l'eſtime & l'approbation de ceux qui ſçavent de quel prix eſt la clarté dans un ouvrage de ce genre : ce ſont les élémens de Géometrie que j'ai cités dans les tables qui ſont à la fin de cet écrit. Le traité de la ſphere & des élémens de Géometrie ſe vendent *à Paris chez Jean Deſaint & Charles Saillant Libraire, rue Saint Jean de Beauvais.*

L'autre ouvrage que j'ai en vûe eſt un nouveau traité de *Trigonometrie rectiligne & ſphérique accompagné de tables des ſinus, tangentes & ſecantes en parties réelles ; des Logarithmes des nombres naturels depuis l'unité juſqu'à vingt mille ; & des Logarithmes des ſinus tangentes & ſecantes par Monſieur Depar-*

cieux Maître de Mathématiques, à Paris chez *Hyppolite-Louis Guerin & Jacques Guerin Libraires, rue Saint Jacques à Saint Thomas d'Aquin.* Cet ouvrage eſt dédié à l'Academie Royale des Sciences ; le jugement qu'elle en porte dans l'approbation qu'elle en a donnée, & que l'on lit à la tête du même ouvrage, eſt qu'il eſt *méthodique & utile.* On ſçait de quelle importance il eſt pour les calculs, & ſur-tout pour les calculs Aſtronomiques d'avoir des tables correctes ; on peut compter ſur la bonté & l'exactitude de celles que l'Auteur a fait imprimer ſous ſes yeux. Le même ouvrage contient encore un traité de Gnomonique. M. Rivard en fait auſſi imprimer un. Deux ouvrages ſur le même ſujet ne peuvent qu'éclaircir davantage les matieres lorſqu'ils ſont faits par des mains habiles.

REFLEXIONS
SUR LE MOUVEMENT
En forme de Diſſertation.

CEUX qui veulent entamer la matiere du Mouvement, ſont pour l'ordinaire arrêtez par certaines difficultez qui ſemblent d'abord ébranler la certitude de tout ce que l'on démontre ſur cette matiere. Comme les difficultez ſont ſérieuſes & qu'elles partagent les eſprits des plus grands Philoſophes, on a jugé qu'il étoit à propos de les applanir avant de propoſer aux Lecteurs les véritez que l'on a eu en vue d'établir dans cet Ouvrage. On expoſera d'abord les points ſur leſquels les Philoſophes prennet des partis différens, & l'on fera voir enſuite que cette diverſité de ſentimens n'infirme point la vérité des faits, & qu'elle ne préjudicie en rien à la certitude des regles que l'on donne; qu'ainſi la partie de la Phyſique qui traite du Mouvement, fournit des preuves inconteſtables de la certitude de ſon objet, de la vérité de ſes principes, & des conſéquences que l'on en tire.

Lorſqu'on ne conſidere le mouvement que d'une vue générale, rien n'eſt plus intelligible, rien n'eſt plus préſent à l'eſprit que la notion que nous en prenons d'abord; cependant lorſqu'on veut approfondir la choſe, & ſe former des idées préciſes, on ne voit qu'embarras de tous côtez. Si l'on veut définir le Mouvement, on ne ſçait comment s'y prendre; & après qu'on l'a défini, il eſt encore incertain ſi la définition convient aux Mouvemens particuliers & ſenſibles.

Suivant la définition la plus uſitée, *le Mouvement eſt le paſſage d'un corps d'un lieu en un autre, d'une partie de l'étendue dans une autre partie.* On croiroit peut-être que cette définition ſi claire en apparence devroit réunir tous les ſentimens; il eſt néanmoins vrai qu'elle eſt une ſource de diſputes qui ſelon toutes les apparences ne finiront pas ſitôt. En voici les motifs: les mots de *lieu, d'eſpace & d'étendue*, ſignifient des choſes très-différentes dans la bouche des Philoſophes: les uns diſtinguent entre *lieu & lieu, étendue & étendue.* Le lieu ſuivant eux eſt une partie de l'étendue pénétrable & immobile dans laquelle les corps ſe meuvent; on l'appelle *vuide*, parce que cette étendue peut être vuide de tout corps, & que même entre les corps qui y ſont placez, il y a actuellement des eſpaces vuides. Selon ces Philoſophes un corps eſt mû réellement lorſqu'il quitte un lieu immobile pour aller dans un autre qui eſt auſſi immobile; ces differens lieux ſont les parties de l'étendue pénétrable auxquelles le corps répond, elles ne peuvent être mûes ni changer de ſituation les unes à l'égard des autres, & elles gardent entr'elles eſſentiellement le même ordre, parce que de leur nature elles

ſont immobiles de même que l'eſpace dont elles ſont parties. Le lieu dont on parleici eſt appellé lieu *abſolu* ; c'eſt pour le diſtinguer d'une autre eſpece de lieu qu'ils appellent *relatif* : celui-ci eſt matériel & mobile, & il n'eſt point différent des corps environnans : c'eſt par rapport à ces deux ſortes de lieux qu'ils diſtinguent auſſi deux mouvemens, l'un *abſolu*, l'autre *relatif* : par le mouvement abſolu un corps parcourt une certaine longueur dans l'eſpace ou l'étendue pénétrable ; par le mouvement relatif, un corps change de lieu relatif & correſpond ſucceſſivement à différentes parties de la matiere : ces deux mouvemens peuvent être enſemble, en même-tems & en un même corps, ou ſe trouver l'un ſans l'autre. Imaginons que la terre tourne ſur elle-même d'Occident en Orient, tandis que l'eau d'une riviere coule vers le même côté, la riviere aura l'un & l'autre mouvement ; elle parcourra avec la terre & par ſon cours naturel un eſpace dans l'étendue immobile, & outre cela la même eau mouillera les parties du rivage, elle ſera donc mûe d'un mouvement abſolu en tant qu'elle répond ſucceſſivement aux parties de l'étendue pénétrable ; & d'un mouvement relatif parce qu'elle coule dans ſon lit. Concevons à préſent que cette riviere prend un cours oppoſé, & qu'elle coule vers l'Occident avec la même viteſſe qu'une partie du rivage tourne avec la terre vers l'Orient ; il eſt viſible que l'eau répondra aux mêmes parties de l'eſpace ; car ſi une portion de cette eau s'éloigne de 20 toiſes de l'endroit du rivage qu'elle mouille, cet endroit s'éloignera auſſi vers l'Orient de 20 toiſes de la partie de l'eſpace à laquelle il répond ; la portion d'eau qui s'eſt éloignée de 20 toiſes vers l'Occident, de l'endroit du rivage qu'elle mouilloit, correſpond donc toujours à la même partie de l'eſpace ; cette portion d'eau eſt donc mûe d'un mouvement relatif, puiſqu'elle s'eſt éloignée de ſon lieu relatif de 20 toiſes ; mais elle eſt réellement en repos parce qu'elle n'a pas changé de lieu abſolu : ainſi ſon mouvement n'eſt qu'apparent.

D'autres Philoſophes prétendent au contraire que tout lieu, toute eſpace, toute étendue eſt matérielle, & par conſéquent mobile ; qu'ainſi l'immobilité du lieu & de l'eſpace n'eſt néceſſaire ni pour l'éxiſtence du Mouvement, ni pour le diſcerner, ni pour en expliquer les propriétez : un corps eſt mû dès-là qu'il paſſe du voiſinage de certains corps au voiſinage d'autres corps, & qu'il quitte les uns pour ſe joindre à d'autres ; c'eſt pourquoi dans l'exemple précedent où l'on a ſuppoſé qu'une riviere coule directement vers l'Occident avec la même viteſſe que la terre tourne vers l'Orient, l'eau a un vrai mouvement, puiſqu'elle ſe ſépare du rivage & du fond ſur lequel elle coule : il n'eſt pas même néceſſaire pour le mouvement d'un corps qu'il quitte le voiſinage des corps qui le touchent immédiatement ; un bateau qui ſuivroit le courant de l'eau & qui ſeroit continuellement environné des mêmes parties du fluide, ne laiſſeroit pas d'être mû parce qu'il ſeroit partie d'un tout qui ſeroit en mouvement.

Suivant l'expoſé de ces deux ſentimens, il faudroit dire qu'un même corps eſt en mouvement & en repos, ce qui ſeroit contradictoire. Voilà une premiere difficulté : en voici une ſeconde qui eſt commune aux deux ſentimens. On regarde le Mouvement comme une modification, une maniere d'être qui affecte le corps qui eſt mû : or dans la définition du Mouvement il n'y

à rien qui faſſe connoître quelle eſt cette nouvelle maniere d'être qu'acquiert un corps lorſqu'il commence à être mû : car tous les attributs par leſquels on caracteriſe le Mouvement, tels ſont le lieu, l'eſpace, le changement de diſtance, &c. ne modifient point un corps, ils indiquent ſeulement certaines relations qu'il a aux differentes parties de l'eſpace ; quelle eſt donc cette nouvelle modification qu'un corps acquiert lorſqu'il commence à être mû ?

On avouera que ſi pour dire quelque choſe de certain ſur le Mouvement, il falloit éclaircir auparavant ce qu'il peut y avoir de vrai ou de faux dans ces opinions, il ſeroit à craindre qu'on ne bâtît une édifice ruineux ; mais on peut cultiver la ſcience du Mouvement ſans entrer dans les difficultez qu'on forme ſur ſa nature & ſur le lieu où il ſe fait : le mouvement préſente deux côtez, l'un éclairé, l'autre ténébreux : ſi dans le Mouvement on ſe contente de chercher & de développer certains rapports, ſoit de diſtance de viteſſe, de force, &c. on peut éviter l'erreur & marcher avec ſureté ; mais ſi l'on veut creuſer dans ſa nature & approfondir ſon eſſence, on s'enfonce dans des obſcuritez où l'eſprit a bien de la peine à ſe conduire. Telle eſt la condition de l'homme, il a l'art de trouver des rapports entre les choſes, lors même qu'il en ignore la nature & le fond. C'eſt pour faire appercevoir cette vérité à l'égard du ſujet dont il s'agit ici qu'on fait les réflexions ſuivantes.

On peut traiter du Mouvement d'une maniere abſtraite & purement idéale, mettant à part ſon exiſtence ; ou bien on le peut conſidérer comme exiſtant dans l'univers. 1°. Lorſque dans le Mouvement on fait abſtraction de toute conſidération phyſique, on peut ſuppoſer que l'eſpace dans lequel les corps ſont mûs eſt immobile, & déterminer le Mouvement abſolu avec toutes ſes circonſtances, par exemple, ſi deux corps ſont mûs ſur une même ligne ou s'ils en ſuivent de différentes, on peut ſuppoſer que les points de départ ſont immobiles, puiſque le repos eſt poſſible & que nous le concevons diſtinctement ; & dans cette ſuppoſition marquer les longueurs parcourues, les diſtances des corps, leur ſituation, le tems qui s'eſt écoulé, leurs viteſſes, &c.

2°. Si l'eſprit s'applique à connoître les mouvemens réels & ſenſibles tels qu'ils exiſtent dans l'univers, ce ſeroit trop entreprendre de vouloir déterminer le mouvement abſolu d'un corps, il faut ſe borner au Mouvement relatif, parce qu'il eſt le ſeul qui ſoit connu : car quand même on admettroit dans l'univers certains points fixes, nous n'en connoîtrions pas pour cela mieux le Mouvement abſolu, faute de pouvoir déterminer les relations de diſtance ou de proximité du mobile à l'égard de ces points : lorſque, par exemple, un bateau ſuit le fil de l'eau, qu'il s'éloigne de certains points du rivage, & qu'il s'approche de certains autres, on ne peut juger de ſon mouvement que par la quantité dont il s'eſt éloigné des uns & s'eſt approché des autres : les parties du rivage gardent entr'elles une ſituation fixe & permanente : ainſi la diſtance qui eſt entre le bateau & ces mêmes parties après un certain tems, eſt l'eſpace que le bateau a parcouru, c'eſt cet eſpace comparé au tems qui fait connoître le mouvement du bateau relativement au rivage ; mais ſon mouvement abſolu demeure inconnu, parce que divers autres mouvemens

qui, peut-être, nous ſont cachez, peuvent ſe combiner avec ce Mouvement relatif, & faire que le Mouvement abſolu ſoit plus ou moins grand que celui qui eſt connu par l'obſervation. On dira peut-être que le Mouvement relatif du bateau n'eſt pas plus connu que le Mouvement abſolu: car on peut ſuppoſer que le bateau eſt en repos, & que c'eſt le rivage qui s'éloigne du bateau; ainſi de ce que le bateau change de diſtance à l'égard de certaines parties du rivage, on ne peut pas en conclure qu'il eſt en mouvement.

Il faut convenir que dans tout mouvement, dans celui même qu'on nomme abſolu, le changement de diſtance eſt réciproque, car un corps ne peut s'éloigner du lieu qu'il quitte, que le lieu ne ſe trouve éloigné de tout autant du corps; il y a cependant cette différence entre le lieu abſolu & le lieu relatif, que le lieu abſolu à cauſe de ſon immobilité réelle ou ſuppoſée ne peut changer de place, & que le lieu relatif en change ou du moins en peut changer. Or c'eſt pour cela même, dira-t-on, que le changement de diſtance ne prouve point qu'un corps eſt mû, puiſque la portion de matiere qui eſt le lieu relatif du corps peut s'éloigner du corps, & le corps reſter en repos & n'être mû qu'en apparence.

On avoue qu'en pluſieurs occaſions on ne peut pas diſtinguer le Mouvement réel d'avec le Mouvement apparent, & qu'il arrive aſſez ſouvent que les choſes qui nous paroiſſent ſe mouvoir ne ſont point mûes, & qu'au contraire celles qui nous paroiſſent comme en repos, ne laiſſent pas d'être en mouvement; mais il eſt vrai auſſi qu'en pluſieurs rencontres il eſt aiſé de diſcerner la réalité de la ſimple apparence: ainſi ſi l'on jette une pierre en l'air, qui eſt-ce qui penſera que la pierre demeure en place & que c'eſt la terre qui recule & s'éloigne de la pierre, & que lorſque la pierre retombe, c'eſt la terre qui s'en approche de nouveau. Si une riviere ſe diviſe en pluſieurs bras, peut-on croire que les différens canaux où elle coule vont chercher l'eau: il y a donc pluſieurs occaſions où le Mouvement relatif peut & doit être attribué à certains corps excluſivement aux autres: pour lors on peut raiſonner du Mouvement relatif comme on feroit du Mouvement abſolu, s'il étoit connu, c'eſt-à-dire, qu'on peut déterminer les rapports des eſpaces parcourus, des temps & des viteſſes, &c.

Le ſeul cas qui peut faire quelque difficulté eſt donc celui où l'on n'a aucune regle pour diſtinguer les mouvemens réels des mouvemens apparens: or dans ces cas là même, s'il y a une loi qui regle les mouvemens qui donnent lieu aux apparences, on peut déterminer tous ces rapports avec la même certitude & la même préciſion que ſi les mouvemens réels étoient connus.

C'eſt ainſi que les Aſtronomes raiſonnant ſur des obſervations exactes, peuvent prédire pour quelque tems que ce ſoit, l'ordre, la ſituation & la diſtance réciproque des planetes, leurs viteſſes reſpectives, & leur rencontre; ils n'ont pas beſoin pour arriver à ces déterminations de diſtinguer les Mouvemens réels des Mouvemens apparens, le Mouvement abſolu du Mouvement relatif.

Les effets du choc ne dépendent pas non plus préciſément des Mouvemens propres des corps qui ſe choquent; pour prévoir ces effets, il n'eſt

pas

pas néceſſaire de connoître la juſte meſure de Mouvement que chaque corps a reçû : lorſqu'un Vaiſſeau échoue contre un rocher, pour ſçavoir quelle doit être la force du coup, il n'eſt pas néceſſaire d'être prévenu que c'eſt le Vaiſſeau qui va donner contre le rocher en repos, la ſecouſſe ſera la même, ſoit que l'on ſuppoſe que c'eſt le rocher qui demeurant attaché à la terre va rencontrer le Vaiſſeau comme ſuſpendu en l'air, ſoit que l'on diſe que le Vaiſſeau & le rocher ſe préviennent en allant l'un contre l'autre, ſoit que l'on penſe que c'eſt le rocher qui pourſuit le Vaiſſeau, ou le Vaiſſeau le rocher ; l'impreſſion du coup ſera, dis-je, la même ſi dans toutes ces hypothèſes, le Vaiſſeau & le rocher étant à égale diſtance l'un de l'autre, ils emploient le même tems pour s'approcher & pour s'appliquer l'un à l'autre.

Il eſt aiſé de conclure de tout ce qui vient d'être dit, qu'en matiere de Mouvement on peut s'aſſurer de la vérité des faits, & parvenir à des conſéquences certaines ſans diſcuter toutes les queſtions que les Philoſophes propoſent ſur la nature du lieu & du Mouvement, ſur ſa réalité ou ſon apparence.

Voici une troiſiéme difficulté qui roule ſur la cauſe du Mouvement. On ſçait par l'expérience, ou autrement, qu'un corps qui eſt en repos y demeure juſqu'à ce qu'une cauſe le déplace & le meuve : or les Philoſophes ne ſont pas non plus d'accord ſur la nature de cette cauſe. Lorſqu'un corps en choque un autre en repos, & que celui-ci eſt mis en mouvement, on eſt porté à croire que c'eſt le corps qui choque qui donne le mouvement au corps choqué : mais des Philoſophes élevant leur raiſon au-deſſus des ſens, ne peuvent ſe perſuader que la matiere étant deſtituée d'intelligence & de volonté puiſſe produire le Mouvement : les corps n'ont ni force, ni puiſſance, ni efficace pour produire quoique ce ſoit, c'eſt Dieu qui veut leur rencontre & le choc ; le choc actuel n'eſt qu'une cauſe occaſionelle qui détermine Dieu à produire le mouvement actuel conformément aux loix qu'il a établies.

D'autres Philoſophes expliquant l'expérience plus littéralement, veulent que le Mouvement ſoit une cauſe néceſſaire, par cela même qu'il eſt Mouvement, & que ſa force & ſon activité ſoient eſſentiellement attachées à ſon éxiſtence.

Ce n'eſt pas là encore tout. Ceux qui regardent les corps comme de véritables cauſes productrices du Mouvement, pouſſant leurs réflexions plus loin, éxaminent les différentes manieres dont les corps peuvent agir les uns ſur les autres, & ici ils ſe partagent : les uns prétendent qu'un corps ne peut agir ſur un autre que par impulſion, & par le contact, ſoit immédiat, ſoit médiat ; un corps, ſuivant eux, ne peut éxercer de force ni avoir d'action ſur un corps éloigné, ſi l'intervalle qui eſt entre deux n'eſt rempli d'autres corps qui tranſmettent ſon action juſqu'au corps le plus éloigné. Cependant d'autres Philoſophes d'une grande réputation, s'appuyant de l'expérience & de certaines obſervations, ſoutiennent que l'impulſion n'eſt pas le ſeul moyen établi pour la communication du Mouvement, l'attraction & la répulſion ſont des voies non moins certaines que l'impulſion : un corps peut agir immédiatement ſur un corps éloigné, le repouſſer plus loin, ou l'atti-

rer & l'approcher ſans l'interpoſition d'autre corps: lorſqu'un aiman attire du fer, ou qu'il repouſſe un autre aiman, il le fait par une action immédiate, les corps interpoſez, ſuppoſé qu'il y en ait, n'ont aucune part à cet effet.

Les Phyſiciens qui rejettent les puiſſances attractives, pour expliquer les mouvemens qu'on rapporte à l'attraction, ont recours à un fluide ſubtil qui remplit les eſpaces, & qui par ſa conſtitution particuliere produit les effets que l'on ne ſçauroit expliquer par l'impulſion des corps ſenſibles.

Pour prévenir les doutes que cette diverſité de ſentimens pourroit faire naître dans l'eſprit de ceux qui commencent à étudier la partie de Phyſique qui eſt l'objet de ce Livre, nous ferons des réflexions à peu-près ſemblables à celles que nous venons de faire. Nous pouvons être certains de l'exiſtence des effets, les déduire les uns des autres & les expliquer, quoique nous ne connoiſſions point la nature de leurs cauſes: la prodigieuſe différence qu'il y a entre les opinions des Phyſiciens prouve aſſez que l'ordre qui regne dans cet Univers eſt arbitraire de la part du Créateur. Dieu pourroit produire toutes choſes par lui-même ſans ſe ſervir pour cela des cauſes ſecondes, & comme il a pû en les créant choiſir un ordre entre pluſieurs pour les gouverner & les perpétuer, il eſt libre de changer le plan qu'il a ſuivi, & de faire dépendre les mêmes effets de cauſes entierement différentes de celles qu'il a établies. La connoiſſance d'un effet n'eſt donc pas eſſentiellement liée avec celle de la cauſe qui le produit, & ne dévoile point ſa nature particuliere. Lorſque Galilée fit des expériences ſur le Mouvement des corps peſans, qu'il s'appliqua à trouver la loi ſuivant laquelle ils ſont accélérez, il ne crut pas devoir faire entrer dans ſa Théorie la recherche de la cauſe & de la nature de la peſanteur: ſa Théorie a néanmoins été trouvée ſi conforme aux phénomenes, qu'elle a été adoptée par tous ceux qui après lui ont écrit ſur le Mouvemement inégal des corps peſans; & ce qui eſt bien digne d'être remarqué, c'eſt que ce Mouvement eſt comme la meſure commune des autres; car c'eſt par rapport au Mouvemen de peſanteur qu'on les eſtime. La Théorie de Galilée qui explique la voie que la nature ſuit dans l'accélération des corps peſans, eſt donc indépendante des opinions particulieres des Philoſophes, & des ſyſtêmes des Phyſiciens ſur la vraie cauſe de la peſanteur.

Il n'y a aucun doute que notre Science ne fût plus parfaite ſi on pouvoit joindre la connoiſſance des cauſes à celle des effets: elle ſeroit plus étenduë, & plus relevée dans ſes principes, puiſqu'elle déduiroit les effets de leurs vraies cauſes, & que par une gradation non interrompue elle remonteroit des effets aux premieres cauſes, & que des premieres cauſes elles parviendroit enſuite juſqu'aux effets: elle ſeroit plus noble dans ſon objet, puiſqu'elle nous dévoileroit la vraie ſtructure de l'Univers, les principes qui conſtituent chaque corps, & les qualitez qui leur ſont propres: ainſi la Théorie de Galilée en ſeroit plus belle; parce que la loi qui regle le mouvement des graves auroit une liaiſon évidente avec le principe interne qui les fait deſcendre. Mais on ne peut pas dire que la partie de Phyſique dont l'objet eſt de pénétrer dans les premieres cauſes, ait été portée juſqu'à préſent à un degré d'évidence capable de convaincre & de diſſiper tout doute. Lors donc qu'on obſerve dans la nature quelque phénomene dont on ignore la cauſe,

& que néanmoins par quelque Syſtême on trouve moyen de lui en aſſigner une, il ne faut pas faire tellement dépendre l'effet de la cauſe, que la cauſe étant miſe en diſpute, le doute retombe également ſur l'effet & ſur les conſéquences que l'on en peut tirer : le but d'un Syſtême eſt de déduire des phénomenes connus & d'en trouver les cauſes ; le défaut du Syſtême ne peut donc rien ôter à la certitude du phénomene obſervé, ni à celle des conſéquences qui en ſuivent.

Mais ſi dans la Science du Mouvement on peut ſe paſſer de la conſidération des cauſes, que deviendra l'axiome ſi trivial & d'un uſage ſi fréquent : ſçavoir, *Que les effets ſont proportionnels aux cauſes* ?

Lorſqu'on dit que la certitude des phénomenes & des conſéquences qui en ſuivent, n'eſt pas eſſentiellement liée avec l'éxamen des cauſes, on ne prétend pas exclure toute cauſe : dans la nature les effets tiennent les uns aux autres ; & par cette dépendance réciproque ils influent auſſi les uns dans les autres. Lorſqu'un corps peſant tombe il y a certainement un principe qui le pouſſe & qui le fait deſcendre ; ce principe produit un certain mouvement, & donne au corps la viteſſe qu'il n'avoit point ; le corps rencontre l'air & le déplace ; l'air ainſi déplacé fait impreſſion ſur les corps qu'il environne. L'on voit donc qu'un effet qui vient d'être produit peut devenir cauſe & produire lui-même d'autres effets : la nature particuliere des cauſes peut bien être cachée, mais rien n'empêche que leur efficace, leur puiſſance, leur action ne ſe manifeſteſte, & que nous ne puiſſions comparer les effets par le rapport connu des forces que ces cauſes éxercent : or c'eſt dans ce ſens que l'on dit que les effets ſont proportionnels aux cauſes : les cauſes dont il s'agit dans l'axiome, ſont les cauſes prochaines & immédiates ; ou ſi l'on l'entend des premieres cauſes, le ſens regarde leur action, & non leur nature.

On dira enfin que ſelon un grand nombre de Philoſophes les corps n'ont ni vertu, ni puiſſance, ni efficace, ni action, & que c'eſt Dieu qui opere tout, que les corps ne ſont que des cauſes apparentes ; quainſi c'eſt en vain qu'on leur attribue des effets, & que c'eſt ſans raiſon qu'on prétend que ces effets leur ſont proportionnels.

Quelque parti que l'on prenne ſur ce point, il eſt certain que les corps influent dans les effets, & qu'ils concourent à les produire. Si c'eſt Dieu qui fait le choc & qui donne le mouvement au corps qui eſt choqué en repos, il le fait dépendamment des maſſes & des viteſſes, & c'eſt ſur ces circonſtances qu'il regle ſon action, & la grandeur de l'effet qu'il produit : or ſi on ne fait attention qu'à l'effet & non à la maniere dont il eſt produit, on l'aura également ſi l'on ſuppoſe que les corps éxercent une vraie action les uns ſur les autres, puiſque dans l'une & l'autre hypothèſe l'effet eſt déterminé par les mêmes circonſtances : il arrive même que l'on regarde fort ſouvent cet aſſemblage de circonſtances comme la cauſe de l'effet produit, parce qu'il exprime parfaitement la grandeur de ſon action, laquelle eſt proportionnelle à l'effet. De-là vient que quelque ſentiment que l'on embraſſe ſur la nature des cauſes, on parvient aux mêmes véritez, les conſéquences ſont éxactement les mêmes ; & les réſultats des calculs ſe rapportent de point en point.

AVERTISSEMENT.

COMME le but de cet Ouvrage eſt de faciliter aux jeunes gens l'étude des Mécaniques & de la Phyſique, j'ai cru que je leur ferois plaiſir de marquer dans quel ordre ils peuvent le lire pour une premiere fois: les matieres n'y ſont pas tellement liées & dépendantes les unes des autres, que pour la commodité de ceux qui ne veulent pas les embraſſer toutes dans une premiere lecture, & de ceux qui n'en ont pas le tems, on ne puiſſe en faire un certain choix dans chaque livre pour en compoſer comme un autre corps de principes moins étendu que l'ouvrage entier. Je vais indiquer de ſuite pour chaque Livre les Propoſitions auxquelles ils peuvent s'arrêter pour un premier commencement: elles ſuppoſent ſeulement la connoiſſance de quelques propoſitions d'Arithmétique & de Géométrie contenues dans une table qui eſt à la fin de l'Ouvrage.

Livre premier. Dans le titre *de la Viteſſe* il n'y a rien qui puiſſe arrêter un commençant juſqu'au titre *de la Viteſſe reſpective.* Si les Corollaires 4. 7. 8. demandent trop d'attention pour être entendus dans une premiere lecture, on pourra les paſſer. Il ſeroit néanmoins bon d'apprendre le ſeptiéme, afin d'entendre l'article 15 qui en dépend. Ceux qui ſe diſpoſent à étudier l'Aſtronomie pourront revenir dans la ſuite au titre de la viteſſe reſpective. Quoiqu'il puiſſe arriver qu'on ne faſſe pas une étude particuliere des choſes qui y ſont traitées, cela n'empêche pas qu'on ne liſe les définitions & les propoſitions les plus aiſées. On paſſera de-là au titre *de la quantité de Mouvement*, & l'on continuera la lecture juſqu'à la propoſition cinquiéme, art 127. La propoſition quatriéme eſt d'un grand uſage dans le ſecond Livre pour démontrer le rapport des eſpaces parcourus par un corps qui eſt mû d'un mouvement uniformément acceléré. La compoſition & la décompoſition des mouvemens & des forces ſont fréquentes dans la nature, & l'on ne ſçauroit ſe diſpenſer de les étudier: on pourra donc lire ce qu'il y a ſur cette matiere juſqu'à l'article 180. La connoiſſance des forces centrales eſt néceſſaire à ceux qui veulent prendre une idée des cauſes qui meuvent les corps céleſtes, ils pourront lire depuis l'art. 202 juſqu'à l'art. 225, ils y joindront l'art. 228 qui contient la fameuſe regle de Kepler. La queſtion des forces vives eſt devenue célebre, & elle partage les ſentimens des Sçavans: ceux qui voudront ſe mettre au fait de la diſpute pourront lire ce qu'on en a écrit.

Livre ſecond. On pourra continuer la lecture depuis l'art. 1 juſqu'à l'art. 16 *du centre de gravité*, & aller enſuite à l'article 46 *du rapport des poids de differentes matieres* juſqu'à l'article 84. On pourra paſſer les articles 68, 69. On pourra joindre aux Propoſitions précedentes la lecture des 3 premiers Problêmes, obmettre le troiſiéme Chapitre, ou en lire ſeulement juſqu'à l'article 107. Pour ce qui eſt du quatriéme Chapitre ſi on ſe contente de prendre une idée du mouvement accéleré & retardé des corps qui ſont mûs ſur des plans inclinez, ſans pouſſer juſqu'au mouvement des pendules, il ſuffira de lire juſqu'à l'art. 183. Sur quoi on avertira que pluſieurs propoſitions ſont démontré Géométriquement & en nombres, on pourra d'abord s'arrêter à la démonſtration en nombres.

Livre troiſiéme. Il n'y a rien de particulier à obſerver ſur le troiſiéme Livre, ſinon que l'on peut ometre toutes les propoſitions qui ſont prouvées par la Géométrie, & pluſieurs autres que l'on ne trouvera point néceſſaires pour le but qu'on ſe propoſe. Il eſt néanmoins bon de ne pas ometre la propoſition de l'article 50. On pourra auſſi paſſer depuis l'article 126 inclusivement juſqu'à l'article 144 *de la réflexion des corps* : on lira cet article & les ſuivans juſqu'à lalinéa *comme* de l'article 165, & l'on terminera la lecture du livre par les articles 166, 167, 168.

Livre quatriéme. Dans le quatriéme Livre on pourra lire la premiere démonſtration *du levier* avec les propoſitions qui la précedent & qui y ſervent de préparation, & paſſer les Corollaires qui ſont propres à cette premiere démonſttation & au principe de mécanique de M. Deſcartes : il faudra voir enſuite la premiere démonſtration de la propoſition quatriéme art. 51, & les principaux Corollaires qui ſont communs aux trois démonſtrations du levier, & à la propoſition de l'article 51. On pourra voir enſuite tout ce qu'il y a ſur la *Poulie.* Dans le *Treuil* il ſuffira de lire juſqu'à l'article 103. On pourra prendre enſuite une notion de ce que l'on appelle *moment* ou *force relative* d'une puiſſance article 115, juſqu'à l'article 125. On paſſera tout de ſuite *au plan incliné*, & il ſuffira de prouver la proportion de l'article 214 par la premiere démonſtration. Voir après cela la premiere Démonſt. de la propoſition de l'art. 220, & les principaux Corol. qui ſont communs aux trois démonſtrations. On verra ce qu'il y a ſur *la vis.* On pourra terminer là ce qu'il y a à voir pour une premiere fois dans le quatriéme Livre.

Livre cinquiéme. Dans le cinquiéme Livre on pourra paſſer les articles qu'on va indiquer. 1°. Depuis l'article 33 juſqu'à 47, & la remarque de l'art. 50; ce qui regarde l'équilibre des liqueurs dans les vaiſſeaux ſouples. 2°. Depuis l'article 103 juſqu'à l'art. 112. 3°. Depuis l'art. 158 juſqu'à la fin du Livre, & dans le ſurplus on pourra choiſir ce qui paroîtra le plus convenable & le plus digne d'être appris.

Livre ſixiéme. Dans le ſixiéme Livre on pourra lire juſqu'à l'article 19, ou bien continuer la lecture juſqu'à l'article 41 ; paſſer de-là à l'article 90. Le mouvement d'une liqueur dans des ſiphons n'a rien de difficile, ainſi ſi on le juge à propos on pourra lire le commencement du troiſiéme Chapitre juſqu'à l'article 119, & depuis l'article 137 juſqu'à l'article 160, & depuis 166 juſqu'à 178. Les matieres que l'on vient d'indiquer n'occupent guere plus de 240 pages : on peut même les réduire à un moindre nombre, parce que dans les propoſitions fondamentales on peut paſſer pluſieurs Corollaires, & que d'ailleurs il y a un grand nombre d'endroits qui n'ont pas beſoin d'être approfondis, & qui ne demandent qu'une ſimple lecture.

Dans le premier & le ſecond Livre on a été aſſez exact à citer les endroits qui ſervent de preuve & de fondement à la Démonſt. mais les citations ſont moins fréquentes dans les Livres ſuivans, parce qu'on a ſuppoſé que le Lecteur ſe rendroit les matieres plus familieres à meſure qu'il en verroit davantage, & qu'il étoit inutile de multiplier les citations qui occupent une partie de l'attention, & qui rendent en quelque ſorte l'eſprit pareſſeux. Lorſqu'un nombre eſt ſeul entre deux crochets, il indique l'art. cité du Livre courant. Ainſi ſi on trouve, par exemple, dans le ſecond Livre cette expreſſion (20), elle avertit qu'il faut conſulter le 20 art. de ce Livre. Mais ſi on trouve celle-ci (*Liv.* I. 4), il faut voir le 4 article du premier Livre.

AVIS

Pour les trois Fig. de la planche 5e du quatriéme Livre.

POUR mettre ces trois Figures dans la ſituation convenable lorſqu'on veut s'en ſervir, 1°. *Il faut lever la partie où le poids* R *eſt répréſenté perpendiculairement au plan de la planche*, *& tenir la partie* MONS *qui eſt la plus grande & la plus apparente de toutes*, *parallelement au même plan ; & afin de l'appuyer & lui donner un pied qui la ſoutienne dans cette ſituation horizontale, il faut relever ou plier trois parallelogrammes rectangles qui ne ſont déſignez par aucune lettre, & qui n'ont aucune diagonale, de maniere qu'ils ſoient perpendicul. au plan de la planche. A l'égard des parallellogrectangles qui ſont marquez avec des lettres & qui ont des diagonales, il faut les tenir auſſi dans une ſituation perpendiculaire au plan de la planche, chacun ſelon le pli qu'il a reçu.* 2°. *Dans la Fig.* 38, *il faut concevoir que le parallelogramme* BDSE *eſt ſitué parallelement aux autres prallelogrammes, & que ſa hauteur* SD *eſt au-deſſous du plan* MONS, *l'extrêmité* D *étant la plus baſſe.* 3°. *Dans la même Fig.* 38, *il faut que la corde* CH *ſoit perpendiculaire au plan* MONS ; *& dans les Figures* 37, 39, *il faut concevoir que cette corde eſt auſſi perpendiculaire à* MONS. 4°. *Aux Figures* 37, 38, 39, *le plan* TZ *eſt le même que le plan* PGMQ.

EXPLICAT. DES SIGNES DONT ON S'EST SERVI.

CE ſigne + ſignifie *plus*, & eſt la marque de l'addition, cet autre — ſignifie *moins*, & eſt la marque de la ſouſtraction. Ainſi $a+b.\ 3+4$, ſignifie qu'il faut ajouter 4 à 3, & la grandeur exprimée par la lettre *b* à la grandeur exprimée par la lettre *a*. De même $5-2$ ſignifie qu'il faut retrancher 2 de 5. Ce ſigne = placé entre deux grandeurs, ſignifie que la premiere eſt égale à la ſeconde.

Ce ſigne > placé entre deux grandeurs, ſignifie que la premiere eſt plus grande que la ſeconde. Mais ce ſigne < placé entre deux, ſignifie que la premiere eſt moindre que la ſeconde.

Ce ſigne × marque qu'il faut faire une multiplication : ainſi 4×3 fait connoître qu'il faut multiplier 4 par 3.

Ce ſigne $\sqrt{}$ indique l'extraction d'une racine : ainſi $\sqrt{18}$, fait connoître qu'il faut extraire la racine quarrée de 18.

Changemens & Additions.

Livre 1 *page* 19, *au lieu de l'article* 61, *il faut lire ce qui ſuit.* Lorſque le mobile B qui va moins vîte doit paſſer le point de concours C avant le corps A, pour lors ils ſe trouvent après avoir paſſé l'un & l'autre le nœud, premierement à leur plus courte diſtance, enſuite ſur la perpendiculaire à la route du corps A, & enfin ſur la perpendiculaire à la route du corps B Fig. 8, 10, 11. Mais ſi le mobile A qui va plus vîte doit paſſer le point de concours C avant le mobile B, pour lors les mobiles ſe trouvent premierement ſur la perpendiculaire à la route du corps B, enſuite ſur la perpendiculaire à la route du corps A, & enfin à leur plus courte diſtance Fig. 9, c'eſt-à-dire que ces circonſtances arrivent dans un ordre renverſé.

Pag. 20, *lig.* 19, aprés DS, *il faut lire ce qui ſuit :* or ſi Fig. 8 & 10 on ajoute DS à AD, que Fig. 9 on l'en retranche, & que Fig. 11. on retranche AD de DS, on aura AS. Si Fig. 7, 8, 9 & 10, on retranche FS de AS, & que Fig. 11 on retranche AS de FS, le reſte AF ſera connu. Si Fig. 8, 10 & 11, on ajoute S*f* à DS, ou que Fig. 9 on l'en retranche, la ſomme ou le reſte D*f* ſera connu. Cela fait, &c.

TABLE DES PRINCIPALES FAUTES.

Page 6, *ligne* 34, des eſpaces 10 & 5, *liſez* des tems ſera.

Pag. 36, *lig.* 22, $\frac{Ve}{T}$ *liſez* $\frac{Ve}{t}$.

Pag. 44, *lig.* 6, BE . BC *liſez* DE . BC.

Pag. 48, *lig.* 1, variez, *liſez* arrivez.

Pag. 92, *lig.* 11, $\overrightarrow{ae}$, *liſez* $\overrightarrow{ac}$.

Pag. 97, *lig.* 30, ne, *liſez* en.

Pag. 98, *lig.* 9, FGN, *fgn*, *liſez* FGR, *fgr*.

Pag. 99, donne l'arc LM, *liſez* LM.

Pag. 118, *lig.* 28, nombre pair, *liſez* nombre pairement pair.

Pag. 120, *lig.* 40, centre de gravité C, *liſez* centre de gravité *e*.

Ibid. lig. 1, GVO, *liſez* GYO, il faut ſuppléer la lettre Y qui doit être à l'interſection de DO & de AG.

Pag. 160, *ligne avant derniere* AD, *liſez* BD.

Pag. 162, *lig.* 18, du ſujet, *liſez* du jet.

Pag. 164, *lig.* 27, & à AM, *liſez* eſt à AM.

Pag. 167, *lig.* 13, ou, *liſez* au.

Pag. 192, *lig.* 25, CBN, *liſez* LBN.
Ibidem lig. 39, LM, *liſez* par LM.
Pag. 198, *lig.* 11, verticale EC, *liſez* par la verticale EC.
Pag. 199, à la marge Fig. 30, 38, *liſez* 36.
Pag. 223, *lig.* 17, d'où il s'enſuit, *liſez* d'où il ſuit.
Pag. 229, *lig.* 37, AV——Av=BV, *liſez* Bv.
Ibidem même ligne, A. B :: V.V——v, *liſez* v.V——v.
Pag. 237, *lig.* 12, ſi on multiple, *liſez* ſi on multiplie.
Pag. 240, *lig.* 18, & au, *liſez* eſt au.
Pag. 241, *lig.* 19, exprimées EC, FC, *liſez* par EC, FC.
Pag. 257, *lig.* 13, des trois, *liſez* des trois cas.
Pag. 269, *lig.* 24, arées, *liſez* arrêtes.
Pag. 280, *lig.* 8, CF, *liſez* LF. *Ibid. lig.* 10 CF, *liſez* BF.
Pag. 311, *lig.* 3, EA, *liſez* FA.
Ibidem lig. 4, FO, *liſez* FD.
Pag. 321, *lig.* 15, 16 & 19 FN, *liſez* FH. *Ibid. lig.* 18, EFN *liſez* EFH.
Pag. 324, *lig.* 4, centre F, *liſez* centre *o*.
Pag. 332, *lig.* 6, ED, *liſez* FD.
Pag. 340, *lig.* 6, ceculer, *liſez* reculer.
Pag. 344, *art.* 131, *à la marge* Fig. 40, *liſez* Fig. 40, 41.
Pag. 347, *lig.* 25, des moyens, *liſez* des momens.
Pag. 348, *lig.* 39, $R=\frac{N\,Q}{I}$ *liſez* $\frac{n\,Q}{I}$.
Pag. 353, *lig.* 23, F. P, *liſez* F. R.
Pag. 356, *lig.* 18, NG. NE, *liſez* MG. ME.
Pag. 369, *lig.* 39, ralleles, *liſez* paralleles.
Pag. 369, *lig.* 40, *ſ*, *liſez f*.
Pag. 370, *lig.* 5, *l c*, *liſez l* C.
Ibid. lig. 10, *omf of*, *om*, *liſez* Omf, Of Om.
Pag. 376, *lig.* 38, dans le d'équilibre, *liſez* dans le cas d'équilibre.
Pag. 383, *lig.* 30, pirigé, *liſez* dirigé.
Pag. 384, *lig.* 11, LH, *liſez* SH,
Pag. 402, *lig.* 16, hauteur, *liſez* baſe.
Pag. 421, *lig.* 11, NGx, *liſez* NG.
Ibid. à la marge Fig. 67, *liſez* Fig. 74.
Pag. 426, *lig.* 7, ſoixante dix-huitiéme, *liſez* ſoixante huitiémes.
Pag. 518, *ligne avant derniere* FB, *liſez* EB.
Pag. 562, *lig.* 18, FS, *liſez* FE.
Pag. 582, *à la marge* Fig. 11, *liſez* Fig. 12.
Pag. 596, *à la marge art.* 151, Fig. 20, 21, *liſez* Fig. 19, 21.
Article 2 de l'Ellipſe, *lig.* 39, au triangle, *liſez* au double du triangle.

PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Physique.

LIVRE CINQUIE'ME.
DE L'HYDROSTATIQUE.

1. TOUS les fluides qui tombent sous les sens pesent, l'air que l'on a cru leger pendant un fort long-tems n'est point exempt des impressions de la pesanteur ; les fluides tendent donc à descendre & à s'approcher du centre de la terre aussi-bien que les corps fermes. Ce n'est pas là tout, les parties d'un corps solide ne peuvent être mues les unes sans les autres, parce qu'elles sont étroitement liées ensemble ; il n'en est pas de même des corps fluides, leurs parties se divisent à la plus petite impulsion, & quelques-unes peuvent être mues, quoique le gros de la masse demeure en repos ; de-là vient que si l'on veut contenir un fluide pesant, & empêcher que les parties qui le composent ne se séparent, & qu'en changeant ainsi de figure, il ne se répande, il faut opposer la résistance d'un vaisseau à l'action de la pesanteur. Imaginons qu'un cylindre de glace qui s'appuie par sa base sur un plan horizontal, devient fluide tout à coup, l'on

conçoit qu'il ſera écraſé par ſon propre poids, & que les parties inférieures étant chargées par les ſupérieures, jailliront tout autour le long du plan, ou bien elles couleront vers l'endroit le plus bas. Mais ſi on met le cylindre dans un vaiſſeau dont il rempliſſe exactement la capacité, il eſt certain que la glace venant à ſe fondre, l'eau conſervera la figure cylindrique, parce que les parois ou côtez du vaiſſeau, l'empêcheront de couler. Si au lieu de ne ſuppoſer qu'une colomne de glace, on ſe répréſente qu'il y en a pluſieurs à côté les unes des autres qui ſe touchent dans toute leur hauteur, il eſt aiſé de juger que ſi elles recouvrent leur fluidité & qu'elles rempliſſent l'intérieur du vaiſſeau, il n'arrivera aucun changement à leur premiere figure, car la colomne du milieu ne pourra point s'affaiſſer parce qu'elle ſera ſoutenue par celles qui l'environnent immmédiatement, celles-ci le ſeront par d'autres, & enfin les plus éloignées de celle du milieu, ſeront retenues par les parois du vaiſſeau. D'où l'on voit que le poids de chaque colomne verticale eſt un agent qui tend à la diſſoudre & à faire couler les parties hautes vers le lieu le plus bas; mais les colomnes environnantes qui ont la même tendance, rendent cet effort inutile. De-là naît l'équilibre entre les parties d'un même fluide. Concevons encore une fois que l'eau d'un baſſin eſt gelée; ſi on met ſur cette glace divers corps, du fer, du bois, de la cire, du liege, &c. elle réſiſtera à tous par ſa dureté; mais ſi elle ſe fond, l'on ſçait que le fer ira au fond, que le bois pourra s'enfoncer entierement, & nâger entre deux eaux, & que le liege & la cire flotteront à ſa ſurface: d'où l'on voit encore que les parties d'un fluide agiſſent non ſeulement les unes ſur les autres, mais qu'elles peuvent faire auſſi équilibre avec les corps fermes. *L'on nomme hydroſtatique la ſcience qui meſure & détermine les preſſions que les fluides peſans exercent les uns ſur les autres, & contre les corps ſolides dans le cas de l'équilibre.* Dans ces derniers tems on a découvert que certains fluides agiſſent par leur peſanteur & par le reſſort; & parce que l'air eſt le plus remarquable de tous, l'on a nommé *Aërometrie* la partie qui traite des fluides peſans & élaſtiques. Cependant pour ne pas multiplier les traitez, & à l'exemple d'auteurs célebres, on donnera à l'hydroſtatique plus d'étendue: on la conſiderera comme une ſcience qui a pour objet l'équilibre des fluides entr'eux & avec les corps ſolides, ſoit que cet équilibre ait pour principe la peſanteur ou le reſſort, ou même quelque autre cauſe. Il y a des auteurs qui diſtinguent entre corps

fluide & *liquide* ou *liqueur*. Ils appellent liqueur tout corps dont la ſurface s'étend & ſe met de niveau ; comme, l'eau, l'huile, le vin, &c. Ils appellent ſimplement fluides ceux qui n'ont pas cette propriété, comme l'air, la flamme, &c. Il eſt vrai que la flamme ne ſe met pas de niveau, parce que ſes parties ſont dans une agitation continuelle ; à l'égard de l'air rien n'empêche que ſa ſurface ſupérieure, celle qui termine l'athmoſphere, ne ſoit de niveau, à moins que la chaleur, les vents, ou quelque autre cauſe ne troublent l'équilibre des parties. Quoi qu'il en ſoit de cette diſtinction, elle peut être commode. On diviſe ce Livre en trois Chapitres ; dans le premier on expliquera l'équilibre des liqueurs entr'elles ou des fluides peſans ; dans le ſecond l'équilibre des liquides avec les ſolides ; dans le troiſiéme, l'équilibre des fluides élaſtiques.

CHAPITRE PREMIER.

De l'équilibre des liqueurs, ou des fluides par leur peſanteur.

2. POur expliquer l'équilibre des liqueurs par ſes cauſes prochaines, il ſeroit néceſſaire d'entrer dans la nature de la fluidité, ou plutôt dans les principes mécaniques qui la conſtituent ; car cet équilibre eſt tout fondé ſur une proprieté ſinguliere, commune à tous les fluides, & qui eſt atteſtée par l'expérience. Si on remplit un vaiſſeau de quelque liqueur, qu'on preſſe la ſurface avec un piſton qui ferme exactement l'ouverture afin que la liqueur ne fuie point, la preſſion ſera communiquée également en tout ſens, & aucune partie du corps liquide ne ſera preſſée ni plus ni moins que les autres. (On a ſeulement égard à la preſſion cauſée par le piſton, & on fait abſtraction de celle de la peſanteur) : or cette égalité de preſſion en tout ſens, émane néceſſairement de la fluidité, & en eſt une dépendance. Il ne faut donc pas eſpérer de pouvoir découvrir toutes les cauſes prochaines qui concourent à l'équilibre des liqueurs, ſi l'on ignore les principes mécaniques qui conſtituent la fluidité. De ce nombre ſont la figure & la groſſeur des parties, leur ſituation les unes à l'égard des autres ; leurs qualitez, par exemple, la moleſſe, la dureté, la maniere dont la preſſion cauſée ſur les unes, ſe tranſmet aux autres, &c.

3. Remarque. Sans entrer dans aucun examen de la fluidité, on pourroit à l'imitation du grand nombre des auteurs qui ont écrit ſur l'hydroſtatique, ſuppoſer tacitement ou en termes exprès, que les fluides ſe compriment ou ſont preſſez également en tout ſens; mais parce que ce principe peut être éclairci & même prouvé juſqu'à un certain point, il ne ſera pas hors de propos de faire quelques réflexions ſur ce ſujet, avant de traiter le point principal qui eſt l'equilibre des liqueurs.

Examen de la fluidité et de la propriété que les fluides ont de ſe comprimer également en tout ſens.

4. La plûpart des auteurs qui ont raiſonné ſur la fluidité, ont compoſé les fluides de parties très-petites, dures, liſſes ou propres à gliſſer ſans être retardées par l'âpreté de leur ſurface & toutes de figure ſphérique. 1°. Les parties des fluides ſont dures, car la fluidité eſt un phenomene qui a une cauſe & ſes principes : or ſuppoſer que les parties des fluides ſont molles ou fluides elles-mêmes, c'eſt-à-dire, qu'elles cedent & ſe déplacent au moindre effort, c'eſt rendre la fluidité un effet primitif & indépendant de tout élément & de tout principe; d'ailleurs on verra bientôt que les fluides peuvent être compoſez de parties dures. La ſuppoſition qu'on vient de faire eſt donc fondée en raiſon. 2°. On peut penſer que les fluides ſont compoſez de parties qui ont la figure ſphérique; car il faut accorder l'extrême mobilité des fluides avec la figure des mêmes parties : or il eſt aiſé de juger que la figure ſphérique étant parfaitement uniforme dans toutes ſes parties, eſt la moins embarraſſante & la plus propre au mouvement : c'eſt pour une raiſon ſemblable que les parties des fluides doivent être petites, & avoir leur ſurface liſſe & polie.

5. M. Gullielmini prouve que ſi l'on diſpoſe pluſieurs globules peſans dans un certain ordre, chacun d'eux eſt également preſſé ſuivant la direction verticale, l'horizontale & même ſuivant l'oblique. On ne s'arrête point à décrire cette diſpoſition particuliere, parce qu'elle eſt arbitraire, & qu'il eſt plus que probable que les globules qui compoſent les fluides, en ont une différente; car cette diſpoſition eſt telle, que ſi on conſidere pluſieurs de ces globules ſur un plan horizontal, ils y ſont arrangez de maniere que les eſpaces vuides qu'ils laiſſent entr'eux, ont quatre côtez & quatre angles; & ſi on conſidere ces mêmes globules ſur un plan vertical ou incliné à l'horizon, les eſpaces qu'ils laiſſent entr'eux, ſont triangulaires. Cela étant, il eſt viſible que ſi

les globules étoient diſpoſez de maniere que les eſpaces vuides fuſſent triangulaires dans tous les ſens, ils occuperoient un moindre eſpace : or les parties des fluides peſans ſe diſpoſent avec le tems par l'effort de la peſanteur ou par les ſecouſſes qu'ils reçoivent, de maniere que l'eſpace qu'ils occupent eſt le plus petit ; l'arrangement qu'on leur donne n'eſt donc point celui qu'ils ont dans la nature. D'ailleurs des globules durs ne peuvent être touchez par d'autres globules qu'en un certain nombre de points, ils ne peuvent donc être pouſſez que ſuivant un certain nombre de directions : or les fluides ſont preſſez & preſſent également en tout ſens ; les conditions ſuppoſées ſont donc inſuffiſantes pour expliquer l'égalité de preſſion en tout ſens.

6. On obſerve dans les liqueurs une propriété dont on peut déduire, ce ſemble, l'égalité de preſſion dont il s'agit. 1°. Si on verſe d'une liqueur par petites gouttes, elles imitent la figure ronde ; & ſi elles ne s'attachent pas à la ſurface ſur laquelle elles ſont poſées, cette figure approche d'autant plus de la ſphérique, que chaque molecule eſt plus petite. 2°. Les particules qui compoſent une goutte, ſont adherentes les unes rux autres ; & ſi on preſſe la goutte pour lui faire perdre ſa convexité, elle ſe rétablit auſſitôt qu'on la laiſſe en liberté, de même qu'un corps à reſſort reprend ſa premiere figure lorſque la compreſſion finit. On peut faire cette expérience ſur toutes les liqueurs, un peut plus difficilement ſur l'huile, parce qu'elle s'attache davantage. 3°. Les particules d'une goutte de liqueur ſont non-ſeulement adhérentes les unes aux autres, mais il y a une force qui les tient ainſi unies, puiſque ſi on ceſſe de preſſer la goutte, elle reprend ſa premiere convexité. 4°. Les liqueurs s'évaporent en molecules rondes, les brouillards & la roſée qui s'attachent aux cheveux, aux habits & aux plantes en forme de petites boules, en ſont une preuve. 5°. Quoique les liqueurs ſe diviſent en globules imperceptibles, cette diviſion a néanmoins un terme ; car il eſt certain que les liqueurs different entr'elles : or ſi elles étoient compoſées de parties qui par une diviſion continuée ſans fin affectaſſent d'elles-mêmes la figure ſphérique, il n'y auroit aucune difference entre les liqueurs, puiſque les parties compoſantes ſeroient les mêmes & d'une ſeule eſpece. Il faut donc que les derniers globules, ceux que l'on peut ſuppoſer les plus petits, ſoient compoſez de parties dures, fines, déliées, & diverſement figurées ſelon la qualité propre de chaque liqueur. 6°. Cette expoſition ſimple & ſans long commentaire d'un phenomene que l'on obſerve dans toutes les liqueurs, nous conduit à y diſtinguer deux ſortes de parties, les unes que l'on peut appeller leur premier élément ou parties de

premiere compoſition, & les autres leur ſecond élément ou parties de ſeconde compoſition. Les parties du premier élément ſont diverſement conformées ſelon la nature prépre de la liqueur, & elles conſervent la figure qu'elles ont une fois reçue. Celles du ſecond ſont des amas des parties du premier élément, leſquelles ſont appliquées les unes aux autres par l'action d'une force qui ſe manifeſte par l'expérience, & qui donne ou tend à donner la figure ſphérique aux molecules qui en réſultent. 7°. Ces molecules conſervent encore leur figure ſphérique lorſqu'elles s'amaſſent pluſieurs en un même tas. Car comme elles ſont d'une extrême petiteſſe, elles ſont moins expoſées aux impreſſions de la peſanteur & du choc, & par conſéquent moins ſujettes à être rompues. Cet accident de rupture arrive aux groſſes gouttes; elles s'applatiſſent & s'étendent ſous leur propre poids, & enfin elles coulent tandis que les goutes les plus petites réſiſtent à cet effort, & conſervent aſſez exactement leur figure ronde. Quoi qu'il en ſoit de la figure qu'il faut attribuer aux plus petites molecules lorſqu'elles ſont réunies pluſieurs en un même volume, au moins eſt-il certain que la force qui leur eſt appliquée lorſqu'elles ſont ſéparées les unes des autres, ne les abandonne point après leur réunion, & qu'elle tend à donner à chacune d'elles la figure ſphérique.

7. Après ces réflexions il n'eſt pas difficile de prouver que ſi on pouſſe une liqueur enfermée dans un vaiſſeau, en ſorte qu'elle ne puiſſe pas s'échapper, toutes les parties ſeront également preſſées en tout ſens; c'eſt ce qu'on va voir dans la propoſition qui ſuit.

PROPOSITION I.

8. *Lorſqu'on preſſe une liqueur de maniere qu'elle ne peut s'échapper par aucune ouverture, la preſſion ſe communique également en tout ſens.*

On vient de dire que les plus petites molecules d'une liqueur ſont compoſées de parties qu'une force aſſemble ainſi en un volume qui affecte de lui-même la figure ſphérique, & qu'elles y ſont retenues dans un repos reſpectif & dans un eſpece d'équilibre. Cela poſé, ſi on preſſe une liqueur avec un piſton, les molecules qui ſont à la ſurface, ſeroient applaties ou même rompues, ſi d'un côté elles n'étoient retenues par les parois du vaiſſeau, & ſi de l'autre elles ne s'appuyoient ſur les molecules qu'elles ont immédiatement au-deſſous d'elles; car les parties qui les compoſent ſont en équilibre, d'ailleurs le plus petit effort ſuffit pour les déranger. D'où l'on voit que l'effort qui preſſe chaque molecule, ſe diſtribue également à toutes ſes parties, & qu'elle eſt pouſſée en tous ſens & ſuivant toutes les directions: or un corps qui eſt

preſſé, preſſe auſſi avec le même effort ; donc la preſſion des premieres molecules eſt communiquée aux ſecondes, c'eſt-à-dire, à celles qui ſont immédiatement au-deſſous ; mais les parties de celles-ci ſont en équilibre de même que celles des premieres molecules ; donc la preſſion reçue ſe diſtribue également à toutes les parties des ſecondes. On prouvera de la même maniere que la preſſion des ſecondes molecules paſſe aux troiſiémes, & qu'elle ſe diſtribue également à toutes leurs parties, en ſorte qu'il n'y en a aucune qui ſoit pouſſée plus ou moins fortement que les parties des premieres & des ſecondes molecules, & ainſi de ſuite juſqu'aux extremitez du vaiſſeau. Par conſéquent lorſqu'on preſſe une liqueur de maniere qu'elle ne peut s'échapper par aucune ouverture, la preſſion ſe communique également en tout ſens.

9. REMARQUE. Il reſteroit à développer quelle eſt la nature de la force qui aſſemble en molecules les parties du premier élément des liqueurs, & quelle eſt ſa maniere d'agir. Cette force paroît être la même que celle qui fait que les liqueurs s'attachent à certains corps, & montent au-deſſus de leur niveau lorſqu'elles trouvent un appui qui ſoutient en partie l'effort de la peſanteur qui tend à les faire deſcendre. Si l'effet dont il s'agit n'eſt pas du nombre de ceux qu'on doive rapporter immédiatement à la premiere cauſe, c'eſt à la phyſique à dévoiler ce miſtere, & à démêler la vérité entre les différentes opinions que les Philoſophes prennent ſur ce ſujet. Dans le ſiſtême de ceux qui expliquent tous les mouvemens par l'impulſion, celle de M. de Mairan paroît la mieux raiſonnée & la plus concluante. Voyez la pag. 13 de l'Hiſtoire de l'Académie des Sciences, année 1724.

10. COROLLAIRES, *où l'on explique en détail les effets de la preſſion égale en tout ſens dont on vient de parler, en faiſant abſtraction de celle de la peſanteur.*

1°. Lorſqu'on dit qu'une liqueur eſt également preſſée en tout ſens, il faut entendre que ſi on diviſe par la penſée la liqueur en tranches fort minces & égales en ſuperficie à celle qui eſt à l'ouverture, chacune d'elles eſt chargée ou pouſſée avec un effort égal à celui de la lame qui eſt immédiatement ſous la preſſion du piſton ; qu'ainſi *toutes ces lames ſuppoſées égales, ſont ſollicitées à ſe mouvoir dans le ſens qu'elles ſont pouſſées d'une viteſſe égale, & égale à celle que recevroit la lame que le piſton preſſe immédiatement.* Car la force d'un corps qui eſt pouſſé, eſt proportionnelle au produit de la maſſe & de la viteſſe qu'il reçoit ou qu'il eſt ſollicité de prendre (*Liv.* I. n 17) ; donc les produits qui réſulteront en multipliant

toutes ces lames égales par la viteſſe qu'elles recevroient ſi elles étoient libres, ſont égaux : or toutes les lames qui ſont les maſſes, ſont ſuppoſées égales, il faut donc qu'elles tendent toutes à ſe mouvoir d'une égale viteſſe.

11. 2°. La viteſſe des parties étant la même que celle du corps dont elles ſont parties, il ſuit que chaque molecule d'une lame tend à être mue avec la même viteſſe : c'eſt pourquoi *ſi l'on conçoit que la liqueur eſt diviſée en lames inégales, c'eſt-à-dire, en lames de même épaiſſeur, mais inégales en ſurface ; leurs forces ou les efforts qui les pouſſent, ſont entr'eux dans la raiſon de ces ſurfaces ou des lames mêmes* : car lorſque les viteſſes ſont égales, les forces ſont comme les maſſes ; or les maſſes ſont les lames ſuppoſées toutes de même épaiſſeur ; donc les forces qui les pouſſent ſont dans la raiſon des ſolidités ou bien des ſurfaces, puiſque dans l'hypotheſe preſente, les maſſes ſont entr'elles comme les ſurfaces.

Fig. 1. 12. 3°. Si on remplit un vaiſſeau de quelque liqueur qu'on la preſſe avec deux poids P & *p* qui s'ajuſtent parfaitement aux ouvertures C & *c*, de maniere néanmoins qu'ils puiſſent monter & deſcendre librement ſans frotter & ſans que la liqueur fuie, ils ſeront en équilibre s'ils ſont dans la raiſon des ouvertures C & *c*, en ſorte que *ſi l'ouverture C eſt dix fois plus grande que l'ouverture c, il faudra que le poids* P *ſoit dix fois plus grand que le poids p ; ſi le grand poids* P *eſt moindre, il ſera ſurmonté par le petit poids p.* Pour démontrer ce corollaire il ſuffit de faire attention à la propoſition & au corollaire précedent. Lorſque le poids P preſſe la liqueur, la preſſion ſe communique également en tout ſens, c'eſt-à dire, que toutes les lames égales en ſuperficie à l'ouverture C, ſont pouſſées par un effort égal à celui du poids P ; & par le corollaire précedent, ſi les lames ſont inégales, les preſſions ou les efforts qui les pouſſent ſont dans la raiſon de ces lames ; donc les preſſions que le poids P cauſe ſur les lames qui rempliſſent les ouvertures C & *c*, ſont dans la raiſon de ces ouvertures. Cela poſé, pour maintenir l'équilibre entre les poids P & *p*, il ſuffit de réprimer l'impulſion que le poids P produit ſur la lame *c*, ce qui ſe fait en cette ſorte. On vient de voir que les preſſions qui tendent à mouvoir la lame C en embas, & la lame *c* vers le haut, ſont dans la raiſon des ouvertures : or par l'hypotheſe, les poids P & *p* ſont auſſi dans la raiſon des ouvertures ; donc les poids P & *p* ſont ſont dans la raiſon des preſſions que le grands poids P produit aux ouvertures C & *c* ; mais la preſſion que la lame C reçoit du poids P, eſt égale à la peſanteur du poids P ; d'où il ſuit que celle

que

que le même poids produit ſur la lame *c*, eſt égale au petit poids *p*; la lame *c* eſt donc pouſſée en haut & en bas par des efforts égaux, elle eſt donc en équilibre. Par conſéquent le grand poids ne peut pas ſurmonter le moindre.

On fera voir par un raiſonnement ſemblable que les preſſions que le petit poids produit ſur les lames *c* & C ſont dans la raiſon de ces lames; qu'ainſi le poids P ne peut réprimer cette preſſion, ſi ſa peſanteur n'eſt plus grande que celle du poids *p* dans la même raiſon que la lame C eſt auſſi plus grande que la lame *c*. L'on voit pareillement que ſi la raiſon des poids P & *p* étoit moindre que celle des ouvertures, pour lors la preſſion que le petit produiroit ſur la lame C ſeroit plus grande que la peſanteur du poids P, par conſéquent ce poids ne pourroit réprimer l'effort contraire de cette lame, il ſeroit donc ſurmonté par le petit poids *p*.

13. 4°. *Si on fait des ouvertures* O *&* o *aux côtez du vaiſſeau, qu'on preſſe la liqueur de maniere qu'elle ne puiſſe fuir, il y aura équilibre, ſi les preſſions ſont dans la raiſon des ouvertures.* La preuve eſt la même que pour le corollaire précedent. On fait abſtraction de la preſſion cauſée par la peſanteur de la liqueur.

14. 5°. Si on conçoit que la ſuperficie intérieure du vaiſſeau eſt diviſée en parties égales à l'ouverture C ou *c*, elles ſupporteront des preſſions égales aux poids P ou *p*, celles qui ſont égales à l'ouverture C, ſeront preſſées par un effort égal au poids P, & celles qui ſont égales à l'ouverture *c* ſont pouſſées par un effort égal au petit poids *p*; en un mot les preſſions que ſupportent les differentes parties du vaiſſeau, ſont dans la raiſon de leur grandeur, puiſque ſi on ſuppoſe à ces endroits-là même des ouverteres pour ſoutenir les preſſions des poids P & *p*, il faudra oppoſer des forces qui ſoient entr'elles & aux poids P & *p*, comme ces ouvertures ſont entr'elles & aux ouvertures C & *c*. D'où il ſuit que s'il y a quelque partie qui ne puiſſe pas réſiſter à la preſſion, laquelle eſt proportionnelle à la ſurface preſſée, elle ſera rompue.

15. 6°. *Les deux poids* P *&* p *étant toujours ſuppoſez dans la raiſon des ouvertures* C *&* c, *c'eſt-à-dire, en équilibre, ils ne preſſent pas davantage la liqueur lorſqu'ils agiſſent enſemble & à la fois, que s'ils la preſſoient ſéparément l'un après l'autre.* Car ſi on ferme l'ouverture C, les preſſions cauſées par le poids *p* ſeront proportionnelles aux ſurfaces ou à la grandeur des lames preſſées; celles qui ſont égales à la lame *c*, ſeront preſſées avec un effort égal au poids *p*; ſi elles ſont doubles triples, la preſſion ſera auſſi double ou triple; il en eſt de même ſi le

poids P preſſe ſeul la liqueur, les preſſions ſont proportionnelles aux ſurfaces ; ſi la ſurface preſſée eſt égale à l'ouverture *c*, la lame qui s'y trouve ſupportera un effort égal à celui du poids *p*. D'où l'on voit que la liqueur n'eſt pas preſſée plus fortement par le grand que par le petit poids, pourvu qu'ils ſoient entr'eux dans la raiſon des ouvertures ; or pareillement ſi les deux poids preſſent la liqueur, enſemble & à la fois, la ſomme des poids ſera à l'un d'eux comme la ſomme des ouvertures ſera à l'une d'elles, c'eſt-à-dire, que les preſſions ſeront encore proportionnelles aux ouvertures ; par conſéquent ces deux poids conſiderez comme un ſeul & même poids, ne preſſent pas la liqueur plus fortement, agiſſant enſemble & à la fois, que ſi elle n'étoit preſſée que par chacun d'eux ſéparément. Pour appercevoir la raiſon mécanique de cet effet, il faut faire attention que ſi l'on augmente ou que l'on diminue l'un des poids, pourvu que l'ouverture par laquelle il preſſe, augmente ou diminue auſſi à proportion, chaque molecule n'en eſt pouſſée ni plus ni moins fortement, car ſi le poids eſt plus grand, la preſſion ou l'effort qu'il fait, ſe diſtribue à un plus grand nombre de parties, parce que l'ouverture du vaiſſeau eſt plus grande ; ſi au contraire le poids diminue, l'ouverture diminue auſſi, & le nombre des parties qui ſont preſſées immédiatement eſt moindre à proportion.

16. 7°. Si des poids égaux preſſent une liqueur par des ouvertures différentes, ou ſi des poids inégaux la preſſent par la même ouverture, les preſſions ſeront inégales, c'eſt-à-dire, que les molecules tendront à avoir des viteſſes différentes. Ce qui eſt évident.

Dans la propoſition précedente & ſes corollaires, on n'a eu aucun égard à l'action de la peſanteur : dans la ſuite de ce Chapitre on conſiderera les effets que cette cauſe produit ſur les liqueurs. 1°. L'équilibre entre les colomnes d'une même liqueur contenue dans un ſeul vaſe. 2°. Dans les vaſes qui communiquent. 3°. L'équilibre entre les liqueurs de differente peſanteur ſpécifique. Les vaiſſeaux qu'on emplit d'une liqueur, peuvent être d'une matiere dure & capable de réſiſter en tout ſens, ou bien ils ſont ſouples & ſuſceptibles de diverſes figures lorſqu'on vient à les comprimer.

De l'équilibre entre les colomnes d'une meſme liqueur contenue dans un ſeul vaſe, & des preſſions qu'elle y cauſe.

17. On ſuppoſe que le vaſe eſt de matiere dure, & qu'il ne change point de figure.

Si les liqueurs n'étoient point pesantes lorsqu'une force étrangere viendroit à les presser, son action s'étendroit également sur toutes les parties ; mais parce que les liqueurs pesent, on ne peut pas dire que la pression soit égale ou la même par tout ; il est visible que ce qu'il y a de liqueur vers le fond du vase, est chargé d'un plus grand poids que la liqueur qui est plus proche de la surface supérieure. On peut dire néanmoins qu'une liqueur est également pressée en tout sens ; mais pour oter l'équivoque, il faut concevoir qu'elle est partagée en tranches ou couches horizontales : or il est certain que les molecules d'une même couche horizontale sont également serrées de tous côtez, car quand même il n'y en auroit que quelques-unes qui seroient pressées immédiatement par le poids qu'elles ont au-dessus, cette pression se communiqueroit aussi-tôt à toute la tranche, comme on l'a fait voir dans la proposition précedente & ses corollaires.

18. Pour mieux entendre l'équilibre qui est entre les parties d'une liqueur, il faut définir ce que l'on entend lorsqu'on dit qu'une liqueur est à *niveau*, ou de *niveau*. Une liqueur est à niveau lorsque sa surface supérieure est horizontale. Une surface est horizontale lorsqu'elle imite la courbure de la superficie de la terre. On dit aussi d'un plan qu'il est horizontal lorsqu'il touche le globe de la terre sans le couper ; on ne peut pas dire néanmoins que les parties de ce plan sont de niveau ou dans le niveau vrai, parce qu'une surface n'est à niveau que lorsqu'elle fait partie de celle de la terre ou qu'elle lui est parallele, c'est-à-dire, qu'elle en est également distante dans tous ses points. Lorsqu'une surface ou figure plane est horizontale & qu'elle n'est pas d'une grande étendue, on peut dire qu'elle est de niveau, parce qu'on la regarde comme faisant partie de celle de la terre, de même qu'on considere une petite portion de la surface de la terre comme une superficie plane ; mais si une surface horizontale s'étend fort loin, on dit seulement qu'elle est dans le *niveau apparent*, car on distingue entre le *niveau vrai*, & le *niveau apparent*. Differens points sont dans le niveau vrai lorsqu'ils sont sur une surface sphérique qui est concentrique à celle de la terre ; mais si differens points sont sur un plan horizontal ils ne sont que dans le niveau apparent.

19. Lorsque dans la suite on dira qu'une liqueur est à niveau ou de niveau, il faudra entendre que sa surface est une portion de la surface sphérique de la terre, qu'on peut cependant regarder comme plane si elle a une petite étendue.

20. Si une liqueur ſe met de niveau, tous les points de ſa ſurface ſupérieure ſont également éloignez du centre de la terre, aucun n'eſt plus élevé que les autres. Mais ſi elle n'eſt par de niveau, il y a des hauteurs & des profondeurs.

PROPOSITION II.

21. 1°. *Une liqueur qui eſt abandonnée à elle-même ſe met de niveau.* 2°. *Elle eſt en repos, & ſes parties ſont en équilibre.*

Premiere Partie. Puiſque les liqueurs ſont peſantes, elles tendent à deſcendre & à occuper l'endroit le plus bas; donc les parties qui ſont à la ſurface ſupérieure ſe diſpoſent de maniere, qu'elles ſont toutes à la même hauteur, ou également diſtantes du centre de la terre, autrement elles ne tendroient pas à deſcendre vers l'endroit le plus bas: par conſéquent les liqueurs qui ſont abandonnées à elles-mêmes ſe mettent de niveau.

En effet, ſi à la ſurface d'une liqueur qu'on ſuppoſe libre & à couvert de toute impreſſion étrangere, il y avoit des inégalitez, les parties les plus hautes ſeroient ſituées comme ſur des plans inclinez; & parce que la liqueur eſt ſuppoſée parfaitement coulante, l'effort de la peſanteur les obligeroit de deſcendre & de ſe tenir à la même hauteur que les autres parties de la ſurface. Par conſéquent une liqueur qui eſt abandonnée à elle-même ſe met de niveau.

On fait abſtraction ici de la propriété que les liqueurs ont de s'attacher à certains corps, & de l'adhérence par laquelle les parties tiennent les unes aux autres, & qui fait que lorſqu'elles ſont en petite quantité, elles ſe ſoutiennent & réſiſtent même à leur diviſion lorſque la peſanteur ou une autre force tend à les ſéparer.

Seconde Partie. Concevons que la liqueur contenue dans un vaſe eſt diviſée en couches horiſontales; il eſt certain que les molécules d'une même couche ſont également preſſées en tout ſens. Cela poſé, 1°. la liqueur qui eſt à la ſurface ne peut pas fluer, puiſqu'elle eſt de niveau, & que toutes ſes parties ſont également hautes. 2°. Les couches qui ſont entre la ſurface ſupérieure & le fond du vaſe ſont auſſi en repos. Car les molécules d'une même couche ne peuvent s'échapper que vers le haut du vaſe, ſuppoſé qu'elles ſoient mûes: or on démontrera dans la Propoſition ſuivante que la charge de chaque couche horiſontale eſt égale au poids d'un priſme de liqueur qui auroit pour baſe la couche horiſontale, & pour hauteur la hauteur verticale de la liqueur qui eſt au-deſſus de cette couche: ainſi la charge de la couche MN eſt

Fig. 2, 3, 4 & 5.

égale au poids d'une colomne de liqueur qui auroit pour baſe la couche MN, & pour hauteur la hauteur OH de la liqueur qui eſt au-deſſus de cette couche; d'où il eſt aiſé de conclure que la couche MN ne peut pas ſe ſouſtraire à la preſſion du fardeau qu'elle ſupporte en montant vers le haut du vaſe : car par la propriété commune à toutes les liqueurs, la tranche MN tend à monter avec un effort égal au poids du priſme de liqueur MPQN: or 1°. ſi la capacité du vaiſſeau eſt la même dans toute ſa hauteur, comme dans la figure 2, il eſt évident que ſi la tranche MN tend à monter par un effort égal au poids d'un priſme de la liqueur égal à MPQN, cet effort eſt réprimé par une force égale & contraire, qui eſt la peſanteur de la liqueur MABN. 2°. Si (fig. 3.) le vaiſſeau va en s'étreciſſant vers le fond, il eſt viſible que la liqueur qui eſt au-deſſus de la tranche MN eſt plus que ſuffiſante pour empêcher cette tranche de monter. 3°. Si (fig. 4.) le vaſe eſt plus étroit vers le haut que vers le fond, il eſt bien certain que la preſſion qui tend à faire monter la tranche MN eſt plus grande que le poids de la liqueur MABN; qu'ainſi ſi cette tranche n'étoit retenue dans ſon lieu que par le poids de la liqueur MABN, elle en ſurmonteroit la réſiſtance; mais parce que les côtez du vaſe ſont inclinez à la liqueur MABN, de façon à pouvoir réſiſter à la tendance que la tranche MN a pour monter, il eſt viſible que cette réſiſtance ſupplée au poids de la liqueur MABN, & qu'elle ſuffit avec ce poids pour retenir la tranche MN; d'où l'on voit que la tendance que chaque tranche horiſontale a pour monter, eſt empêchée par un effort égal & contraire. Il faut donc conclure que toute liqueur qui eſt laiſſée à elle-même eſt en repos, & que ſes parties ſont en équilibre entr'elles.

Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

Si l'on conçoit que la liqueur eſt diviſée en colomnes verticales ou inclinées, on prouvera encore qu'elles ne peuvent ſe ſurmonter les unes les autres, & qu'elles ſont dans un repos reſpectif. 1°. Si les colomnes ſont verticales, & que le vaiſſeau ſoit cylindrique, il eſt évident qu'elles ont même baſe & même hauteur; qu'ainſi les efforts par leſquels elles tendent à deſcendre ou à s'affaiſſer étant égaux, l'une d'elles ne peut ſurmonter les autres en les contraignant de monter contre l'effort de leur peſanteur. 2°. Si le vaiſſeau n'eſt pas de même groſſeur par-tout, comme dans les figures 3 & 4, il eſt vrai que la colomne OH eſt plus longue que la colomne CK, mais il eſt évident que dans la figure 4 les parois du vaiſſeau ſoutiennent la preſſion que la colomne CK reçoit de la colomne OH; qu'ainſi la colomne CK, quoique plus foible,

ne doit pas céder à la preſſion de la colomne OH, quoique plus forte. Dans la figure 3 la partie SH de la colomne OH étant au-deſſous de la baſe de la colomne CK, il eſt viſible que la colomne OH n'agit ou ne peſe ſur la colomne CK, que par le poids de ſa partie OS, dont l'effort n'eſt pas plus grand que celui de la colomne CK. 3°. Si les colomnes ſont inclinées, comme la colomne AH, fig. 2 & 3, il eſt vrai que la colomne AH étant de même groſſeur que la colomne OH, eſt plus peſante, & par conſéquent plus forte dans la raiſon de la plus grande longueur, mais la colomne AH ne preſſe pas la colomne OH par tout ſon poids, elle eſt comme appuyée ſur un plan incliné; ainſi ſa peſanteur eſt décompoſée en deux efforts, & celui par lequel elle preſſe la colomne OH ſuivant AH, eſt à l'effort abſolu, comme la hauteur OH eſt à la longueur AH (*Liv.* II. 174); c'eſt-à-dire, que cet effort eſt préciſément égal au poids de la colomne OH; car puiſque la peſanteur de cette colomne, & l'effort que la colomne AH éxerce ſuivant ſa longueur, ſont à ſon poids abſolu, comme la hauteur OH eſt à la longueur AH, le poids de la colomne OH & l'effort ſuivant la longueur du plan incliné, ont même raiſon au poids abſolu de la colomne AH: donc l'un ne ſurmonte pas l'autre, puiſqu'ils ſont égaux. D'où l'on voit que de quelque maniere que l'on ſuppoſe que les parties d'une liqueur agiſſent les unes contre les autres, elles ſont dans un repos reſpectif.

Fig. 6. 22. COROLLAIRE. Il ſuit de la premiere partie que s'il y a de de la liqueur répandue ſur un plan horiſontal AB, laquelle ait ſa ſurface ſupérieure parallele à ce plan AB qui touche la terre au point G, elle coulera des extrémitez A & B vers le point G pour y former une ſurface courbe EF concentrique à la terre; puiſque la liqueur ainſi répandue ſur le plan horiſontal n'eſt pas de niveau, & que d'ailleurs, ſelon la premiere partie de cette Propoſition, une liqueur laiſſée à elle-même ſe met de niveau.

PROPOSITION III.

23. *Si on remplit un vaiſſeau d'une même liqueur, la charge du fond ſera égale au poids d'une colomne de cette liqueur qui auroit pour baſe le fond du vaiſſeau, & pour hauteur celle de la liqueur contenue.*

Fig. 2, & 5. DEMONSTRATION. Concevons que la liqueur eſt diviſée en tranches ou couches horiſontales indéfiniment minces, il eſt certain que chaque tranche eſt un poids qui charge les couches inférieures, & par conſéquent le fond; de ſorte que ſi elles ſont toutes

égales entr'elles, comme dans le cas des fig. 2 & 5, lorſque le vaiſſeau eſt droit ou incliné, & qu'il eſt également large dans toute ſa hauteur, la derniere couche, & par conſéquent le fond, eſt chargé d'un poids égal à celui de toutes les tranches; donc la charge du fond eſt égale au poids d'une colomne de la liqueur, qui auroit pour baſe le fond du vaiſſeau, & pour hauteur celle de la liqueur contenue. La ſeule difficulté eſt donc pour les vaiſſeaux qui ſont inclinez, & qui ſont inégalement larges dans leur hauteur.

On a démontré dans la premiere Propoſition, Corol. 6, que Fig. 3, 4. ſi des poids inégaux preſſent une liqueur par des ouvertures qui ſoient dans la raiſon des poids, ils y produiſent des preſſions égales; donc ſi les tranches ou couches horiſontales ſont dans la raiſon des ouvertures par où elles preſſent la derniere couche qui eſt ſur le fond, il s'enſuit que toutes ces couches, grandes & petites qui ſont poſées les unes ſur les autres, produiront ſur la derniere tranche, & conſéquemment ſur le fond des preſſions égales; or il n'eſt pas difficile d'appercevoir que les couches horiſontales ſont dans la raiſon des ouvertures qu'elles occupent dans la hauteur du vaiſſeau, car elles ont toutes la même épaiſſeur; donc leurs ſoliditez ou quantitez de matiere ſont entr'elles comme les baſes ou les différentes ouvertures que le vaiſſeau a ſuivant ſa hauteur; donc leurs peſanteurs ſont dans la raiſon de ces ouvertures; toutes les tranches horiſontales produiſent donc ſur le fond du vaiſſeau des preſſions égales, & égales à celle qu'y produit la derniere tranche; le fond eſt donc chargé de même que ſi toutes les tranches ou couches horiſontales qui s'appuient les unes ſur les autres étoient égales en peſanteur à la derniere ou à la plus baſſe de toutes; la charge du fond eſt donc égale aux poids d'une colomne de la liqueur qui auroit pour baſe le fond du vaiſſeau, & pour hauteur celle de la liqueur contenue.

24. Corollaires. 1°. Si le vaiſſeau a la figure d'un priſme, c'eſt-à-dire, d'un ſolide de même groſſeur par-tout, la charge du fond eſt égale au poids de la liqueur contenue: ſi le vaiſſeau s'étrecit vers le fond, la charge qu'il ſupporte eſt moindre que celle de la liqueur contenue. Si enfin le vaiſſeau va en s'élargiſſant vers fond, la charge dont il s'agit eſt plus grande que le poids de la liqueur contenue.

25. 2°. Si deux vaſes ſont remplis d'une même liqueur, que leurs baſes & leurs hauteurs ſoient égales, les fonds ſont également chargez, quelles que ſoient leurs figures & leurs capacitez, ſi l'un des vaiſſeaux ne contient que la dixiéme, la centiéme partie, &c.

de la liqueur contenue dans le grand vaiſſeau, le fond du petit ne laiſſera pas d'être autant chargé que le fond du grand.

26. 3°. *Si deux vaiſſeaux remplis d'une même liqueur ont les fonds égaux, les preſſions ou charges qu'ils ſupportent ſont entr'elles comme les hauteurs*; car ces charges ſont l'une & l'autre égales aux poids de deux colomnes de la même liqueur qui auroient des baſes égales; donc leurs peſanteurs ou les preſſions cauſées ſur les fonds, leſquelles leur ſont égales, ſont entr'elles comme les hauteurs.

27. 4°. Si les hauteurs des vaiſſeaux ſont égales, & les baſes inégales, les preſſions ſont dans la raiſon des baſes.

28. 5°. *Si deux vaiſſeaux remplis d'une même liqueur ont les baſes & les hauteurs inégales, les charges que les fonds ſupportent ſont entr'elles comme les produits des baſes & des hauteurs, ou en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs.*

Car les charges ou preſſions cauſées ſur les fonds de ces vaiſſeaux ſont égales aux poids de deux colomnes de la même liqueur qui auroient des baſes égales aux fonds, & des hauteurs auſſi égales à celles des vaiſſeaux; or ces colomnes ou leurs peſanteurs ſont entr'elles comme les produits de leurs baſes & de leurs hauteurs, ou en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs; donc les charges ou preſſions cauſées ſur les fonds ſont auſſi entr'elles comme les produits des baſes & des hauteurs ou en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs des vaiſſeaux qui contiennent la liqueur.

Fig. 7. 29. REMARQUE. La Propoſition & ſes Corollaires font appercevoir qu'avec une fort petite quantité de liqueur on peut produire une très-grande force, une force pour ainſi dire immenſe. Soit le vaiſſeau AV, dont le fond TV ait un pied en tout ſens, c'eſt-à-dire, qu'il contienne en ſurface un pied quarré, & dont la hauteur AT ſoit d'un pouce, ſi on l'emplit d'eau juſqu'en C, il contiendra la douziéme partie d'un pied cube d'eau; le pied cube d'eau peſe 70 ou 72 livres, donc la liqueur contenue dans le vaſe AV peſera 6 livres: or ſi on adapte au vaſe un tuyau CD long de 10 pieds, qui ait une ouverture d'un pouce quarré, qu'on l'empliſſe d'eau, il contiendra 120 pouces cubiques d'eau, qui ne peſent pas tout-à-fait 6 livres, puiſque 144 pouces, qui ſont la douziéme partie d'un pied cubique, ne peſent que ſix livres; donc toute la liqueur contenue ne peſera qu'environ 11 livres; mais pour avoir la preſſion que le fond TV ſupporte, il faut multiplier la baſe TV, qui a un pied quarré, par 10 pieds de hauteur, & l'on aura pour produit 10 pieds cubes; or 10 pieds cubes d'eau peſent 720 livres; donc la charge que le fond ſupporte eſt de 720 livres, quoique la liqueur

contenue

contenue n'en peſe que onze. Si on preſſe la liqueur à l'ouverture D avec un poids de 10 livres, chaque pouce quarré de la baſe ſera encore chargé d'un poids de 10 livres ; or la baſe TV contient 144 pouces quarrez, le poids de 10 livres y produira donc une charge de 1440 livres, le fond TV ſera donc chargé en tout de 2160 livres, quoique la liqueur contenue avec le poids ne peſe en tout que 21 livres.

30. Si l'expérience ne vérifioit cette Remarque & la Propoſition ſur laquelle elle eſt fondée, on auroit de la peine à croire cette prodigieuſe augmentation de force ; mais le fait eſt conſtant, & il n'eſt point révoqué en doute par tous ceux qui ont les premiers principes de l'Hydroſtatique. Pour faire l'expérience dont il s'agit, il faut que le fond TV ſoit mobile, qu'il puiſſe monter & deſcendre ſans frottement conſidérable, & de maniere que la liqueur ne puiſſe pas s'échapper par les jointures, on trouvera que pour ſoutenir le fond TV, il faudra ſuſpendre au bras FN de la balance MN, un poids P dont la peſanteur ſoit égale à celle de la colomne de la liqueur qui auroit pour baſe le fond TV, & pour hauteur CD.

31. Le vaiſſeau AB joint au tuyau CD eſt appellé quelquefois *Levier d'eau*, parce que cette machine a une propriété ſemblable à celle du levier ordinaire. Avec le levier ordinaire on éleve des poids d'autant plus grands que le bras auquel la puiſſance s'attache eſt plus long, ou que ſon point d'application eſt plus diſtant de l'appui : de même plus le tuyau CD eſt long, plus la liqueur qu'il contient fait d'effort, & plus les poids qu'elle peut élever en s'appuyant ſur la baſe TV ſont grands.

32. Voici une difficulté qu'on a coutume de faire contre la Remarque & la Propoſition qui prouvent cette multiplication de force. S'il eſt vrai que le fond TV ſoit chargé comme s'il portoit une colomne de liqueur qui auroit pour baſe TV, & pour hauteur CD, lorſqu'on ſouleve avec la main le vaiſſeau AB avec le tuyau CD, on devroit ſentir cette charge : l'expérience montre cependant qu'il ſuffit pour ſoutenir le vaſe d'employer une force égale à la peſanteur abſolue de la liqueur qu'il contient.

Pour lever la difficulté, il faut faire attention à la maniere dont la liqueur du tuyau CD produit cette charge. La lame C eſt comme un coin qui tend à s'inſinuer à droite & à gauche entre la liqueur contenue dans le vaiſſeau & ſon couvercle AB, & preſſe par conſéquent la couche de liqueur qui eſt immédiatement ſous ce couvercle avec un effort égal au poids de la liqueur CD ; & il

eſt évident que cette preſſion ſe communique à droite & à gauche juſqu'aux extrémitez A & B du couvercle, & qu'elle ſe multiplie autant de fois que la lame C eſt contenue dans cette premiere couche, d'une maniere à peu-près ſemblable à ce qui arrive à pluſieurs boules qui ſont à la ſuite les unes des autres, ſi l'on pouſſe la premiere, & que la derniere trouve un arrêt, la preſſion ſe tranſmet, & l'impulſion de la premiere ſe multiplie ſelon le nombre des boules. L'effort qui preſſe la premiere couche, celle qui touche immédiatement le couvercle AB retombe donc tout entier ſur la liqueur du vaiſſeau & ſur le fond TV: or cette premiere couche ne peut agir de la ſorte ſur le fond TV, qu'elle ne faſſe un effort ſemblable ſur le couvercle; un coin agit également ſur les deux côtez de la fente, le fond TV & le couvercle AB ſont donc pouſſez en des ſens directement oppoſez; & parce qu'ils tiennent l'un à l'autre, ces efforts contraires ſe détruiſent ou s'empêchent mutuellement: le fond TV eſt pouſſé en bas, & il eſt tiré en même-tems vers le haut par la réaction ou réſiſtance du couvercle. L'effort de la lame C ſe multiplie donc conformément à la loi de la fluidité; mais cette augmentation de force ne doit point ſe faire ſentir, parce qu'elle pouſſe également un même corps, le fond du vaiſſeau & le couvercle ſuivant des directions oppoſées; de-là vient que pour ſoutenir le vaiſſeau il ſuffit d'employer une force égale au poids de la liqueur qu'il contient, parce qu'il n'y a que la force abſolue de ce poids qui ne ſe conſume pas à preſſer ſuivant des directions contraires, puiſque la liqueur, en tant qu'elle eſt peſante, ne tend que vers un endroit.

De l'action des Liqueurs sur les parois ou côtez des vaiſſeaux ou réſervoirs qui les contiennent.

33. Lorſque dans la Propoſition précédente on a dit que l'action d'une liqueur ſur le fond d'un vaſe étoit égale au poids d'une colomne de cette liqueur qui auroit pour baſe le fond du vaiſſeau, & pour hauteur la perpendiculaire tirée de la ſurface ſupérieure de la liqueur, on a ſuppoſé que les fonds des vaſes étoient horiſontaux, & que toutes leurs parties étoient également preſſées; mais ſi ces mêmes fonds étoient inclinez, le poids d'une telle colomne ne repréſenteroit pas l'action de la liqueur ſur ces fonds, parce qu'ils ne ſeroient pas également preſſez dans toute leur étendue. La Propoſition qu'on vient d'établir ſert néanmoins pour déterminer cette charge, comme auſſi celle des parois ou côtez qui peuvent être inclinez ou perpendiculaires à l'horiſon.

34. Il eſt évident que ſi une ſurface fait un angle avec l'horiſon, tous ſes points ne ſeront point également élevez ; & s'il y a de la liqueur au-deſſus, toutes les parties de cette ſurface ne porteront pas la même charge, la preſſion ira en diminuant de l'endroit le plus bas juſqu'au niveau de la liqueur, en ſorte que la partie de cette ſurface qui eſt au même niveau ne ſera aucunement preſſée.

35. *Si* on diviſe par la penſée cette ſurface en ſes élémens qui ſoient paralleles entr'eux & à l'horiſon, on pourra déterminer la charge de chacun en particulier, & de tous enſemble, c'eſt-à-dire l'action totale de la liqueur ſur cette ſurface.

PROPOSITION IV.

36. *Chaque élément, c'eſt-à-dire, chaque ſurface partielle qu'on ſuppoſe d'une largeur indéfiniment petite, eſt chargée comme ſi elle portoit un colomne de liqueur qui auroit pour baſe la ſurface de l'élément, & pour hauteur celle du liquide qui eſt au-deſſus*, c'eſt-à-dire, *la perpendiculaire menée de la ſurface à cet élément.*

Voici de quelle maniere on peut prouver cette Propoſition : chaque couche horiſontale de la liqueur peut être conſidérée comme le fond d'un vaſe ; ainſi la charge de cette couche eſt égale au poids de la colomne de la liqueur qui auroit pour baſe cette couche, & pour hauteur la perpendiculaire abbaiſſée du niveau de la liqueur ſur la couche (23) ; or ſuivant la Propoſition premiere & le Corollaire 6, la preſſion de ce poids ſe diſtribue aux parties de la couche, & à la liqueur qui eſt au-deſſous, & aux parois du vaiſſeau, de maniere que les efforts produits ſont entr'eux comme les ſurfaces ; donc chaque portion de la couche horiſontale eſt chargée de même que ſi elle portoit le poids d'une colomne de la liqueur, qui auroit pour baſe cette portion de ſurface, & pour hauteur la perpendiculaire abbaiſſée du niveau ſur la couche ; mais l'on peut conſidérer l'élément qui répond à une couche, comme une partie de ſa ſurface ; donc la preſſion de cet élément eſt égale au poids d'une colomne de liqueur qui auroit pour baſe cet élément, & pour hauteur celle du liquide qui eſt au-deſſus, ou la perpendiculaire abbaiſſée du niveau ſur la couche horiſontale qui répond à l'élément.

37. On ſuppoſe que l'élément a une largeur indéfiniment petite, afin qu'on puiſſe conſidérer tous ſes points comme étant dans le même niveau ; car ſi l'élément avoit une largeur finie, ſes différens points ne ſeroient pas à la même profondeur ; ils ſeroient

donc inégalement chargez, & la charge totale de l'élément ne pourroit pas être repréſentée par le poids d'une colomne de même hauteur par-tout.

38. COROLLAIRES. 1°. *Si* on ſuppoſe que les élémens d'une ſurface ſont tous égaux entr'eux, les preſſions ou charges qu'ils ſupportent ſont entr'elles comme les différentes hauteurs du liquide qu'ils ont au-deſſus; & ſi on diviſe par la penſée la hauteur totale du liquide en parties égales indéfiniment petites, ces différentes hauteurs croîtront de la ſurface vers le fond, comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. & ſeront dans la même progreſſion; par conſéquent les charges de ces élémens, ſuppoſez égaux entre eux, ſeront auſſi dans la progreſſion des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. *Si* les élémens ſont inégaux en longueur, & qu'on ne conſidere dans chacun qu'un point, les preſſions de ces points ſeront encore dans la progreſſion des nombres, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

39. 2°. *Si* on mene des paralleles à la baſe d'un triangle, elles augmentent du ſommet vers la baſe dans la progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. ces paralleles ou élémens d'un triangle peuvent donc repréſenter les preſſions que ſupportent les points des élémens pris de ſuite ſur une ſurface verticale ou inclinée qui eſt chargée d'une liqueur.

40. 3°. On peut déduire de ce qui vient d'être dit une régle générale pour évaluer l'action totale d'une liqueur ſur les parois des vaſes qui la contiennent, quelles que ſoient d'ailleurs leurs figures & leur ſituation, droite ou inclinée à l'horiſon.

Pour cet effet il faut développer la ſurface intérieure du vaſe, la concevoir étendue ſur un plan horiſontal, & diviſée dans ſes élémens paralleles entr'eux, & à l'horiſon, & imaginer ſur tous les points d'un même élément des perpendiculaires égales entr'elles & à la hauteur du liquide qui eſt au-deſſus de cet élément. *Si* on fait la même opération pour tous les autres élémens de cette ſurface, ces perpendiculaires formeront un ſolide dont le poids repréſentera l'action totale de la liqueur ſur cette ſurface : or ces différens ſolides peuvent être évaluez par les régles de la *Géométrie*, & on en peut déterminer les ſoliditez.

41. On va appliquer la regle aux cas les plus ordinaires, on pourra l'étendre enſuite aux cas plus difficiles.

Suppoſons 1°. que la figure dévelopée eſt un parallelogramme
Fig. 8. ABCD, dont les élémens paralleles entr'eux & à l'horiſon ſoient repréſentez par les paralleles BC, GH, AD, &c. ſi les perpendiculaires CF, BE repréſentent la plus grande hauteur du li-

quide, & que l'élément AD ſoit au même niveau que la liqueur, il eſt viſible que la preſſion de cet élément ſera nulle, & que celle de l'élément BC, qui eſt le plus bas de tous, ſera la plus grande; les preſſions augmenteront donc depuis l'élément AD qui eſt le plus haut, juſqu'à l'élément BC, qui eſt le plus bas, augmenteront, dis-je, dans la progreſſion des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. Or ſi des points E, F on mene les lignes EA, FD, on formera les triangles AEB, DFC, dont les paralleles FC, LH ou EB, IG, &c. repréſenteront de ſuite les preſſions des points B, G, &c. ou des points C, H, & par conſéquent les preſſions cauſées ſur les autres points des élémens BC, GH; car tous les points d'un même élément ſont également preſſez. Cela poſé, ſi à tous les points de l'élément BC on imagine des lignes paralleles & égales à CF ou à BE; qu'à tous les points de l'élément GH on imagine des lignes paralleles & égales à HL ou à GI, & ainſi de ſuite pour les autres élémens, on aura les rectangles BEFC, GILH, &c. qui repréſenteront les preſſions totales des élémens BC, GH. On formera de cette maniere des rectangles dont les hauteurs CF, HL, &c. diminueront dans la progreſſion des membres 1, 2, 3, 4, 5, &c. & qui compoſeront par conſéquent le priſme triangulaire AEBCFD qui repréſente l'action totale de la liqueur ſur la ſurface ABCD.

42. Corollaires. 1°. Il ſuit de-là que la preſſion totale qu'une liqueur éxerce ſur les parois d'un vaiſſeau de figure priſmatique, quel qu'en ſoit le nombre de côtez, fini ou infini, comme dans le cylindre, eſt repréſentée par un priſme triangulaire, qui a pour baſe un triangle rectangle dont les côtez de l'angle droit ſont égaux, l'un à la longueur des côtez du vaiſſeau, & l'autre à la plus grande hauteur du liquide qu'il contient; la hauteur de ce priſme eſt égale au contour ou périmètre pris ou meſuré ſur une perpendiculaire aux côtez du vaiſſeau.

43. 2°. La régle a lieu pour les vaiſſeaux qui ſont droits ou perpendiculaires à l'horiſon, & pour les vaiſſeaux inclinez; car le dévelopement de tout priſme eſt ou un parallelogramme ou un aſſemblage de parallelogrammes dont la charge ou preſſion totale eſt la même que celle d'un ſeul parallelogramme, pourvû que les deux dévelopemens ſoient égaux en ſurface, & que la liqueur ſoit également haute dans les deux vaiſſeaux.

44. 3°. Si le vaiſſeau qui contient la liqueur eſt de figure pyramidale ou conique, le dévelopement ſera un aſſemblage de triangles, ou un ſecteur de cercle; après avoir diviſé les triangles & le ſecteur en leurs élémens paralleles entr'eux, & à l'horiſon, ſi la Fig. 9. 10.

ligne GH repréſente la hauteur du liquide dans le vaiſſeau, & que la pointe ou ſommet A ſoit tourné en bas, il faut élever à ce point une perpendiculaire au plan horiſontal, laquelle ſoit égale à GH, du point G qui eſt l'extrémité ſupérieure de cette ligne, en tirer d'autres aux points B, C, D, E.

Par cette conſtruction on formera une pyramide ou une portion
Fig. 9. de cone qui aura pour baſe le dévelopement du vaſe, & pour
10. hauteur la hauteur du liquide contenu, cette pyramide, ou la portion de cone repréſentera l'action totale de la liqueur ſur les parois du vaiſſeau.

45. Si la pointe eſt tournée en haut, pour lors il faudra élever aux points B, C, D, E des perpendiculaires égales à la ligne
Fig. 9. GH, & des extrémitez ſupérieures de ces perpendiculaires mener
10. d'autres lignes au point A; de cette maniere on formera autant de pyramides que le dévelopement contient de triangles, la ſomme des pyramides exprimera l'action totale de la liqueur ſur les parois du vaiſſeau. Si le dévelopement eſt un ſecteur de cercle, le ſolide formé ſera une portion d'un cylindre dans lequel on auroit creuſé un cone de même baſe & de même hauteur; ce cylindre auroit pour baſe le cercle dont le ſecteur eſt une partie, & pour hauteur la ligne GH.

46. Si le vaſe repréſente une pyramide ou un cone tronquez,
Fig. 11. le dévelopement ſera pour lors un aſſemblage de trapezes, & il
12. ne ſera pas plus difficile de former par la penſée les ſolides qui repréſentent la charge totale des parois du vaiſſeau, ſoit que la grande ouverture ſoit tournée en bas ou en haut. Or il eſt aiſé par les régles de la Géométrie ordinaire d'évaluer ces différens ſolides, ou d'en trouver les ſoliditez, les peſanteurs, & par conſéquent les charges ou preſſions qu'ils repréſentent.

De l'equilibre des liqueurs dans les vaisseaux qui communiquent.

Fig. 13. 47. Si l'on a deux vaiſſeaux ABCE, ECOD dont les fonds EC, EC, qu'on ſuppoſe égaux en tout, ſoient verticaux, qu'on y verſe d'une même liqueur en ſorte qu'elle ſoit à la même hauteur MN dans l'un & dans l'autre, l'expérience montre que ſi l'on joint les deux vaſes, afin que la liqueur puiſſe communiquer & couler de l'un dans l'autre par l'ouverture commune CE, il y aura équilibre entre la liqueur qui eſt contenue dans le grand vaſe, & celle qui eſt dans le petit, ſi elle eſt à la même hauteur dans l'un & dans l'autre, comme on le ſuppoſe, la grande colomne MGLF

ne ſurmontera point la petite colomne ON : on ne fait aucune attention à la liqueur contenue dans l'eſpace horiſontal GBCO, qui par elle-même ne pouſſe pas plus vers la droite que vers la gauche. Or on peut donner pluſieurs preuves de cet équilibre qu'on va déduire dans la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION V.

48. *Si la liqueur contenue dans le vaſe recourbé* ABCD *eſt de niveau ou à la même hauteur dans les deux branches, elle eſt en équilibre, la grande colomne* MGLF *ne pourra ſurmonter la réſiſtance de la petite colomne* ON.

Premiere Demonstration. On peut conſidérer les deux branches ABCE, ECOD, comme deux vaſes qui ont un même fond mobile EC : ſi la colomne MGLF ne fait pas ſur ce fond un effort plus grand que la colomne ON, il eſt viſible que ce fond étant pouſſé en ſens contraires par des forces égales, demeurera en repos, & qu'il y aura équilibre entre la grande & la petite colomne. Fig. 137.

1°. Si les deux colomnes ſont cylindriques, on peut les conſidérer comme deux poids qui preſſent la liqueur contenue dans l'eſpace GBCOEL par les ouvertures GL, OI. Cela poſé, ſelon l'hypothèſe les colomnes ont une même hauteur ; donc elles ſont entr'elles comme les baſes GL, OI, qui ſont les ouvertures par où ces colomnes preſſent la liqueur qu'elles ont au-deſſous ; or le Corollaire 6 de la premiere Propoſition fait voir que ſi deux poids preſſent une liqueur par des ouvertures qui ſoient dans la raiſon des poids, les preſſions ſont proportionnelles aux ſurfaces preſſées, en ſorte que ſi ces deux poids preſſent la même ſurface, la preſſion eſt également forte ; la lame mobile CE eſt donc preſſée d'une force égale par les colomnes MGLF & ON, donc cette lame ou fond mobile EC doit demeurer en repos, & les colomnes qui la preſſent être en équilibre.

2°. Si la branche OD eſt conique, il faut concevoir que la liqueur qu'elle contient eſt diviſée en tranches ou lames de même épaiſſeur, la colomne GF en contiendra le même nombre, & elles auront une épaiſſeur égale à celle des tranches de la colomne ON, puiſque ces colomnes ont ſelon l'hypothèſe la même hauteur ; cela étant, il eſt certain que deux de ces tranches priſes à volonté dans les deux colomnes ſont dans la raiſon de leurs baſes, puiſqu'elles ont la même épaiſſeur ; or ces baſes ſont les ouvertures par où elles preſſent la lame EC, c'eſt-à-dire, que ces deux tran-

ches preſſent une même ſurface par des ouvertures qui leur ſont proportionnelles ; donc elle font la même impreſſion ſur la lame EC ; d'où il eſt aiſé de conclure que la ſomme des tranches d'une part ne pouſſe pas la lame EC avec plus de force que fait la ſomme des tranches de l'autre part ; donc la colomne conique OD doit être en équilibre avec la colomne cylindrique GF.

IIde. DEMONSTRATION. Dans cette ſeconde maniere de prouver, nous raiſonnerons d'après un principe qu'on a établi dans le Livre IV(36), lorſqu'on a démontré la Propoſition fondamentale de mécanique de M. Deſcartes. Voici ce principe : Si une puiſſance tend à mouvoir un poids contre ſa direction naturelle, il réſiſte d'autant plus, que cette force tend par un ſeul & même effort à lui faire parcourir un plus grand eſpace, parce que la force qui eſt appliquée au poids ſe met dans la néceſſité de ſurmonter la réſiſtance abſolue du poids, d'autant plus ſouvent que l'eſpace parcouru eſt plus grand. Cela poſé, ſi la colomne GF deſcend, ou plutôt tend à deſcendre tant ſoit peu, il eſt néceſſaire que la colomne ON monte ; & s'il étoit poſſible qu'elle ne montât qu'autant que la colomne GF deſcend, il eſt bien certain qu'elle empêcheroit ou rendroit inutile une partie de la force de la colomne GF ; en ſorte que ſi la colomne ON eſt la dixiéme partie de la colomne GF, la colomne GF perdroit la dixiéme partie de ſa force en s'éxerçant ſur la colomne ON ; mais ſi la colomne GF ne peut deſcendre tant ſoit peu, qu'elle ne faſſe parcourir ou qu'elle ne tende à faire parcourir à la colonne ON un eſpace dix fois plus grand, il eſt viſible que la réſiſtance de la colomne ON ſera dix fois plus grande, & par conſéquent ſa force relative ſera égale à l'action de la colomne GF, & la tiendra en équilibre : or la colomne GF ne peut faire effort pour deſcendre tant ſoit peu, qu'elle ne contraigne la colomne ON à parcourir contre ſa direction un eſpace dix fois plus grand. Si la colomne GF tend à deſcendre d'un milliéme de ligne, il eſt néceſſaire que la liqueur qu'elle tend à faire entrer dans la branche OD y occupe une hauteur dix fois plus grande, c'eſt-à-dire, un centiéme de ligne, puiſque la baſe du petit cylindre de liqueur qui entre dans la branche OD a une baſe dix fois moindre que n'auroit la branche GF ; la réſiſtance de la colomne ON eſt donc égale à la peſanteur abſolue de la colomne GF ; donc ces deux colomnes ſont en équilibre. Si la colomne ON étoit de figure conique, ſon volume ſeroit moindre qu'étant cylindique, cependant la colomne GF ne pourroit pas non plus en ſurmonter la réſiſtance, parce que les côtez du tuyau étant inclinez l'un à l'autre, s'oppoſeroient

ſeroient au mouvement de la colomne ON, & détruiroient une partie de la force de la colomne GF; d'ailleurs la colomne ON étant moindre que ſi elle étoit cylindrique, ne pourroit être mûe, à moins qu'elle ne reçût une plus grande viteſſe, ce qui augmenteroit ſa réſiſtance; ces deux cauſes jointes enſemble ſuppléent à la foibleſſe de la colomne ON, & ont le même effet que ſi elle étoit cylindrique.

49. On peut dire en troiſiéme lieu, que toute la colomne GF n'agit pas ſur la colomne ON; car il eſt évident que l'effort de cette colomne eſt ſoutenu par la réſiſtance du tuyau EIOC, & qu'il n'y a de cette colomne que la partie qui répond à l'ouverture O, qui tende à ſoulever la liqueur ON.

50. Remarque. La Propoſition qu'on vient de démontrer ſouffre une exception que voici. Si l'on verſe de l'eau dans un tuyau recourbé, dont l'une des branches ſoit d'un fort petit diametre, comme ſont les tuyaux qu'on appelle *Capillaires*, elle monte dans la petite branche au-deſſus du niveau de la groſſe, & s'y tient; mais ſi on fait l'expérience avec du mercure, il s'arrête dans la petite branche au-deſſous du niveau de la groſſe. M. Carré de l'Académie des Sciences, dans un Mémoire, année 1705, entreprend de développer la cauſe de cet effet. L'eau a la propriété de s'attacher au verre, il arrive donc que le filet d'eau qui s'inſinue dans le tuyau capillaire eſt ſoutenu en partie par ſon adhérence aux parties intérieures du tuyau, elle devient par là moins peſante, ou plutôt elle éxerce moins ſa peſanteur ſur la colomne de la groſſe branche, laquelle étant ainſi ſupérieure en force, éleve l'eau de la branche capillaire à une hauteur où elle puiſſe retrouver dans la quantité la force qu'elle perd par l'adhérence. Deux cauſes concourent donc à tenir l'eau de la branche capillaire au-deſſus du niveau, 1°. l'adhéſion de l'eau au verre, 2°. la force de l'eau contenue dans la groſſe branche, laquelle devient ainſi ſupérieure à celle de l'eau de la petite: d'où l'on voit que la ſeule adhéſion ou la ſeule propiété de s'attacher ne ſuffit pas pour élever l'eau de la branche capillaire au-deſſus du niveau, il faut outre cela une force qui oblige l'eau de monter contre ſa propre peſanteur.

Or voici une ſeconde expérience où l'eau monte dans un tuyau capillaire, quoiqu'il n'y ait aucune cauſe ſenſible qui doive produire cette aſcenſion. Si l'extrêmité d'un tuyau capillaire touche la ſurface de l'eau ſans s'y enfoncer, l'eau monte & ſe met au-deſſus du niveau. Quelle eſt la cauſe qui l'oblige ainſi de monter? M. Carré trouve encore qu'il y a une cauſe de l'aſcenſion de l'eau.

L'eau s'attache au bord du verre, les colomnes qui répondent à l'ouverture du tuyau en deviennent par-là moins peſantes ou plus foibles, & les colomnes environnantes plus fortes; or cet excès de force eſt employé à pouſſer dans le tuyau capillaire l'eau qui répond à ſon ouverture.

Voici la preuve que l'adhérence de l'eau ou la propriété qu'elle a de s'attacher, contribue avec la peſanteur à la tenir dans les tuyaux capillaires au-deſſus du niveau : ſi on enduit de ſuif le dedans de ces tuyaux, l'eau ne s'y met que de niveau; ſi on enfonce la partie qui eſt enduite, au-deſſous de la ſurface de l'eau, elle monte à ſon ordinaire au-deſſus du niveau; s'il n'y a qu'un côté qui ſoit enduit, l'eau ſe met de niveau de ce côté-là, & monte au-deſſus de l'autre côté qui n'eſt point enduit. Or on ſçait que l'eau ne s'attache point au ſuif. L'expérience fait donc voir que dès-là que l'eau perd dans les tuyaux capillaires l'appui qui la ſoutient, elle ſuit la régle générale, qui eſt d'avoir toutes ſes colomnes au même niveau.

51. Cette explication, toute ſimple & méchanique qu'elle eſt, eſt néanmoins inſuffiſante, & on ne peut pas l'adopter pour tous les cas ſemblables. M. Petit le Médecin, de l'Académie des Sciences, rapporte & fait une expérience ſur l'aſcenſion de l'eau dans les tuyaux capillaires, où l'explication de M. Carré ne peut pas trouver ſa place. On tient verticalement un tuyau capillaire, on verſe ſur ſa ſurface extérieure quelques gouttes d'eau aſſez groſſes pour pouvoir boucher l'ouverture inférieure du tuyau, & l'on voit qu'auſſi-tôt qu'elles ſont deſcendues juſques-là, elles rebrouſſent chemin, montent au-dedans du tuyau, & y montent à la même hauteur où l'eau ſe ſeroit élevée ſi le tuyau avoit été trempé à l'ordinaire dans un vaiſſeau. Il n'importe aucunement que l'on verſe les gouttes d'eau d'une hauteur plus ou moins grande, la ſeule condition néceſſaire eſt qu'elles ſoient au moins de même diametre que le tuyau capillaire : l'expérience réuſſit dans un lieu vuide d'air & en plein air. (Voyez les *Mémoires de l'Académie, année* 1724, *pag.* 98). Or il eſt bien certain que les colomnes environnantes n'ont pas agi à l'extrémité du tuyau par l'excès de leur peſanteur, pour contraindre les gouttes d'eau de rebrouſſer chemin, & de monter dans le tuyau. Le phenomene dont il s'agit dépend donc d'une cauſe différente de celle-là. Il faut cependant convenir que l'adhérence a beaucoup de part à l'effet produit, en ce qu'elle rend l'action de la peſanteur inutile, & l'empêche de détacher les gouttes d'eau lorſqu'elles ſont parvenues à l'extrémité du tuyau, mais

cette adhérence ne ſuffit pas pour élever d'elle-même les gouttes d'eau dans le tuyau, en leur faiſant prendre une détermination toute contraire à celle qu'elles avoient auparavant, il faut une cauſe active, une force pour produire cet effet. Cette force ne paroît pas être différente de celle qui réünit les parties des liqueurs en molecules, & qui tend à leur donner la figure ſphérique, comme on l'a expliqué ci-deſſus.

Lorſque les gouttes d'eau ſont deſcendues au bas du tuyau, & qu'elles en bouchent l'ouverture en s'y attachant, l'équilibre qui eſt entre les parties de la goutte (abſtraction faite de l'action de la peſanteur, laquelle eſt ſurmontée par l'adhérence) eſt rompu : avant que la goutte s'attachât, elle étoit pouſſée également en tout ſens, c'eſt pour cette raiſon qu'elle affecte une figure ronde ; après qu'elle s'eſt attachée, les parties qui ſont à l'endroit du contact ceſſent d'être pouſſées de la circonférence vers le centre de la goutte, puiſqu'elles ſont comme collées au verre, l'équilibre qui étoit auparavant entre les parties de la goutte eſt donc rompu, la goutte eſt pouſſée plus fortement du dehors en dedans du verre, que du dedans en dehors, c'eſt pourquoi elle eſt contrainte de fluer & de monter dans le tuyau. Lorſqu'on veut déterminer par les loix de la Phyſique la nature de cette force, pluſieurs difficultez ſe préſentent ; de-là vient le partage des ſentimens & le peu d'accord qu'il y a entre les Philoſophes ſur ce point. On a déja remarqué plus haut que dans le Syſtême des Phyſiciens qui expliquent tous les mouvemens par l'impulſion, l'idée de M. de Mairan avoit toute la vraiſemblance poſſible, & qu'elle paroiſſoit la mieux établie. Voyez l'*Hiſtoire de l'Académie, année* 1724, *page* 13.

52. Pour ce qui eſt du mercure, il doit demeurer dans la branche capillaire au-deſſous du niveau.

Pour voir la raiſon de cet effet, on remarquera que dans la colomne de mercure qui eſt dans la grande branche, il n'y a que le filet qui répond à l'ouverture de la branche capillaire qui agit ſur le mercure qui eſt dans cette petite branche, le reſte de la liqueur contenue dans la grande eſt ſoutenu ou arrêté par les parois du tuyau. Cela poſé, on ſçait que le mercure ne mouille point le verre ou ne s'y attache point, au contraire les parties de cette liqueur ſont fort adhérentes les unes aux autres ; il faut donc concevoir deux filets de mercure qui ſe contrebalancent, celui qui eſt dans le tuyau capillaire n'eſt point ſoutenu par ſon adhérence au verre, mais le filet qui eſt engagé dans la colomne de la grande branche eſt adhérent au mercure qui l'environne, il perd donc une

partie de ſa force, il doit donc occuper une plus grande hauteur dans la groſſe branche pour contrepeſer le filet qui réagit de toute ſa force. Si le tuyau capillaire eſt enduit de ſuif, le mercure s'y met au niveau de celui de la grande branche, parce que pour lors il s'attache aux parois du verre, & perdant par cette adhérence une partie de ſa force, il eſt néceſſaire qu'il occupe une plus grande hauteur que lorſqu'il ne s'attache point, par-là il conſerve aſſez de force pour réſiſter au filet de la groſſe branche.

De l'équilibre des Liqueurs de Différentes peſanteurs ſpécifiques.

53. On rappelle ici deux Propoſitions du ſecond Livre ſur le rapport des poids, lorſqu'on compare les peſanteurs abſolues de deux volumes égaux de matieres différentes, le rapport qui eſt entre les poids de ces deux volumes égaux, eſt appellé leur *Peſanteur ſpécifique :* ainſi ſi en comparant les poids d'un pied cube de vif-argent & d'un pied cube d'eau, on trouve que le poids de vif-argent eſt à celui du pied cube d'eau, comme 14 eſt à 1, on dit que la peſanteur ſpécifique du vif-argent eſt à celle de l'eau, comme 14 eſt à 1, & que la peſanteur ſpécifique de l'eau eſt à celle du vif-argent comme 1 eſt à 14, ou bien qu'elle eſt $\frac{1}{14}$ de la peſanteur du vif-argent.

54. *Lorſque deux corps peſent également, qu'ils peſent, par éxemple, l'un & l'autre 14 livres, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles réciproquement comme les volumes de ces poids égaux.* Car ſuppoſons que deux maſſes, l'une de vif-argent, & l'autre d'eau, peſent chacune 14 livres, & que le volume de vif-argent ſoit 14 fois moindre que le volume d'eau, il eſt bien certain que ſi on rend le volume d'eau 14 fois plus petit, c'eſt-à-dire, qu'on l'égale à celui du vif-argent, il peſera quatorze fois moins que celui du vif-argent, auquel il eſt égal, par conſéquent les peſanteurs ſpécifiques de l'eau & du vif-argent ſont entr'elles, comme 1 & 14, c'eſt-à-dire, qu'elles ſont entr'elles réciproquement, comme les volumes dont les poids ſont égaux.

PROPOSITION VI.

Fig. 14. 55. *Si on verſe dans un tuyau recourbé* ABCD *deux liqueurs qui ne ſe mêlent point, elles ſeront en équilibre ſi elles occupent des hauteurs qui ſoient entr'elles réciproquement comme leurs peſanteurs ſpécifiques.*

DEMONSTRATION. Suppoſons que la liqueur la moins

peſante occupe la hauteur ON, ſi on tire la ligne horiſontale GIEO, il eſt certain que la liqueur qui eſt au-deſſous de cette ligne étant de niveau, & de même peſanteur ſpécifique, eſt en équilibre avec elle-même; ainſi cette liqueur ne tend aucunement par elle-même à ſurmonter ni la colomne GF, ni la colomne EN; il faut donc prouver que ſi ces colomnes ont leurs hauteurs GM, ON dans la raiſon réciproque de leurs peſanteurs ſpécifiques, elles ſont en équilibre. 1°. Si les branches du vaſe ſont également larges, & que la baſe GI ſoit égale à la baſe EO, les colomnes GF, EN ayant des baſes égales, ſont entre elles comme les hauteurs GM, ON; or par l'hypothèſe les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs contenues dans le tuyau recourbé ſont entr'elles réciproquement comme les hauteurs GM, ON; donc les peſanteurs ſpécifiques de ces liqueurs ſont entr'elles réciproquement comme les volumes des colomnes GF, EN, donc les poids abſolus de ces colomnes ſont égaux. On peut donc conſidérer ces deux colomnes comme deux poids égaux qui preſſent la liqueur qui eſt au-deſſous du niveau GO par des ouvertures égales; donc les preſſions contraires qu'ils cauſent ſur cette liqueur ſont auſſi égales, l'une d'elles ne peut donc l'emporter ſur l'autre, par conſéquent les colomnes ſont en équilibre.

2°. Si les baſes GI, EO ſont inégales, les poids ou les peſanteurs abſolues des colomnes GF, EN ſont entr'elles, comme les baſes inégales GI, EO, puiſque ſi ces baſes étoient égales, les colomnes peſeroient également; les colomnes GF, EN ſont donc deux poids qui preſſent la liqueur qu'il y a au-deſſous de l'horiſontale GO, par des ouvertures qui ſont dans la même raiſon que ces poids, donc les preſſions contraires qu'ils éxercent ſur la liqueur ſont égales; donc l'une ne peut ſurmonter l'autre, par conſéquent les colomnes GF, EN ſont en équilibre (12. 15). On peut donc conclurre en général que ſi les liqueurs contenues dans le vaiſſeau recourbé ABCD ont leurs hauteurs entr'elles réciproquement comme leurs peſanteurs ſpécifiques, elles ſont en équilibre. Fig. 15.

On pourroit encore démontrer cette Propoſition de la même maniere qu'on a démontré la précédente, en faiſant voir que la liqueur contenue dans une branche ne peut pas contraindre celle qui eſt dans l'autre de monter. 1°. Cela eſt évident ſi les branches ſont égales en largueur, puiſqu'alors les poids abſolus ſont égaux de part & d'autre, l'un ne peut donc pas obliger l'autre de monter. 2°. Si les branches ſont inégalement larges, il eſt vrai que le poids

de la liqueur de la petite branche ſera moindre, mais d'un autre côté la colomne de la groſſe branche trouvera dans la petite colomne une réſiſtance plus grande, puiſqu'elle ſera néceſſitée à lui faire parcourir contre ſa direction un eſpace d'autant plus grand, qu'elle ſera plus petite ; d'où l'on conclura, comme dans la Propoſition précédente, que la colomne la plus peſante ne peut pas ſurmonter la moins peſante.

En nombres. Suppoſons que la colomne GF eſt de vif-argent, & Fig. 14. la colomne EN de l'eau, on ſçait que les peſanteurs ſpécifiques de ces deux liqueurs ſont entr'elles comme 14 & 1 ; donc ſelon l'hypothèſe la hauteur GM ſera à la hauteur ON, comme 1 eſt à 14 ; ainſi ſi la colomne EN avoit la même hauteur que la colomne GF, elle peſeroit 14 fois moins, ſuppoſé que les baſes GI, EO fuſſent égales ; mais puiſque la hauteur ON eſt 14 fois plus grande que GM, il eſt viſible que le poids de la colomne EN ſera égal à celui de la colomne GF, ſi les baſes GI & EO ſont égales ; donc les colomnes GF, EN cauſent des preſſions égales ſur la liqueur qui eſt au-deſſous de l'horiſontale GO. Si les baſes GI, EO ſont inégales, que la baſe EO ne ſoit que la moitié de la baſe GI, pour Fig. 15. lors la colomne EN ne ſera auſſi que la moitié d'une colomne d'eau qui peſeroit autant que la colomne GF, par conſéquent les colomnes GF & EN ſont entr'elles comme les baſes GI, EO ; donc elle produiſent ſur la liqueur qui eſt au-deſſous de l'horiſontale GO des preſſions égales qui ne peuvent ſe ſurmonter l'une l'autre (12. 15).

56. COROLLAIRE. Cette Propoſition fournit un moyen facile de comparer les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs. Qu'on verſe dans un tuyau recourbé deux liqueurs (il faut qu'elles ſoient de nature à ne ſe pas mêler, comme l'huile, l'eau, le vif-argent, &c.) dans l'équilibre ces liqueurs doivent occuper des hauteurs qui ſoient entr'elles réciproquement comme les peſanteurs ſpécifiques, c'eſt pourquoi ſi on meſure les deux hauteurs, on pourra conclure que la peſanteur ſpécifique de la liqueur la plus peſante eſt repréſentée par la grande hauteur, & que celle de la moins peſante eſt exprimée par la moindre.

DE L'ÉQUILIBRE DES LIQUEURS DANS DES VASES ſouples & qui changent facilement de figure dans tous les ſens.

57. L'équilibre ne ſe fait pas autrement dans les vaſes ſouples dont il s'agit ici ; tels ſont tous les vaſes de peau, les veſſies, &c. que dans les vaiſſeaux qui réſiſtent, il y a cependant quelques pro-

proprietez à conſiderer, & certains effets à expliquer qui ne ſe trouvent pas dans les vaiſſeaux ordinaires, c'eſt pourquoi il n'eſt pas inutile de dire quelque choſe en particulier des vaſes qui prennent toutes les figures qu'on leur veut donner.

58. 1°. S'il y a de la liqueur dans un ſac de peau ou dans une veſſie BCEG à laquelle on ait adapté deux tuyaux AB, CD, on conçoit qu'il y aura équilibre ſi la liqueur eſt au même niveau dans les deux tuyaux quelles que ſoient d'ailleurs les ouvertures CE, BG, & la figure de la veſſie; car on prouvera, comme on a fait ci-devant, que les preſſions que ſupportent les lames de liqueur qui ſont aux ouvertures BG, EC, ſont dans la raiſon des ouvertures, c'eſt pourquoi une colomne ne doit point l'emporter ſur l'autre. On pourroit encore conſidérer ce vaiſſeau comme étant compoſé de deux vaſes ABNMG, DCNME qui communiquent l'un dans l'autre, & qui ont pour baſe commune la lame MN qui eſt la plus baſſe de toutes; d'où l'on conclura encore que ſi la liqueur eſt également haute dans les deux tuyaux, la lame MN ſera pouſſée en ſens contraires par des efforts égaux, par conſéquent il y aura équilibre. Fig. 16.

59. 2°. Si l'on retranche le tuyau CD, & qu'au lieu de la colomne de liqueur que ce tuyau contient on ſubſtitue un poids P qui preſſe par l'ouverture EC, il y aura encore équilibre entre la liqueur contenue dans le tuyau AB & le poids P, ſi ce poids & la colomne AB ſont dans la raiſon des ouvertures EC, BG, puiſque le poids P & la colomne de liqueur dont il tient la place, cauſent la même preſſion à l'ouverture EC. Fig. 17.

60. 3°. Si on ſuppoſe que l'ouverture EC eſt fermée, & que l'on mette ſur la veſſie un poids P, il eſt évident qu'il l'applatira, & parce qu'on ſuppoſe que la veſſie eſt parfaitement ſouple, molle & flexible, il eſt certain qu'on peut conſiderer la portion de ſa ſurface par où le poids P la touche comme une ouverture par laquelle ce poids communique ſa force à la liqueur; car lorſque le poids P preſſe par une ouverture EC, ſa force ſe diſtribue d'abord aux molecules qui ſont preſſées immédiatement, en ſorte que plus leur nombre eſt grand, c'eſt-à-dire, plus l'ouverture EC eſt grande, moins chaque molecule eſt preſſée, plus l'ouverture eſt petite, le poids étant le même, plus la preſſion cauſée ſur chacune d'elles, eſt grande; de ces premieres molecules, l'action du poids eſt enſuite communiquée à toute la liqueur, de maniere que les ſurfaces égales à l'ouverture EC, ſont autant preſſées que la lame de liqueur qui lui répond; les ſurfaces qui ſont plus grandes ou plus petites, ſupportent des efforts qui leur ſont Fig. 18.

proportionnels : or puiſque la veſſie eſt ſuppoſée parfaitement ſouple, molle & flexible, il n'y a aucun doute que ſi le poids P s'appuie ſur une partie de ſa ſurface, il ne preſſe la lame de liqueur qui lui répond immédiatement avec la même force que ſi la pellicule qu'il touche étant déchirée, il la preſſoit par un contact immédiat. C'eſt pourquoi ſi le poids P eſt à la colomne AB comme la ſurface EC par où il touche la veſſie eſt à l'ouverture BG, il y aura équilibre, & la maniere de le déterminer ſera encore la même que dans l'hypotheſe de la Fig. 16.

62. 4°. Plus la ſurface touchée ſera petite & le poids P grand, plus la colomne AB qui fait équilibre avec ce poids ſera haute, car la baſe de cette colomne étant toujours la même, ſon poids doit augmenter à raiſon de ſa hauteur. Cela poſé, dans l'équilibre la colomne AB & le poids P ſont dans la raiſon de l'ouverture BG & de la ſurface touchée EC ; donc l'ouverture BG étant la même, plus la ſurface touchée EC ſera petite, plus la colomne BG ſera peſante, & par conſéquent plus haute, en ſuppoſant que le poids P ne change point ; mais ſi le poids P augmente, il faudra que la colomne AB s'éleve encore plus haut pour contrepeſer ce ſurcroit de peſanteur du poids P.

62. 5°. Si la veſſie eſt preſſée en divers ſens par des puiſſances appliquées au dehors à ſa ſurface, & dont l'une d'elles peut être répréſentée par le poids P, chacune ſera à la colomne AB comme la ſurface touchée ou preſſée par cette puiſſance eſt à l'ouverture BG, car la portion de la ſurface touchée ou preſſée par une puiſſance, eſt comme une ouverture par où elle comprime la liqueur de la veſſie : or il eſt évident que ſi les preſſions que ces puiſſances exercent ſont dans la raiſon des portions des ſurfaces applaties ou preſſées, il y aura équilibre entre toutes ces puiſſances & la colomne AB ; car ce ſont comme divers poids qui preſſent la liqueur d'un vaiſſeau par differentes ouvertures, s'ils ſont dans la raiſon des ouvertures, il doit y avoir équilibre (12, 13, 14) ; donc réciproquement ſi toutes ces puiſſances ſont en équilibre entr'elles & avec la colomne AB, les preſſions ſont entr'elles comme les portions de ſurface touchées & preſſées par où la preſſion ſe communique à la liqueur ; par conſéquent chaque puiſſance eſt à la colomne AB, comme la portion de ſurface qu'elle applatit en la preſſant, eſt à l'ouverture BG.

63. Il ſuit de-là que quelque ſoit le nombre des puiſſances qui compriment une veſſie par dehors, quelle que ſoit auſſi la figure qu'elles lui font prendre, ſi l'une d'elles, par exemple, le poids P

eſt

eſt connu, & que la ſurface EC que ce poids touche, & l'ouverture BG ſoient auſſi connues, on pourra déterminer la hauteur de la colomne AB, car le poids P & celui de la colomne AB, ſont entr'eux comme les ſurfaces EC, BG; en ſorte que ſi l'on connoît trois termes de cette proportion, le quatriéme pourra être facilement déterminé.

64. 6°. Si une veſſie eſt comprimée en dehors par un ſeul poids P au moyen de pluſieurs cordelettes FGC, FDC, FEC, &c. qui paſſant pardeſſus la veſſie, partent toutes d'un point fixe F, & aillent aboutir au point C où le poids P eſt ſuſpendu, on pourra avoir le rapport du poids P à la colomne AB en meſurant la ſurface plane L commune à la veſſie & au plan XY. Car il faut concevoir que la réſiſtance du point fixe F tient lieu d'un poids R, & que la veſſie eſt applatie en L par le poids P au moyen de la réſiſtance en F, de même que ſi une puiſſance N étant dirigée ſuivant NL, ſoutenoit la veſſie avec les deux poids P, R ſuſpendus en C & en F; or par la propriété du levier, la puiſſance N eſt égale à la ſomme des poids P, R; donc ſi le rapport de la ſurface L à l'ouverture BG eſt connu, le rapport de la ſomme des poids P, R ou de la puiſſance N à la colomne AB, ſera auſſi connu, on pourra donc déterminer le poids de la colomne AB. Car la ſurface L eſt à l'ouverture BG comme la ſomme des poids P+R ou la puiſſance N eſt au poids de la colomne AB. Fig. 19.

65. Si le poids R n'eſt pas égal au poids P, il pourra être connu par la propriété du levier, les diſtances CL, FL étant données.

66. 7°. Si on ne connoît point l'applatiſſement que le poids P cauſe ſur la veſſie en L, ou bien même ſi ce poids la comprime de maniere à n'en cauſer aucun qui ſoit ſenſible, comme ſi la veſſie étoit ſuſpendue en l'air, & le poids P à ſon extrêmité inférieure C; il eſt viſible que pour déterminer le rapport du poids P à celui de la colomne AB dans le cas d'équilibre, il faudroit ſçavoir quelle figure les cordelettes prennent en comprimant la veſſie; car la compreſſion ſera différente, & conſéquemment la hauteur de la colomne AB, ſelon les changemens de figure qui arriveront à la veſſie & aux cordelettes qui la ſerrent de toutes parts; la colomne AB tend à gonfler la veſſie, & à la rendre convexe le plus qu'il eſt poſſible, & le poids P tend à l'allonger & à diminuer ſon gonflement; afin donc de bien entendre en quoi conſiſte l'action réciproque que le poids P & la colomne AB éxercent l'un ſur l'autre par le moyen de la veſſie, il eſt néceſſaire de connoître quelle eſt ſa figure, & juſqu'à quel point elle eſt gonflée.

67. 8°. Quoique l'on ignore quelle eſt la figure d'une veſſie ainſi tirée par le poids P, on peut cependant avoir le rapport des hauteurs de la colomne AB ſelon les différens changemens de figure auxquels la veſſie eſt ſujette, ſi l'on peut connoître par le toucher ou autrement, les divers degrez d'endurciſſement qui lui arrivent ; car ſi la veſſie devient 2, 3, 4 fois plus dure, ce ne ſera que parce que la colomne AB éxerce ſur la liqueur qu'elle contient une preſſion 2, 3, 4 fois plus grande, il faut donc qu'elle ſoit 2, 3, 4 fois plus haute pour produire cet effet : or on pourra juger du degré d'endurciſſement, ſi pour applatir la veſſie d'une égale ou de la même quantité, il faut employer différentes forces ; ſi la force employée eſt double triple, la veſſie ſera deux ou trois fois plus dure.

Fig. 20. 68. 9°. Si pluſieurs veſſies communiquent les unes aux autres, l'équilibre entre le poids P & la colomne AB ſuit la même loi que ſi ces deux puiſſances n'agiſſoient l'une contre l'autre qu'au moyen d'une ſeule veſſie ; ainſi dans l'équilibre le poids P & la colomne AB ſont dans la raiſon de la partie touchée par le poids à la ſomme des ouvertures B, G, &c. Et ſi le poids P & la colomne AB ſont dans ce rapport, il y aura équilibre. Car puiſque la liqueur d'une veſſie communique avec la liqueur de pluſieurs autres, on peut conſiderer leur aſſemblage comme un ſeul vaſe, la liqueur y eſt également preſſée dans toutes de même que ſi elle étoit contenue dans une ſeule, l'équilibre entre le poids P & la colomne AB ne ſe fait donc pas autrement que s'ils ne comprimoient que cette ſeule veſſie. La figure & le nombre ne changent rien dans cet équilibre, il eſt bien vrai que plus il y a de veſſies poſées les unes ſur les autres, elles peuvent en ſe gonflant élever le poids P à une plus grande hauteur que ſi elles étoient en moindre nombre ; mais c'eſt le rapport de la ſurface touchée EC, à la ſomme des ouvertures B, G, &c. qui détermine celui que le poids P & la colomne AB doivent avoir dans l'équilibre, parce que la ſurface EC eſt comme une ouverture par où le poids P preſſe la liqueur contenue dans les veſſies ſur leſquelles il eſt immédiatement appuyé.

69. 10°. Si ces veſſies ſont ſous une même envelope & qu'elles ſoient toutes preſſées par le poids P, il produira ſur les plus baſſes qui touchent le plan XY un applatiſſement en L ; cette ſurface applatie de la ſorte au moyen de l'envelope qui eſt tirée & bandée par le poids P, peut ſervir à déterminer le rapport de ce poids à celui de la colomne AB, comme dans le nombre 6e. Fig. 19.

Mais ſi la veſſie eſt ſituée de maniere que le poids P n'y produiſe aucun applatiſſement ſenſible comme dans le cas où elle ſeroit toute ſoutenue en l'air, pour lors afin de bien entendre l'équilibre il faudroit déterminer la figure de l'envelope, & la maniere dont ſes différentes parties preſſent les veſſies, pour la raiſon qu'on en a donné au nombre 7.

70. 110. Cependant quoique dans l'hypotheſe du nombre précedent on ne puiſſe pas déterminer le rapport du poids P au poids de la colomne AB ſans connoître la figure de l'envelope qui ſerre toutes les veſſies, & les preſſe les unes contre les autres, on peut néanmoins avoir le rapport des différentes hauteurs de cette colomne, ſuppoſé que les divers degrez d'endurciſſement ſoient connus, ainſi qu'on vient de l'expliquer au nombre 8.

71. Remarque. Les Philoſophes ſuppoſent ordinairement que les muſcles ſont compoſez de veſicules, ou du moins que lorſqu'ils ſe contractent, & que par quelque effort ils ſe durciſſent, leur matiere ſe transforme & ſe diſpoſe en petites cellules; ils diſent auſſi que la liqueur qui y couloit auparavant avec liberté, s'y trouve arrêtée par les ligatures qui ſe font d'itervalle en intervalle ſuivant la longueur du muſcle, & parce que d'un côté elle eſt réduite à occuper un moindre eſpace, & que d'un autre côté elle continue d'être pouſſée par la force qui tend à la faire couler, elle preſſe les parois des veſicules, les gonfle & leur donne une conſiſtance aſſez grande pour ſupporter des poids conſidérables.

72. Dans l'action d'un muſcle on peut diſtinguer deux forces, l'une qui le gonfle, l'autre force conſiſte dans la charge que le muſcle ſoutient à l'endroit de l'os où il eſt attaché; cette force ſe détermine par la proprieté fort connue du levier: ainſi, par exemple, ſi un poids eſt ſuſpendu à l'extremité de l'avant bras, & que le tendon ou l'attache du muſcle ſoit dix fois moins éloignée du point fixe autour duquel l'avant bras tourne, que n'eſt le poids qui eſt ſuſpendu à ſon extremité, le tendon ſoutiendra un effort dix fois plus grand que le poids ſuſpendu. Si un homme peut ſoutenir avec la main un poids de 50 livres en tenant l'avant bras dans une ſituation horizontale, le tendon du muſcle moteur ſera tiré avec un effort de 500 livres. Pour avoir la force qui gonfle le muſcle, il faut la comparer avec celle dont on vient de parler, laquelle le tire & tend à l'allonger. Suppoſons que la veſſie de la Fig. 19, compoſée d'une multitude de veſicules, puiſſe exécuter les mouvemens ſemblables à ceux d'un muſcle, le poids de la colomne de liqueur répréſentera la force qui gonfle le muſcle, l'ou-

verture BG, les ouvertures qui laiſſent entrer la liqueur dans les veſicules, les points F, C ſeront les extrêmitez ou attaches du muſcle, les poids P, R les charges qu'elles ſoutiennent dans les efforts que le muſcle fait : or ſuivant les principes établis pour déterminer le poids de la colomne AB ou la force dont ce poids tient la place, il faut connoître l'ouverture BG & l'applatiſſement que le poids cauſe ou peut cauſer ſur le muſcle : plus l'ouverture BG ſera petite, moins il faudra de force pour le gonfler. On avertira en paſſant que la recherche de la force des muſcles par la connoiſſance de la figure qu'ils prennent dans leur action, eſt difficile & épineuſe.

73. On remarquera encore que la force qui peut tenir le poids P en équilibre, ne ſuffiroit pas pour le mouvoir & pour faire exécuter au muſcle les mouvemens dont il eſt capable. Car comme le tuyau ABG ne communique pas immédiatement avec toutes les veſicules, il faut que dans le mouvement du muſcle la liqueur paſſe des premieres aux ſecondes, des ſecondes au troiſiémes, &c. Or ſelon les loix de l'hydraulique, dans ce flux la liqueur perd de ſa viteſſe, il peut même ſe faire qu'elle la perde toute en paſſant des premieres veſicules aux ſecondes, qu'elle la perde toute en paſſant des ſecondes aux troiſiémes, &c. en ſorte que la force qui la pouſſe ſoit obligée de renouveller toute cette viteſſe à chaque fois qu'elle ſort de quelques veſicules pour entrer dans les ſuivantes ; & parce que ces mouvemens ſont prompts & ſubits, qu'ils ſe font, pour ainſi dire, tous en un inſtant, il faut que la force ſe multiplie tout autant de fois qu'il y a des nouveaux rangs de veſicules où la liqueur doit paſſer.

De la peſanteur de l'air.

74. L'action que l'air exerce ſur les corps terreſtres ſe diverſifie en tant de manieres qu'on ne ſçauroit s'en former une idée juſte, à moins que d'entrer dans un certain détail de ſes effets ; on ſe contentera d'expoſer ceux qui ſont les plus remarquables, & qui peuvent ſervir de principe pour expliquer pluſieurs autres effets qu'on rapporte à l'air comme à leur cauſe.

75. On a cru durant pluſieurs ſiecles que l'air étoit leger, & que different en cela des autres corps terreſtres, il n'avoit aucune tendence vers le centre de la terre. Ce n'eſt que dans ces derniers tems qu'on a découvert que l'air eſt peſant, & que le même principe qui tend à faire deſcendre les corps, agit auſſi ſur cet élément. Lorſque les Philoſophes ſe furent aſſurez de la vérité du fait, ils

firent diverſes expériences pour la mettre dans tout ſon jour, & pour être en état de diſſiper les doutes & d'éclaircir les difficultez qu'on pourroit leur faire. Galilée fut le premier, il introduiſit avec une ſeringue une grande quantité d'air dans un balon ou bouteille ronde, de verre, & après avoir réduit par la compreſſion un gros volume d'air à occuper un petit eſpace, il boucha la bouteille avec un robinet, la mit dans une balance pour la peſer, & il trouva que dans cet état elle péſoit davantage qu'auparavant, lorſqu'elle ne contenoit qu'un air libre tel que nous le reſpirons. MM. Volfius & Nieuventit ont réiteré dans la ſuite avec le même ſuccès l'expérience de Galilée.

76. Toricelli diſciple de Galilée remplit avec du vif-argent un long tuyau de verre qui n'étoit ouvert que par un bout, afin d'ôter toute communication de l'air avec le dedans du tuyau; il tint ainſi ce tuyau rempli dans une ſituation verticale ou perpendiculaire à l'horizon, de maniere que le bout fermé étoit tourné vers le haut, & le bout ouvert vers le bas, qu'il boucha cependant avec le doigt pour empêcher le tuyau de ſe vuider; il mit enſuite tremper ce bout dans du vif-argent qu'il avoit diſpoſé dans un vaſe, & après avoir retiré le doigt qui le tenoit bouché, le vif-argent deſcendit en partie dans le vaſe, & le reſte demeura ſuſpendu dans le tuyau. Fig. 21

77. M. Paſcal fit auſſi une expérience ſemblable: il ſe ſervit d'un long tuyau ABCD recourbé dans ſon milieu, les deux branches AB, CD étoient paralleles l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de la courbure, la branche ſupérieure étoit fermée à l'extrêmité d'enhaut, & la branche inférieure ouverte aux deux bouts D, C: après avoir fermé avec le doigt ou autrement l'extrêmité ſupérieure de ce cette branche, il fit l'expérience de Toricelli, il remplit le tuyau de vif-argent & le mit enſuite dans une ſituation convenable à l'experience précedente, c'eſt-à-dire qu'il mit tremper le bout d'enbas dans un vaiſſeau où il avoit préparé du vif-argent, en tenant toujours l'ouverture C d'enhaut de la branche inférieure, fermée avec le doigt; pour lors le vif-argent qui étoit dans la branche inférieure, deſcendit en partie dans le vaſe, & l'autre partie y demeura ſuſpendue en E comme dans l'expérience de Toricelli, & le vif-argent qui étoit dans la branche ſupérieure, deſcendit auſſi en partie dans le vaſe, & le reſte fut reçu dans la recourbure BC qui formoit une eſpece de chambre; il ôta enfin le doigt qui bouchoit l'ouverture C d'enhaut de la branche inférieure, & le vif argent qui y étoit demeuré ſuſpendu, fut précipité dans Fig. 22.

le vaſe, & celui qui étoit demeuré dans la recourbure monta auſſitôt dans la branche ſupérieure.

78. M. Perrier fit de nouveau vers ce même tems l'expérience de Toricelli ſur la montagne du Puy de Domme en Auvergne, elle eſt élevée de 500 toiſes au-deſſus des Minimes de la ville de Clermont ; le vif-argent qui dans le jardin des Minimes étoit demeuré ſuſpendu dans le tuyau à la hauteur de 26 pouces 3 lig. $\frac{1}{2}$ deſcendit de 3 pouces 1 ligne & demie, & il ne s'en trouva au haut de la montagne que 23 pouces 2 lignes.

PROPOSITION VII.

79. *Ces expériences qui ſont les plus célebres de celles qui ont été faites ſur la peſanteur de l'air prouvent inconteſtablement cette même peſanteur.*

Car 1°. ſi en ajoutant à un corps une matiere étrangere & d'une autre nature, on trouve que le tout qui en réſulte eſt plus peſant que ce corps, il eſt hors de doute que la matiere qui a été ajoutée eſt peſante, puiſqu'elle augmente la peſanteur du corps auquel elle eſt unie : or l'expérience de Galilée fait voir qu'un balon plein d'un air comprimé eſt plus peſant que lorſqu'il eſt vuide où qu'il ne contient qu'un air rarefié tel que nous le reſpirons ; l'expérience de Galilée prouve donc que l'air eſt peſant.

2°. On peut déduire auſſi une preuve de cette vérité des expériences de Toricelli, de MM. Paſcal & Perrier. Il faut concevoir que dans l'expérience de Toricelli les côtez du vaſe ſont prolongez juſqu'à l'endroit le plus haut de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, de la maſſe d'air qui eſt au-deſſus de la terre, & qui l'environne, le vif-argent demeurera encore ſuſpendu à la même hauteur dans le tuyau; car quelque longueur que l'on donne à ces côtez, le vif-argent ne hauſſe ni ne baiſſe dans le tuyau. Cela poſé, 1°. il eſt certain que c'eſt la colomne d'air qui ſelon l'hypotheſe remplit la capacité du vaſe, qui tient le vif-argent ſuſpendu dans le tuyau, puiſque l'expérience faite ſur le Puy de Domme montre que ſi cette colomne diminue en hauteur le vif argent deſcend dans le tuyau, ſi la colomne d'air devient plus haute, le vif-argent monte : or il eſt viſible que la colomne d'air qui eſt dans le vaſe dont on ſuppoſe les côtez prolongez juſqu'à l'extrêmité de l'atmoſphere agit ſur le vif-argent de haut en bas comme feroient deux liqueurs de differentes peſanteurs ſpécifiques qui ſeroient en équilibre dans un tuyau recourbé. Il faut donc conclure que l'air eſt peſant, puiſque par ſa direction naturelle il tend à deſcendre de même que les corps peſans.

80. Remarque. On attribuoit autrefois la ſuſpenſion du vif-argent & des autres liqueurs dans les tuyaux à l'horreur que la nature a pour le vuide; pourquoi eſt-ce que le vif-argent monte dans le tuyau de Toricelli, lorſqu'on en a ôté l'air, & qu'il y demeure ſuſpendu? C'eſt parce que, diſoit-on, ſi le vif-argent ne montoit pas, il y auroit du vuide dans la nature; or la nature a horreur du vuide, c'eſt donc une néceſſité que la liqueur monte dans le tuyau, lorſqu'il eſt vuide d'air. Cette explication, qu'on regardoit comme ſatisfaiſante, & qui contentoit l'eſprit dans un tems où la vérité étoit encore cachée, tombe aujourd'hui d'elle-même, & il eſt impoſſible de la concilier avec les diverſes expériences qui ont été faites ſur l'air. Dire que les liqueurs demeurent ſuſpendues dans les tuyaux parce que la nature a horreur du vuide, ce n'eſt pas tant expliquer l'effet par ſes cauſes prochaines, qu'avouer tacitement qu'on les ignore, & que faute d'avoir ſur ce point les lumiéres néceſſaires pour l'entendre, on eſt obligé d'en faire une loi primitive de la nature. On ne s'arrête pas à réfuter expreſſément cette opinion; la peſanteur de l'air eſt une vérité ſi bien établie, & les effets qu'elle produit ont avec elle une liaiſon & une dépendance ſi aiſée à reconnoître, qu'il n'y a aucun lieu de croire que quelqu'un veuille encore les attribuer à l'horreur du vuide, comme à leur véritable cauſe.

81. Corollaires. *De ce que l'air eſt un fluide peſant, il ſuit* 1°. *Que s'il eſt abandonné à lui-même, qu'aucune cauſe différente de la peſanteur n'agiſſe ſur lui, il ſe met de niveau, c'eſt-à-dire, qu'à ſa ſurface ſupérieure aucune partie n'eſt plus élevée que les autres:* car ſi l'air étoit plus élevé en quelque endroit de ſa ſurface, la partie la plus haute ſeroit ſollicitée à deſcendre par l'effort de la peſanteur, & parce qu'on ſuppoſe que cet effort peut avoir ſon effet plein & entier, elle ſeroit contrainte de deſcendre & de ſe mettre au niveau des autres parties.

82. 2°. *L'air environne la terre & ſa ſurface ſupérieure en imite la courbure*, autrement elle ne ſeroit pas de niveau, ce qui eſt contre la nature des fluides peſans.

83. 3°. *Il y a la même hauteur d'air dans tous les endroits de la terre*, puiſque ſa ſurface ſupérieure eſt de niveau.

84. 4°. *Si on diviſe par la penſée l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, la maſſe d'air qui environne la terre, en couches concentriques, les parties d'une même couche ſont également preſſées*, puiſqu'elles ont toutes au-deſſus la même hauteur d'air qui doit les charger toutes également.

85. 5°. *La ſurface de la mer eſt également preſſée par le poids de*

l'atmoſphere ; car la ſurface de la mer peut être conſiderée comme étant de niveau, elle eſt donc environnée par une même couche concentrique d'air ; or on vient de voir que toutes les parties d'une même couche ſont également chargées ; donc la ſurface de la mer qui touche immédiatement cette couche, ſupporte une égale preſſion par-tout.

86. 6°. Tous les endroits de la terre ferme ne ſont pas également preſſés par le poids de l'air, les lieux qui ſont au niveau de la mer ſont chargez d'un égal poids d'air, & égal à celui qui preſſe la ſurface des eaux, les lieux qui ſont au-deſſus du niveau de la mer portent un moindre poids, & les lieux qui ſont au-deſſous de ce niveau en portent un plus grand ; enfin l'air peſe également dans tous les lieux qui ſont au même niveau, ſoit que ce niveau ſe trouve au-deſſus ou au-deſſous de celui de la mer, ou qu'il n'en differe pas.

87. 7°. Si on diviſe par la penſée l'atmoſphere en colomnes verticales & perpendiculaires à l'horiſon, *elles ſont toutes en équilibre entr'elles, les colomnes les plus longues, ſçavoir celles qui peſent ſur les lieux les plus bas, ſont en équilibre avec les colomnes les moins longues, ſavoir celles qui répondent aux endroits les plus élevez, comme les montagnes.* Car l'équilibre ne peut être rompu, à moins que les parties d'une même couche concentrique ne ſe dérangent & ne changent de place, que les unes ne montent ou ne deſcendent tandis que les autres demeurent : or les parties d'une même couche ſont également preſſées, aucune d'elles ne doit donc quitter ſa place : par conſéquent toutes les colomnes doivent être en équilibre entr'elles.

88. 8°. Si l'air ne ſe comprimoit pas, qu'il conſervât ſenſiblement ſon volume, comme l'eau, le vif-argent, & la plupart des autres liqueurs lorſqu'on les preſſe, il ſeroit de même denſité dans dans toute ſa hauteur, & l'on pourroit déterminer ſa peſanteur ſpécifique de même que celles de l'eau, du mercure, & des autres liqueurs ; mais l'expérience montre que l'air eſt capable de condenſation & de rarefaction, une même maſſe ou quantité d'air occupe un eſpace plus ou moins grand ſelon la force qui la comprime : ainſi parce que l'air que nous reſpirons eſt plus chargé que celui des hautes montagnes, & celui des montagnes plus chargé que celui où ſont les nuées, il faut que l'air de la plaine ſoit plus denſe que l'air des montagnes, & l'air des montagnes encore plus denſe que l'air des nuées, & que celui qui eſt au-deſſus. On ne peut donc pas déterminer en général la peſanteur ſpécifique de l'air, il faut néceſſairement pour cela en diſtinguer pluſieurs ſortes.

89. 9°. Si

89. 9°. Si l'air étoit également denſe par-tout, on pourroit déterminer la hauteur de l'atmoſphere d'une maniere aiſée par l'expérience du Puy de Domme ; car ſelon cette expérience 3 pouces une ligne & demi de vif-argent font équilibre avec une hauteur d'air de 500 toiſes ; on pourroit donc ſçavoir par une regle de proportion avec quelle hauteur d'air 28 ou 26 pouces de vif-argent feroient équilibre ; mais parce que l'air n'eſt pas également denſe par-tout, on ne peut pas employer ce moyen pour déterminer la hauteur de l'atmoſphere.

90. 10°. L'air étant un corps fluide, il en a la principale propriété, qui eſt de preſſer & d'être preſſé également en tout ſens ; les couches ſupérieures doivent charger les inférieures de maniere que la preſſion ſe communique ſuivant toutes les directions poſſibles. De-là vient que l'air fait effort non-ſeulement ſuivant ſa direction naturelle, qui eſt celle des corps peſans, mais qu'il agit auſſi de bas en haut, à droite, à gauche, & en tout ſens.

Des effets de la peſanteur de l'Air.

91. Ces effets ſont autant de preuves de la peſanteur de l'air, & ils peuvent donner une idée plus étendue de la maniere dont ce fluide agit : ils ſont tirez du *Traité de la Peſanteur de l'Air* de M. Paſcal, dont on a copié en pluſieurs endroits, & autant que l'on a pû, les propres paroles.

92. 1°. Selon les expériences dont on vient de faire le récit, ſi on remplit un tuyau de vif-argent ou de quelque autre liqueur, non-ſeulement elle demeure ſuſpendue à une certaine hauteur au-deſſus du niveau, mais *quand une ſeringue trempe dans l'eau, en tirant le piſton l'eau ſuit & monte comme ſi elle lui adhéroit : ainſi l'eau monte dans une pompe aſpirante, qui n'eſt proprement qu'une longue ſeringue, & ſuit ſon piſton quand on l'éleve, comme ſi elle lui adhéroit.*

Pour faire entendre comment la peſanteur de la maſſe de l'air fait monter l'eau dans les pompes à meſure qu'on tire le piſton, il faut faire voir un effet entierement pareil du poids de l'eau qui en fera parfaitement comprendre la raiſon en cette ſorte. Suppoſons qu'au fond d'une cuve pleine d'eau il y a un vaſe où l'on ait mis du vif-argent, cette liqueur étant plus peſante que l'eau, demeurera dans le vaſe ; qu'on enfonce une ſeringue dans l'eau juſqu'à ce que le bout d'en-bas ſoit plongé dans le vif-argent (on prouvera dans le Chapitre ſecond que pour enfoncer la ſeringue, & pour empêcher que le piſton qu'on ſuppoſe baiſſé, ne monte, il faut em- Fig. 23.

ployer une force égale au poids du volume d'eau dont la ſeringue tient la place); ſi après que la ſeringue eſt ainſi enfoncée, & que le bout d'en-bas trempe dans le vif-argent de maniere que l'eau ne puiſſe s'inſinuer par l'ouverture, on lâche le piſton, & qu'on le laiſſe en liberté, il remontera auſſi-tôt, le vif-argent ſera contraint d'entrer dans la ſeringue, & de le ſuivre en s'élevant au-deſſus du niveau du vaſe qui le contient. La raiſon de cet effet eſt facile à entendre. L'eau tend par ſon poids à ſe mettre de niveau & à ſoulever la ſeringue & le piſton qu'on tient enfoncez, elle peſe donc ſur le vif-argent du vaſe, & le preſſe en toutes les parties de ſa ſurface, hormis en celles qui ſont à l'ouverture de la ſeringue; or la preſſion ſe communique auſſi-tôt de celles-là à celles-ci; & parce que rien ne s'oppoſe à ce qu'elles entrent dans le corps de la ſeringue, elles obéiſſent à la preſſion, & montent pour contrepeſer dans la ſeringue le poids de l'eau qui peſe au-dehors. Il eſt évident que rien n'empêche l'aſcenſion du vif-argent & la relevée du piſton; car l'air agit également ſur la ſurface de l'eau & ſur le piſton, ainſi l'action qu'il éxerce en des ſens oppoſez ne doit être comptée pour rien.

Il eſt aiſé de faire l'application de cet éxemple à la peſanteur de l'air & à l'aſcenſion des liqueurs dans les tuyaux lorſqu'on en pompe l'air. Si on trempe le bout d'une pompe où d'un tuyau dans l'eau, l'air touche l'eau du vaiſſeau en toutes les parties de ſa ſurface, hormis en celles qui ſont à l'ouverture de la pompe, où il n'a point d'accès, puiſqu'elle eſt enfoncée dans l'eau; or la preſſion ſe communique par la propriété des fluides, de ces premieres parties à celles-ci; l'eau ne montera pas cependant dans la pompe ſi on laiſſe les choſes dans cet état; car il eſt bien vrai que l'air qui preſſe ſur la ſurface de l'eau, tend à la faire monter dans la pompe, mais l'air qui eſt au-deſſus du piſton détruit cette impreſſion; or ſi on tire le piſton avec aſſez de force pour vaincre cette réſiſtance, l'eau qui eſt à l'ouverture de la pompe, ne ſera plus pouſſée que de bas en haut par l'air qui peſe ſur ſa ſurface, elle obéïra donc à cette preſſion par la même raiſon & avec la même néceſſité que le vif-argent, lorſque preſſé par le poids de l'eau il montoit dès que la force qui retenoit le piſton enfoncé ceſſoit de lui être appliqué. L'eau montera donc pour contrepeſer au-dedans du tuyau le poids de l'air qui peſe au-dehors. Il eſt donc viſible que l'aſcenſion des liqueurs dans les tuyaux eſt un effet de la peſanteur de l'air.

93. 2°. *Si l'on remplit d'eau un tuyau fait en forme de croiſſant*

renverſé, ce qu'on appelle d'ordinaire un ſiphon, *dont chaque jambe trempe dans un vaiſſeau plein d'eau, il arrivera que ſi peu qu'un des vaiſſeaux ſoit plus haut que l'autre, l'eau du vaiſſeau le plus élevé montera dans la jambe qui y trempe juſqu'au haut du ſiphon, & ſe rendra par l'autre dans le vaiſſeau le plus bas où elle trempe.* Fig. 24.

Pour faire entendre comme la peſanteur de l'air fait monter l'eau dans le ſiphon, nous nous ſervirons encore de l'éxemple de la peſanteur de l'eau qui fait monter le vif-argent dans un ſiphon tout ouvert par en-haut, & où l'air a un libre accès.

Il faut pour l'expérience, qu'il y ait une ouverture au-haut du ſiphon où l'on inſere un tuyau long de 20 pieds ou environ, & bien ſoudé à cette ouverture, ſi le ſiphon a une de ſes jambes d'un pied, il ſuffit que l'autre ait un pied un pouce, on met au fond d'une cuve où il y a 15 à 16 pieds d'eau deux vaiſſeaux pleins de vif-argent, l'un un peu au-deſſus de l'autre; ſi on remplit le ſiphon de vif-argent, qu'on mette tremper la jambe la moins longue dans le vaiſſeau le plus élevé, & la plus longue dans le vaiſſeau le plus bas, comme la figure le montre, le vif-argent du vaiſſeau le plus élevé montera dans le ſiphon juſqu'au haut, & ſe rendra par l'autre jambe dans le vaiſſeau le plus bas. On ſoude un long tuyau au haut du ſiphon, afin que l'air agiſſant également ſur le vif-argent de haut en bas par l'ouverture ſupérieure du ſiphon, & de bas en haut par les ouvertures inférieures en preſſant ſur la ſurface de l'eau, l'eau de la cuve ſoit ſeule la cauſe de l'effet du ſiphon. Voici la raiſon de cet effet. Si les jambes du ſiphon étoient égales, c'eſt-à-dire, ſi la ſurface du vif-argent des deux vaſes étoit au même niveau, l'eau qui peſeroit ſur cette ſurface ſeroit également chargée ou preſſée par le vif-argent de l'une & de l'autre branche, & il y auroit équilibre entre les colomnes d'eau & celles du vif-argent; mais parce que l'une des branches eſt plus longue, l'eau qui eſt au-deſſus du vaſe où cette branche trempe, eſt plus chargée, l'équilibre ne peut donc pas ſubſiſter entre les colomnes de l'eau & celles du vif-argent; la colomnne d'eau qui eſt la plus chargée ſera donc rompue, & le vif-argent de la longue branche deſcendra; or la colomne d'eau qui eſt au-deſſus du vaſe le plus élevé, continuant de peſer ſur le vif-argent qui eſt dedans, le fera monter dans le ſiphon à meſure que celui qui eſt dans la longue branche ſe déchargera dans le vaſe le plus bas: donc le vif-argent ne ceſſera de monter par la petite branche, & de deſcendre par la grande, que lorſqu'il n'y en aura plus dans le vaſe le plus élevé, ou qu'il ſera de niveau dans les deux vaſes.

Si on ſuppoſe à préſent que le ſiphon & les deux vaſes ſont remplis d'eau ou de quelque autre liqueur, & que l'air prend la place de l'eau de la cuve après que l'ouverture qui eſt au haut du ſiphon aura été bouchée, il ne ſera pas difficile de comprendre que l'eau doit paſſer du vaiſſeau le plus élevé dans le vaiſſeau le plus bas. Car les deux colomnes d'air qui ſont au-deſſus des deux vaſes ſont par elles-mêmes en équilibre; & ſi les branches du ſiphon étoient égales, elles ſoutiendroient des poids égaux; ainſi l'équilibre ne ſeroit pas rompu; mais ſi les branches du ſiphon ſont inégales, la colomne d'air qui eſt au-deſſus du vaſe le plus bas ſera chargée d'un plus grand poids, l'équilibre entre les colomnes d'air & celles de l'eau qui remplit le ſiphon ne pourra donc pas ſubſiſter; par conſéquent la colomne d'air la plus chargée étant auſſi la plus foible, ſera forcée de céder à la colomne la plus forte, l'eau de la longue branche n'étant plus ſoutenue, deſcendra donc, & celle de la courte branche montera, étant pouſſée par le poids de la colomne d'air qui eſt au-deſſus du vaſe le plus élevé; l'eau paſſera donc de ce vaſe dans celui qui eſt le plus bas par une mécanique toute ſemblable à celle qui faiſoit monter le vif-argent dans la petite branche, & qui le faiſoit deſcendre par la plus longue dans le vaſe le plus bas, lorſque les deux vaiſſeaux étoient au fond d'une cuve pleine d'eau.

94. 3°. *Si un tuyau eſt plein d'eau, qu'il ſoit bouché par le bout d'en-haut, & ouvert par le bout d'en-bas, l'eau y demeurera ſuſpendue, quoiqu'il ne trempe pas dans un vaſe plein d'eau, pourvû qu'il ſoit fort étroit par le bas.* Car l'air agit également en tous ſens de haut en bas & de bas en haut; ainſi la colomne d'air qui répond à l'ouverture du tuyau peſe ſur la colomne d'eau qu'il contient, avec la même force que ſi le tuyau trempoit dans un vaſe plein d'eau, la colomne d'eau doit donc demeurer ſuſpendue dans le tuyau.

On ſuppoſe que la colomne d'eau n'excède pas la hauteur que l'air peut contrepeſer. Il faut que l'ouverture du tuyau ſoit étroite, afin que la ſurface de l'eau étant moins expoſée au choc de l'air, ne ſe diviſe pas, & que les particules de la liqueur demeurant unies, il ne puiſſe pas s'inſinuer dans le tuyau.

Si l'ouverture du tuyau étoit un peu grande, en y appliquant éxactement une feuille de papier, l'expérience pourroit encore réuſſir, parce que la feuille de papier mettroit la ſurface de l'eau à couvert du choc de l'air, il faut avoir ſoin que toutes les parties de cette ſurface & de la feuille de papier ſoient dans le même niveau, c'eſt-à-dire, ſur un plan horiſontal.

95. Ce qui vient d'être dit peut faire entendre pourquoi *ſi on perce un tonneau plein de vin, il n'en lâche pas une goutte ſi on ne débouche le haut pour donner vent, ou ſi l'on ne fait un ſecond trou au-deſſus ou au-deſſous du premier*; ſi les trous ſont plus hauts l'un que l'autre, les colomnes d'air qui leur répondent ſeront inégalement chargées par la liqueur qui eſt dans le tonneau, la plus foible ſera donc forcée de céder, & la liqueur coulera par le trou le plus bas. Si les deux trous ſont ſur la même ligne horiſontale, la liqueur ne ſortira point, parce que les colomnes d'air qui leur répondront ſeront également chargées, & de la même force; ainſi l'une ne pourra l'emporter ſur l'autre, & la liqueur ne coulera point. C'eſt-là ce qui arrive lorſqu'un ſiphon plein d'une liqueur a ſes deux jambes égales, & que les ouvertures étant tournées en-bas, & la courbure en-haut, il ne ſe vuide point.

96. 4°. *Un ſoufflet dont toutes les ouvertures ſont bien bouchées eſt difficile à ouvrir; & ſi on eſſaye de le faire, on y ſent de la réſiſtance, comme ſi ſes aîles étoient collées; & le piſton d'une ſeringue bouchée, réſiſte quand on eſſaye de le tirer, comme s'il tenoit au fond.*

Pour entendre la raiſon de cet effet, il faut d'abord ſuppoſer que le tuyau du ſoufflet eſt débouché, on n'aura point de peine à l'ouvrir, parce que l'air qui s'appuie ſur les aîles en-dedans eſt en équilibre avec l'air qui s'appuie ſur ces aîles en-dehors; mais ſi on bouche le ſoufflet, l'air ne preſſera plus les aîles du dedans en dehors, ou du moins la preſſion ne ſera plus à beaucoup près ſi grande, & fera un moindre effort pour les écarter; les deux aîles du ſoufflet ſeront donc appliquées l'une contre l'autre par la peſanteur des colomnes d'air qu'elles ont au-deſſus, & l'on doit trouver en les écartant, à peu-près la même réſiſtance que ſi ces aîles étoient chargées de deux poids égaux à ceux des colomnes d'air qui les touchent.

97. 5°. *Si l'on prend un balon à demi plein d'air flaſque & mou, qu'on le porte au bout d'un fil ſur une montagne haute de 500 toiſes, il arrivera qu'à meſure qu'on montera, il s'enflera de lui-même, & quand il ſera en haut, il ſera tout plein & gonflé comme ſi on y avoit ſoufflé de l'air de nouveau; & en redeſcendant il s'applatira peu à peu par les mêmes degrez; de ſorte qu'étant arrivé au bas, il ſera revenu à ſon premier état.*

Cette expérience prouve que la maſſe de l'air eſt peſante, & qu'elle preſſe parce par ſon poids les corps qu'elle environne, également en tout ſens. Nous avons déja remarqué que l'air eſt un

corps compreſſible, & qu'il ſe comprime en effet par ſon propre poids ; & l'air qui eſt en bas, c'eſt-à-dire, dans les lieux profonds, eſt bien plus comprimé que celui qui eſt plus haut, comme au ſommet des montagnes, parce qu'il eſt chargée d'une plus grande quantité d'air. Non-ſeulement l'air ſe comprime, mais il ſe rétablit comme auparavant, lorſqu'il ceſſe d'être comprimé, c'eſt-à-dire que l'air eſt élaſtique (comme on verra plus en détail dans le troiſiéme Chapitre) : c'eſt pourquoi ſi l'on porte de l'air, tel qu'il eſt ici-bas, & comprimé comme il y eſt, ſur le ſommet d'une montagne, il doit s'élargir de lui-même & devenir au même état que celui qui l'environne ſur cette montagne ; puiſqu'il ceſſe d'être comprimé par la maſſe d'air qui eſt le long de la montagne. Par conſéquent ſi on prend un balon à demi plein d'air ſeulement, & non pas tout enflé comme ils le ſont d'ordinaire, & qu'on le porte ſur une montagne, il doit arriver qu'il ſoit plus enflé au haut de la montagne, & qu'il s'élargiſſe à proportion qu'il ſera moins chargé, & la différence doit être viſible ſi la quantité d'air qui eſt le long de la montagne, & de laquelle il eſt déchargé a un poids conſidérable pour cauſer un effet & une différence ſenſible.

98. Pour ſe former une idée ſenſible & groſſiere de quelle maniere l'air peut ſe comprimer par ſon propre poids, il faut ſe repréſenter un grand amas de laine de la hauteur de 20 ou 30 toiſes, il eſt certain que cette maſſe ſe comprimeroit par ſon propre poids, & que celle qui ſeroit au fond ſeroit bien plus comprimée que celle qui ſeroit au milieu ou près du haut, parce qu'elle ſeroit preſſée d'une plus grande quantité de laine ; & ſi on prenoit une poignée de celle qui eſt dans le fond, dans l'état preſſé où l'on la trouve, & qu'on la portât en la tenant toujours preſſée de la même ſorte au milieu de cette maſſe, elle s'élargiroit d'elle-même étant plus proche du haut, parce qu'elle auroit une moindre quantité de laine à ſupporter en ce lieu-là. Or on peut concevoir qu'il arrive quelque choſe de ſemblable lorſque l'air ſe comprime.

On pourroit apporter un plus grand nombre d'éxemples des effets de la peſanteur de l'air, ceux-ci ſuffiſent pour frire entendre ceux dont on omet de parler, & pour donner une idée de l'action que l'air éxerce par ſa peſanteur ſur les corps qu'il environne.

99. On pourroit objecter contre la peſanteur de l'air qu'on ne la ſent point. Si l'air étoit peſant nous ſentirions ſon poids, car ſelon les ſupputations ordinaires il eſt conſidérable, s'il eſt vrai qu'une colomne d'air faſſe équilibre par ſon poids avec une colomne de vif-argent de 28 pouces de haut, un homme eſt chargé

par la maſſe de l'air de même que s'il portoit une colomne de vif-argent haute de 28 pouces, & dont la baſe ſeroit égale en ſuperficie à celle de ſon corps. Or ſi on ſuppoſe que cette ſuperficie ſoit de 2 pieds en quarré, une telle colomne peſeroit plus de 4000 livres, la peſanteur de l'air étant grande comme elle eſt, nous devrions donc la ſentir.

100. 1°. On peut réfuter ce raiſonnement par un éxemple ſenſible : il eſt certain, & l'expérience le montre, que les animaux qui ſont dans l'eau n'en ſentent pas le poids ; or comme l'on ne pourroit pas conclurre que l'eau n'a pas de poids de ce qu'on ne le ſent pas quand on y eſt enfoncé ; ainſi on ne peut pas conclure que l'air n'a pas de peſanteur, parce que nous ne le ſentons pas.

2°. On peut faire voir la raiſon de cet effet. C'eſt un principe qu'un corps mou qui eſt également preſſé en tout ſens n'eſt pas ſenſiblement comprimé, s'il eſt d'une matiere ſerrée & compacte, c'eſt-à-dire, que ſes parties ne ſe dérangent pas d'une maniere ſenſible en s'approchant du centre du corps vers lequel elles ſont pouſſées quelque grande que ſoit la force qui le preſſe ; mais la compreſſion ſeroit viſible ſi ce corps étoit preſſé inégalement, ou ſi ſes parties ſolides étoient fort écartées les unes des autres comme ſont les corps ſpongieux qui ont des cavitez ou de grands pores ; or l'air preſſe également en tout ſens le corps d'un homme, & la chair en eſt bien compacte ; d'ailleurs au-dedans du corps des animaux, il y a de l'air qui contrebalance l'action ou la peſanteur de l'air extérieur, c'eſt pourquoi la compreſſion ne doit pas être ſenſible. Cela poſé, nous ne devons pas ſentir la peſanteur de l'air ; car la douleur que nous ſentons quand quelque choſe nous preſſe eſt grande ſi la compreſſion eſt grande, parce que la partie preſſée eſt épuiſée de ſang, & que les chairs, les nerfs, & les autres parties qui la compoſent ſont pouſſées hors de leur place naturelle ; mais ſi la compreſſion eſt petite, qu'elle ne cauſe aucun changement ſenſible aux parties, nous ne devons ſentir aucune douleur d'une compreſſion ſi légere.

Des variations ou changemens qui arrivent à la peſanteur de l'air, & du Barometre.

101. Si l'air n'étoit pas dans une agitation continuelle à cauſe des vents qui y regnent ; s'il n'étoit pas ſujet aux viciſſitudes du froid & du chaud ; s'il ne ſortoit pas du nouvel air de l'intérieur de la terre, ſi l'air qui eſt au-deſſus de ſa ſurface étoit pur, & qu'il ne ſe chargeât pas de corps étrangers, ſa peſanteur ſeroit la même

non-ſeulement à l'égard d'un même lieu, mais auſſi pour tous les lieux qui ſont également élevez au-deſſus de la mer ; car dans l'équilibre toutes les parties d'une même couche concentrique à la terre doivent être chargées d'un poids égal, & être toutes dans le même état de preſſion ; or l'obſervation journaliere apprend que cette peſanteur varie conſidérablement.

102. L'inſtrument avec lequel on obſerve les variations de la peſanteur de l'air, eſt appellé *Barometre* (fig. 25) : c'eſt un tuyau de verre ſemblable à celui de l'expérience de Toricelli, excepté qu'il eſt recourbé à une de ſes extrêmitez à laquelle au lieu du vaiſſeau qui doit contenir le vif-argent, il y a une bouteille ou boëte auſſi de verre, qui a le même uſage, c'eſt-à-dire, qu'elle reçoit le vif-argent lorſqu'il deſcend dans le tuyau, & fournit ce qui doit y entrer de plus lorſqu'il monte. Pour graduer le barometre, on obſerve la plus grande & la plus petite hauteur du vif-argent dans le tuyau, ſi elle eſt de 2 pouces & qu'on les diviſe en lignes, on aura 24 diviſions : or plus le niveau du mercure ſera proche de la diviſion la plus haute, plus l'air ſera peſant ; mais il ſera d'autant moins peſant, ou plutôt l'air preſſera d'autant moins ſur le vif-argent que ſon niveau ſera plus proche de la diviſion la plus baſſe. Il y a différentes manieres de conſtruire le barometre, on les rapportera dans le ſecond Traité. Fig. 25.

103. Les Philoſophes ſe ſont appliquez avec ſoin à obſerver ces variations & à en rechercher les cauſes, & aucune des explications qu'ils ont données juſqu'ici de ce phenomene n'a paru ſatisfaire pleinement. M. Daniel Bernoulli donne ſon ſentiment ſur ce ſujet, il eſt digne d'attention. Il ſuppoſe d'abord que la maſſe de l'air eſt en équilibre ou dans l'état de permanence. Cela poſé, ſi l'air étoit par-tout également échauffé, & que toutes ſes parties fuſſent mues ou agitées d'une égale viteſſe, les divers lieux de la terre ſupporteroient des preſſions proportionnelles aux poids des colomnes d'air qui peſeroient ſur leur ſurface, les lieux qui ſont à la même hauteur ſeroient également preſſez, les lieux profonds le ſeroient davantage ; en un mot la preſſion cauſée ſur un lieu ſeroit meſurée éxactement par le poids de la colomne d'air qui répondroit ſur ce lieu. Car le degré de chaleur & de viteſſe des particules d'air étant le même pour tous les lieux, ne produiroit aucune différence dans l'action qu'elles éxercent par leur peſanteur. Mais ſi la chaleur n'eſt pas la même par-tout, la preſſion que l'atmoſphere éxerce ſur un lieu ne ſera pas meſurée par le poids de la colomne d'air qui y répond. Car dans l'équilibre ou l'état de permanence tel qu'on le ſuppoſe

le ſuppoſe ici, les parties d'une même couche concentrique ſont également preſſées, ſans quoi il ſe feroit un flux, un écoulement d'air vers l'endroit où la preſſion ſeroit moindre, il n'y auroit donc point équilibre; ce qui eſt contre la ſuppoſition qu'on vient de faire. D'un autre côté on ſçait que la chaleur rarefie l'air, & que le froid le condenſe; l'air ſera donc plus rarefié dans l'endroit où la chaleur ſera plus grande, & la colomne qui y répond peſera moins que celle qui répond ſur un autre lieu qui eſt à la même hauteur, ou également élevé au-deſſus de la mer, mais où la chaleur eſt moindre; ces deux lieux ſeront donc preſſez avec la même force par la maſſe de lair, quoique les peſanteurs des colomnes qui y répondent ſoient différentes, la preſſion cauſée ſur un lieu n'eſt donc pas la meſure éxacte du poids de la colomne d'air qui peſe ſur ce lieu.

104. D'où l'on voit que l'air doit preſſer avec la même force à l'équateur & au pole, quoiqu'à cauſe de la différence des chaleurs, qui eſt très-grande, les colomnes qui répondent ſur ces lieux ſoient inégalement peſantes; le barometre doit donc ſe tenir à la même hauteur à l'équateur & au pole, puiſque l'air y eſt également preſſé, quoiqu'il y ſoit inégalement peſant, & que d'ailleurs la hauteur eſt proportionnelle à la preſſion, & non point à la peſanteur.

105. L'on peut encore inférer de-là que lorſqu'on porte le barometre d'un lieu bas ſur une hauteur, par éxemple, à la hauteur de 66 pieds, & qu'il deſcend d'une ligne, on ne peut pas conclure qu'une hauteur d'air de 66 pieds peſe autant qu'une ligne de mercure: car quoiqu'il ſoit vrai de dire que l'air de la couche où cette colomne de 66 pieds ſe trouve, eſt également preſſé dans toutes ſes parties, puiſqu'elles ſont en équilibre, elles ne ſont pas cependant également peſantes, parce qu'elles ne ſont pas également denſes, à cauſe de la différence des chaleurs: or la peſanteur de l'air eſt proportionnelle à ſa denſité, l'abbaiſſement du mercure n'eſt donc pas la meſure du poids de la colomne d'air au haut de laquelle le barometre a été porté. Cela ſert à expliquer pourquoi lorſqu'on porte le barometre en hyver & en été à la même hauteur, l'abbaiſſement du mercure eſt auſſi le même; au lieu qu'il devroit être moindre en été qu'en hyver, s'il meſuroit la peſanteur de la colomne d'air qui lui répond, puiſque cet air eſt plus rarefié en été qu'en hyver. Cet abbaiſſement doit être auſſi le même pour les Pays méridionaux & ſeptentrionaux, pourvû que le barometre ſoit placé en des lieux également élevez.

106. De ce que le poids du mercure abbaiſſé n'eſt pas égal à la

peſanteur de la colomne d'air qui a donné cet abbaiſſement, M. Bernoulli conclut que le moyen dont on s'eſt ſervi autrefois en Angleterre, au rapport de M. Duhamel, pour déterminer les peſanteurs ſpécifiques de l'air & du mercure, eſt défectueux. Suppoſons que portant le barometre en un lieu plus élevé de 66 pieds, le mercure ſoit deſcendu d'une ligne; on peut conſidérer cette colomne d'air de 66 pieds, comme faiſant équilibre avec une ligne de mercure; & ſi c'eſt par ſon poids que la colomne d'air contrebalance la ligne de mercure, les peſanteurs ſpécifiques de cet air & du mercure doivent être entr'elles réciproquement comme les hauteurs; ainſi la peſanteur ſpécifique de cet air ſeroit à celle du mercure, comme une ligne eſt à 66 pieds ou 9504 lignes, ſelon ce qu'on a démontré ci-devant (55). (On ſuppoſe que la denſité de l'air ne varie pas ſenſiblement dans l'intervalle de 66 pieds); mais on vient de voir que la colomne d'air qui contrebalance la ligne de mercure, n'agit pas préciſément par ſon propre poids; car à cauſe de la différence des chaleurs qui regnent dans la couche où la colomne ſe trouve, il peut ſe faire qu'elle peſe plus ou moins que la ligne de mercure. Tout ce que l'on peut inférer d'une ſemblable expérience, eſt que ſi l'on multiplie la ligne de mercure par la ſurface de la terre, l'on aura une couche de mercure de même peſanteur que la couche ſphérique d'air de 66 pieds d'épaiſſeur, ou, ce qui revient au même, le poids d'une ligne de mercure eſt au poids de la couche ſphérique d'air, comme la baſe ſur laquelle s'appuie la ligne de mercure, eſt à la ſurface de la terre. En ſorte que par l'expérience on ne détermine pas la peſanteur ſpécifique de la colomne qui fait équilibre avec la ligne de mercure, mais la peſanteur ſpécifique de toute la couche, ou ce qui eſt la même choſe, dans la couche il y a une colomne de même peſanteur qu'une ligne de mercure; or cette colomne étant multipliée par le nombre des autres colomnes, donne la peſanteur de la couche entiere; mais les autres colomnes de la couche ſont plus ou moins peſantes que celle-là, quoiqu'elles ſoient toutes également preſſées, & qu'elles produiſent des preſſions égales; la peſanteur de la colomne qui contrepeſe celle de la ligne de mercure, eſt appellée *peſanteur ſpécifique moyenne*, parce qu'elle tient un milieu entre celles des autres colomnes.

107. L'on voit que ſelon la penſée de M. Bernoulli la preſſion que l'air cauſe ſur le mercure ou les autres liqueurs n'eſt pas égale ou proportionnelle au poids de la colomne qui preſſe; cette preſſion peut être plus ou moins grande, elle eſt ſeulement une partie proportionnelle de la peſanteur de la couche, c'eſt-à-dire, que

cette preſſion eſt au poids de toute la couche, comme la baſe de la colomne qui preſſe eſt à la ſurface de la terre.

108. Pour ce qui eſt des changemens qui ſurviennent à l'atmoſphere, & des variations du barometre, M. Bernoulli croit que pour les expliquer il faut avoir recours à des cauſes dont l'action ſoit prompte ; car ſi elles agiſſent l'entement, l'effort de la preſſion ſe diſtribue à toutes les parties de la maſſe de l'air, & l'effet en eſt inſenſible ; c'eſt pour cette raiſon que la lune, qui a tant de force pour mouvoir les eaux de la mer, ne produit aucun effet ſur le barometre ; c'eſt encore pour cette raiſon que l'Auteur juge que les vapeurs qui s'élevent de la terre, quelque grande qu'en ſoit la quantité, ne peuvent pas faire monter le barometre, parce que leur effet n'eſt pas aſſez prompt, il ſe diſtribue à toute la maſſe de l'air, & devient par-là nul ou inſenſible pour un lieu en particulier; car ſi on conſidere toute l'atmoſphere, on ne peut pas dire qu'elle ſoit plus chargée de vapeurs en un tems qu'en un autre, ni que le vif-argent en ſoit pour cela plus preſſé. D'ailleurs quand même on on accorderoit que les vapeurs chargent l'air davantage dans l'endroit où elles s'élevent, à peine feroient-elles monter le vif-argent d'une ligne, puiſque la plus forte pluie qui tombe d'une nuée, donne rarement 14 lignes d'eau qui peſent autant qu'une ligne de mercure.

109. Ces choſes conſiderées, M. Bernoulli attribue les variations du barometre à deux cauſes, à une rarefaction ou condenſation prompte de l'air, & à ſon inertie.

On ſçait que tous les corps réſiſtent au mouvement, & qu'ils réſiſtent d'autant plus que la viteſſe qu'il faut leur imprimer eſt grande. (C'eſt cette réſiſtance qu'on a nommé *force d'inertie*). Suppoſons que l'air vienne à s'échaufer tout d'un coup, il ſe rarefiera, & s'il n'avoit point d'inertie, qu'il ne réſiſtât pas au mouvement, il n'y auroit point de ſurcroît de preſſion, & le barometre ne monteroit point ; mais parce que l'air réſiſte au mouvement la preſſion ſera plus grande qu'auparavant, l'air dilaté agiſſant avec plus de force ; le barometre montera donc dans l'endroit où l'air aura été rarefié, & même aux environs. Si l'air vient à ſe condenſer tout d'un coup, la preſſion ſera moindre qu'elle n'étoit, parce que la réſiſtance au mouvement ou l'inertie n'aura plus lieu, le barometre deſcendra donc. Si le barometre eſt dans l'endroit le plus bas, en ſorte qu'il n'y ait plus d'air au-deſſous, il eſt néceſſaire pour le faire monter ou deſcendre que l'air ſe rarefie ou ſe condenſe dans l'endroit même où eſt le barometre ; mais s'il y a encore

de l'air au-deſſous & qu'il ſe rarefie ſubitement, il pourra faire monter le barometre, s'il vient à s'accumuler au-deſſus de l'endroit où il eſt, quand même l'inertie ou la réſiſtance au mouvement n'auroit pas lieu, parce que dans l'équilibre rompu le ſeul poids de lair eſt une cauſe ſuffiſante pour augmenter la preſſion. On peut conclure de-là que les variations du barometre doivent être plus grandes & plus fréquentes dans les Pays qui ſont creuſez ſous terre, ce qui eſt aſſez conforme à l'obſervation qui apprend que le barometre eſt plus ſujet à hauſſer ou à baiſſer dans les Pays ſeptentrionaux, où les cavitez & profondeurs ſouterraines ſe rencontrent plus ſouvent que vers l'équateur, où il y a beaucoup de mer, & peu de terre ferme.

110. Le ſentiment de M. Bernoulli ſur la maniere dont l'atmoſphere preſſe ſur la terre, leve de grandes difficultez; mais il ſeroit à ſouhaiter que l'on pût prouver l'hypothèſe qu'il fait, que l'atmoſphere peut être dans l'équilibre ou dans l'état de permanence, quoique l'air ſoit inégalement échaufé dans différens endroits de la terre, & qu'il ſoit par conſéquent inégalement denſe & inégalement peſant dans une même couche ſphérique, ce qui eſt difficile à concevoir: car l'expérience montre qu'en hyver, lorſqu'on fait du feu dans une chambre, & qu'il s'échaufe, il ſort par la cheminée, & l'air du dehors entre par les autres ouvertures de la chambre, en ſorte qu'il ſe fait une circulation d'air pendant tout le tems que celui de la chambre eſt plus rarefié; d'ailleurs l'inertie ou la réſiſtance de l'air à être mû lorſqu'il vient à ſe rarefier ſubitement, ne peut pas être de longue durée, parce qu'il ne tarde pas à circuler. M. Bernoulli n'eſt pas d'accord en ceci avec la plupart des Philoſophes qui penſent que la colomne de liqueur qui demeure ſuſpendue dans un tuyau, meſure le poids de la colomne d'air qui lui répond, & que les variations du barometre ſont un effet de l'augmentation ou de la diminution du poids de l'atmoſphere. *Voyez Hydrodinam. pag.* 206, *&c.*

Leçon 7. de l'Air, p. 203. 111. M. De Molieres introduit une autre opinion ſur la preſſion de l'air. Il prétend que *ce n'eſt pas ſon poids*, mais *ſon reſſort qui tient ſeul le vif-argent ſuſpendu à la hauteur connue, ſoit que le barometre ſoit renfermé ſous le récipient, ſoit qu'il ſoit expoſé en plein air, nulle autre cauſe n'y contribue; le poids de l'air n'entre en partage pour rien de ſenſible dans cet effet.*

Cependant ſi on fait réflexion que le reſſort de l'air n'agit qu'autant qu'il eſt tenu aſſujetti par une force qui tende à le comprimer, ou par un obſtacle qui l'empêche de s'étendre; que dans

l'équilibre, il y a une égalité parfaite entre l'action de la force comprimante & la réſiſtance ou réaction du reſſort; qu'enfin c'eſt la cauſe externe qui lui eſt appliquée qui le détermine à réagir avec une certaine meſure de force; on comprendra ſans peine que les effets du reſſort de l'air ſont primitivement les effets de la force comprimante; or c'eſt une choſe certaine & reconnue pour vraie que l'air inférieur eſt chargé du poids de l'air ſupérieur, que ſon reſſort ne ſe bande qu'à proportion de ce poids, & qu'il en reçoit toute ſa force actuelle, celle avec laquelle il réagit & preſſe les corps qu'il environne; la preſſion que l'air exerce par ſon reſſort & par conſéquent la ſuſpenſion du vif-argent dans le barometre eſt donc auſſi un effet de ſa peſanteur: ainſi attribuer la ſuſpenſion du vif-argent à l'élaſticité de l'air, c'eſt auſſi l'attribuer ſans le vouloir, à ſa peſanteur.

CHAPITRE SECOND.

De l'Equilibre des liquides avec les corps ſolides.

112. Lorſqu'une liqueur eſt laiſſée à elle-même, qu'aucune cauſe étrangere n'agit ſur elle, & qu'elle n'eſt pouſſée ou preſſée que par ſa propre peſanteur, elle eſt en équilibre, & ſes parties ſenſibles dans un repos reſpectif; ſes colomnes verticales étant toutes également fortes & peſantes ſe ſoutiennent mutuellement, chacune tend à s'affaiſſer, & aucune ne deſcend, parce qu'une colomne ne peut deſcendre & s'accourcir, qu'en même-tems elle ne devienne plus large par ſa baſe & dans ſa hauteur, & qu'elle n'écarte les colomnes environantes ou qu'elle ne les ſouleve & ne les oblige de monter: or elle trouve tout au tour une réſiſtance égale à ſes efforts; de-là naît néceſſairement l'équilibre entre les parties de la liqueur. Mais ſi une nouvelle force ſurvient, qu'elle preſſe ſur quelque partie de la ſurface de la liqueur, la colomne qui eſt immédiatement ſous l'effort de la preſſion, deviendra, pour ainſi dire, plus peſante, elle agira ſur celles qui l'environnent, non ſeulement par ſa peſanteur propre, mais encore par la force qui lui eſt ajoutée, elles ſeront donc trop foibles pour réſiſter à la preſſion, elles ſeront contraintes de monter, & la colomne qui eſt foulée n'étant plus ſoutenue comme auparavant deſcendra par ſon propre poids & par l'action de la force qui preſſe. L'on voit donc que ſi on met un corps ſur la ſurface d'une liqueur, ſi peu peſant qu'il puiſſe être, l'équilibre ſera rom-

pu, les corps fermes que l'on met ſur une liqueur peuvent être de même peſanteur ſpécifique que la liqueur, ou bien leur peſanteur ſpécifique eſt plus grande ou moindre que celle de la liqueur.

Des corps dont la peſanteur ſpécifique est égale à celle d'une liqueur.

PROPOSITION VIII.

113. *Si on met ſur une liqueur un corps ferme de même peſanteur ſpécifique qu'elle, 1°. il s'enfonce entierement, 2°. il demeure dans l'endroit où l'on le met, 3°. il perd tout ſon poids, c'eſt-à-dire, que lorſqu'il eſt une fois enfoncé, la liqueur ſeule le ſoutient ſans le ſecours d'aucune autre cauſe.*

1°. Si le corps eſt de même peſanteur ſpécifique que la liqueur ſur laquelle on le met, il doit s'enfoncer entierement, car la colomne de liqueur ſur laquelle le corps eſt poſé, devient plus peſante que les colomnes laterales; ces colomnes ſeront donc trop foibles pour réſiſter à l'action de la colomne qui porte le corps, cette colomne n'étant plus retenue par les côtez ſera donc rompue; & parce que tant que le corps ne ſera pas entierement enfoncé, elle ſera plus peſante que les colomnes qui l'environnent, il s'enſuit que la liqueur s'échappera & qu'elle ne pourra le ſoutenir, par conſéquent le corps ferme doit s'enfoncer entierement dans la liqueur.

2°. Ce corps demeure dans l'endroit où l'on le met. Car lorſque le ſolide eſt entierement enfoncé, la liqueur qui l'environne fait effort pour s'inſinuer par deſſous, & par-là le ſoulever: or le corps étant de même peſanteur ſpécifique que la liqueur environnante a aſſez de force pour réſiſter à cet effort, la liqueur ne peut donc point le ſoulever; le ſolide ne peut pas non plus deſcendre au-deſſous de l'endroit où l'on l'a mis, puiſque la liqueur environnante le repouſſe vers le haut avec la même force qu'il tend à deſcendre; ce corps ne peut donc ni monter ni deſcendre, par conſéquent il demeure dans l'endroit où l'on l'a mis.

On peut ajouter à cela que le ſolide dont il s'agit étant de même peſanteur que le volume de liqueur dont il tient la place, la colomne où il ſe trouve a une force égale à celle des colomnes environnantes, elle ne peut donc ni les ſurmonter ni en être ſurmontée; par conſéquent cette colomne étant retenue en équilibre, il eſt néceſſaire que le corps demeure dans l'endroit où on l'a mis.

3°. Lorſque le corps eſt entierement enfoncé dans la liqueur,

il perd tout ſon poids, & la liqueur ſeule le ſoutient ſans le ſecours d'une autre cauſe. Cette troiſiéme partie ſuit manifeſtement de la précedente & n'a pas beſoin d'être prouvée ; car puiſque le corps ferme demeure dans l'endroit de la liqueur où l'on le met, la force qui le ſoutenoit auparavant ceſſe donc d'agir, & il faut que la liqueur ſeule ſoutienne tout ſon poids ; ce poids ſe perd donc dans la liqueur & ne ſe fait plus ſentir au dehors.

114. COROLLAIRE. *Il ſuit de-là que la plus petite force peut mouvoir ce corps dans la liqueur.* Car comme il eſt en équilibre avec le fluide environnant, il ſuffit pour rompre cet équilibre de ſurmonter la réſiſtance du fluide, laquelle eſt inſenſible lorſque la force agit foiblement & ſeulement pour rompre l'équilibre.

DES CORPS FERMES, DONT LA PESANTEUR SPÉCIFIQUE eſt plus grande que celle d'une liqueur.

115. Il n'eſt pas difficile d'appercevoir que les corps dont la peſanteur ſpécifique eſt plus grande que celle d'une liqueur, s'y enfoncent entierement & deſcendent au fond, puiſque la colomne ſur laquelle ils peſent étant plus forte que les colomnes laterales, l'équilibre ne peut être rétabli que lorſqu'il ſont allez au fond : or il eſt certain que ces corps perdent de leur peſanteur, puiſque la liqueur leur réſiſte & qu'elle fait effort pour les ſoulever, & l'on peut déterminer quelle partie ils perdent de leur poids.

PROPOSITION IX.

116. *Un corps dont la peſanteur ſpécifique eſt plus grande que celle d'une liqueur, y perd une partie de ſon poids, égale au poids du volume de liqueur dont il tient la place.*

Suppoſons qu'on mette du plomb ſur l'eau, par exemple, un pied cube de plomb, il ira au fond : or je dis que ce pied cube de plomb perd une partie de ſon poids égale au poids d'un pied cube d'eau dont il occupe la place, en ſorte que la force qui fait effort pour le tirer du fond, éprouve ſeulement une réſiſtance égale à la difference qu'il y a entre le poids d'un pied cube de plomb, & celui d'un pied cube d'eau.

Suppoſons pour un moment qu'un pied cube de plomb ne peſe pas davantage qu'un pied cube d'eau, ſelon ce qui vient d'être dit dans la derniere Propoſition, la liqueur environnante fait effort pour s'inſinuer entre le fond & le corps plongé, & tend par-là à le ſoulever ; mais parce que le corps plongé & la liqueur qui eſt directement au-deſſus compoſent une colomne de même peſan-

teur que celles qui l'environnent, il s'enſuit qu'elle a aſſez de force pour réſiſter à cet effort, elle ne peut ni ſurmonter ni être ſurmontée, & elle eſt dans un équilibre parfait; toutes ſes parties, & par conſéquent le corps plongé, ſont ſoutenues par la liqueur qui les environne immédiatement, en ſorte que la plus petite force eſt capable de les faire monter, ou ce qui revient au même, chacune d'elles perd ſa peſanteur parce qu'elle eſt ſoutenue par la liqueur environnante: or quoique la peſanteur ſpécifique du plomb ſoit plus grande que celle de la liqueur où il eſt enfoncé, cela n'empêche pas que la liqueur qui le touche n'agiſſe avec autant de force que s'il étoit de même peſanteur ſpécifique, & que par cette action elle ne contrebalance dans le volume de plomb un poids pareil; le volume de plomb perd donc de ſon poids une partie égale au poids de la liqueur dont il occupe la place.

117. COROLLAIRES. 1°. Plus la peſanteur ſpécifique d'un corps eſt grande, moins il perd de ſa peſanteur lorſqu'il eſt plongé; ſi ſa peſanteur ſpécifique eſt double, triple, quadruple en pareil volume, il peſera 2, 3, 4 fois davantage; & étant plongé dans la liqueur, il ne perdra que la moitié, le tiers, le quart de ce poids, parce que le poids de la liqueur dont il occupe la place, n'eſt que la moitié, le tiers, le quart, &c. de celle du ſolide plongé.

118. 2°. *Si l'on plonge un même corps dans des liqueurs de différentes peſanteurs ſpécifiques*, 1°. *il perd davantage de ſon poids dans la liqueur la plus peſante*, 2°. *les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs ſont entr'elles comme les pertes qu'il y fait.* 1°. Prenons dans les deux liqueurs deux volumes égaux, celui de la liqueur plus peſante peſera davantage, donc le ſolide enfoncé qui perd dans chaque liqueur une partie de ſon poids égale au poids de la liqueur dont il occupe la place, perd davantage dans la plus peſante. 2°. Les peſanteurs ſpécifiques des deux liqueurs, ſont entr'elles comme les pertes que le ſolide y fait: car les peſanteurs ſpécifiques lorſque les volumes ſont égaux, ſont entr'elles comme les peſanteurs abſolues (*Liv. II.* 52): or on vient de voir que les peſanteurs abſolues des volumes égaux des deux liqueurs, ſont égales aux pertes que le ſolide plongé y fait; donc les peſanteurs ſpécifiques des deux liqueurs ſont entr'elles comme ces pertes.

119. 3. Si on met ſur une même liqueur deux corps de volume égal plus peſans qu'elle, ils perdront également de leurs poids, puiſque l'une & l'autre perte eſt égale au poids du volume de liqueur dont ils tiennent la place. Il eſt néanmoins vrai que la perte

du corps moins pesant a un plus grand rapport à sa pesanteur absolue, ainsi si en pareil volume ils pesent l'un 6 liv. & l'autre 3 : qu'ils perdent 1 livre, le rapport de 1 à 3 est bien plus grand que celui de 1 à 6.

120. 4°. Si on plonge dans une même liqueur deux corps plus pesans que la liqueur, & dont les volumes soient inégaux, 1°. *Les pertes seront entr'elles comme les volumes.* 2°. *Si les deux corps pesent également, les pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproquement comme les pertes ou les volumes.* La premiere partie de ce Corollaire n'a pas besoin d'être prouvée, car les pertes sont égales aux poids des volumes de la liqueur que ces corps déplacent ; donc, &c. 2°. Supposons que le plus grand des deux corps soit double de l'autre ; donc en pareil volume il pesera deux fois moins que le petit corps, puisque les pesanteurs absolues du grand & du petit corps, sont supposées égales, les pesanteurs spécifiques du grand & du petit corps sont donc entr'elles comme 1 & 2 : or les pertes ou les volumes sont dans la raison de 2 à 1 ; donc les pesanteurs spécifiques sont entr'elles réciproquement comme les pertes ou les volumes.

121. *Il suit delà que si deux corps dont les volumes sont inégaux, pesent également dans l'air, leurs pesanteurs absolues sont inégales*, car ils perdent l'un & l'autre de cette pesanteur dans l'air : or celui des deux corps dont le volume est plus grand, perd davantage ; donc puisque les parties non perdues sont égales dans l'hypothese qu'elles sont en équilibre, si on leur ajoute les parties inégales que les corps perdent dans l'air, les pesanteurs totales qui sont les pesanteurs absolues, seront inégales.

122. *Il suit encore que si deux corps de volumes inégaux ont des pesanteurs absolues égales, ils peseront inégalement dans l'air*, car le corps dont le volume est plus grand, perdra davantage. Cependant comme un pied cubique d'air pese environ 9504 fois moins qu'un pied cubique de vif-argent, il est visible que la difference des pertes n'est pas assez grande pour qu'on puisse regarder dans le commerce comme inégaux les poids de deux corps qui pesent également dans l'air ; & si leurs pesanteurs absolues sont égales, ils peseront encore dans l'air sensiblement autant l'un que l'autre.

123. 5°. On peut déduire de la proposition un moyen facile de peser une certaine quantité de liqueur, par exemple, un tonneau de vin qui contiendroit 5 pieds cubiques : car si en y plongeant un pouce cubique de plomb on trouve qu'il perd de son

poids, par exemple, un once & demie, on ſçaura par là qu'un pouce cubique de vin peſe une once & demie, c'eſt pourquoi ſi on multiplie le nombre de pouces cubiques contenus dans 5 pieds cubiques par 1 $\frac{1}{2}$ onces, on aura le poids de toute la liqueur.

124. 6°. *Si l'on connoît le poids abſolu d'un corps & la partie qu'il perd dans une liqueur, on ſçaura que la peſanteur ſpécifique de la liqueur eſt à celle du corps plongé, comme la partie perdue eſt au poids entier du ſolide* : car les peſanteurs ſpécifiques ou en volume égal ſont comme les peſanteurs abſolues : or la peſanteur abſolue de la liqueur en pareil volume, eſt égale à la partie perdue ; donc la peſanteur ſpécifique de la liqueur eſt à celle du ſolide plongé comme la perte qu'il fait, eſt à ſon poids entier.

125. 7°. Puiſqu'un corps qui eſt plongé dans une liqueur perd une partie de ſon poids, laquelle eſt égale au poids d'un pareil volume de la même liqueur, il s'enſuit que pour ſoutenir ce corps dans la liqueur, il ſuffit d'employer une force qui ſoit égale à la difference du poids entier du ſolide, & de la perte qu'il fait; pour peu que cette force augmente ſon effort, elle fera monter le ſolide.

D'où il ſuit encore que plus les peſanteurs ſpécifiques de la liqueur & du ſolide approcheront de l'égalité, plus le ſolide perdra de ſon poids, & plus la force néceſſaire pour le ſoutenir ou le faire monter, ſera petite.

126. *Il ſuit encore que plus les peſanteurs ſpécifiques du ſolide & de la liqueur approcheront d'être égales, moins le ſolide aura de viteſſe en s'enfonçant dans la liqueur* ; car comme il ne deſcend que par la difference des peſanteurs, plus cette difference ſera petite, plus la force qui pouſſe le ſolide vers le fond ſera auſſi petite, & par conſéquent la viteſſe qu'il en recevra à chaque inſtant ſera d'autant moindre.

127. 8°. La propoſition donne encore un moyen de connoître ſi la matiere d'un corps eſt pure ou ſi elle eſt mélangée ; pour s'aſſurer s'il y a du mélange il en faut prendre une portion qui ſoit pure & non mélangée de même poids que la portion qui eſt douteuſe ; ſi les deux portions perdent également de leurs poids dans une même liqueur, on peut tenir pour certain que la piece douteuſe eſt pure & ſans mélange ; mais ſi la perte qu'il fait eſt plus grande ou plus petite, c'eſt une preuve que ſon volume eſt plus grand ou plus petit ; car ſi les deux volumes étoient égaux, ils perdroient également dans la liqueur ; or ſi les volumes ſont inégaux, les poids étant égaux, il eſt néceſſaire que les peſanteurs ſpécifiques ſoient inégales & qu'il y ait du mélange dans la piece douteuſe : cela étant, la propoſition donne le moyen de

déterminer la quantité du mélange comme on va voir dans le
oblême ſuivant. On prendra pour exemple d'un tel corps la cou-
d'Hyeron Roi de Syracuſe, l'orfévre avoit reçu dix-huit
l'or pur, il devoit donc rapporter une couronne de dix-
d'or pur, (on fait ici abſtraction du déchet ou de la
fait en façonnant l'ouvrage.) Archimede fut chargé
couronne qui avoit le poids requis, étoit d'or pur
argent mélé & en quelle quantité, ſans néanmoins
ronne. La Propoſition dont il s'agit ici auroit
facile de ſupputer la quantité du mélange

PROBLÊME.

...té l'or & l'argent pouvoient être mélez
...ron.

...ire le Problême, 1°. il faut préparer deux
... & l'autre d'argent qui ne ſoient point alterez,
...s que la couronne, c'eſt-à-dire, l'une & l'autre maſſe
...it livres, 2°. il faut plonger ſucceſſivement dans l'eau
...onne & les deux maſſes d'or & d'argent, remarquer avec
... la perte que chacun de ces trois corps fait de ſon poids étant
...inſi plongé; ſi la matiere de la couronne eſt mélangée, elle per-
dra de ſon poids plus que la maſſe d'or & moins que la maſſe
d'argent, parce que ſon volume tiendra un milieu entre celui de
la maſſe d'or & celui de la maſſe d'argent, & que d'ailleurs les
pertes doivent être dans la raiſon des volumes, ſi la maſſe d'ar-
gent a un volume double de la maſſe d'or de même poids, il oc-
cupera dans l'eau un eſpace double, il perdra donc de ſon poids
une partie deux fois plus grande, car cette perte eſt égale au
poids du volume d'eau dont la maſſe d'argent tient la place; l'on
voit donc que la couronne dont le volume eſt plus grand que la
maſſe d'or & moindre que la maſſe d'argent, puiſqu'elle eſt com-
poſée de ces deux métaux, doit perdre moins de ſon poids que
la maſſe d'argent & davantage que la maſſe d'or. 3°. En quelles
quantités que l'or & l'argent ſoient mélez dans la couronne, il eſt
certain que la portion d'or qui y eſt mélée, & la maſſe d'or étant
plongées dans l'eau, doivent faire des pertes proportionnelles à
leurs volumes, à leurs poids ou à leurs quantitez. Si l'or qui eſt
dans la couronne eſt la moitié ou les deux tiers de la maſſe d'or
pur, les pertes ſeront entr'elles comme $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$ eſt à 1, c'eſt-à-dire,
que la moindre perte ſera la moitié ou le tiers de la grande: pa-
reillement la perte que fait l'argent mélé dans la couronne, & celle
que fait la maſſe d'argent pur, ſont auſſi entr'elles dans la rai-

ſon de leurs volumes, ou de leurs poids, ou de leurs quantitez. 4°. Les volumes de l'or & de l'argent en poids égal étant entr'eux réciproquement comme les peſanteurs ſpécifiques (*Liv. II.* 53) & les peſanteurs ſpécifiques de ces 2 métaux entr'elles comme 100 & $54\frac{1}{2}$, les volumes de l'or & de l'argent en poids égal ſeront donc entre eux réciproquement comme 100 & $54\frac{1}{2}$, c'eſt-à-dire, comme $54\frac{1}{2}$ & 100, ou afin de faciliter le calcul comme 54 & 100 en négligeant $\frac{1}{2}$, & encore comme 27 & 50 en diviſant les deux nombres par 2. Cela poſé, ſi on nomme 1 la perte que fait la maſſe d'or plongée dans l'eau, on aura la perte que fait la maſſe d'argent par cette proportion $27 . 1 :: 50 . \frac{50 \times 1}{27}$, c'eſt-à-dire, que les volumes de l'or & de l'argent en poids égal, étant entr'eux comme 27 & 50, les pertes 1 & $\frac{50 \times 1}{27}$ doivent être dans la même raiſon. Si on ſuppoſe que la perte de la maſſe d'or ſoit à celle de la couronne comme 27 à 31, l'on aura encore $27 . 1 :: 31 . \frac{31 \times 1}{27}$ qui eſt la perte de la couronne, les trois pertes de l'or, de l'argent & de la couronne ſont donc $1 . \frac{50}{27} . \frac{31}{27}$. 5°. Comme on ne connoît point les quantitez d'or & d'argent qui compoſent la couronne, on nommera x la quantité d'or & $18 - x$ la quantité d'argent, car ſi de 18 livres qui eſt le poids de la couronne, on retranche le poids inconnu de l'or exprimé par x, le reſte qui eſt $18 - x$ doit être égal au poids de l'argent qui eſt dans la couronne Cela poſé ſi on fait cette proportion. $18 . x :: 1 . \frac{x}{18}$, ce quatriéme terme ſera la perte que l'or mélé dans la couronne fait étant plongé dans l'eau; car les pertes 1 & $\frac{x}{18}$ doivent être dans la raiſon des volumes 18 & x. Pareillement ſi on fait cette autre proportion . $18 . 18 - x :: \frac{50}{27} . \frac{50 \times 18 - 50x}{27 \times 18}$. Ce quatriéme terme eſt la perte que fait l'argent mélé avec l'or de la couronne : or ces deux pertes partielles ſont égales à la perte de la couronne, laquelle eſt exprimée par $\frac{31}{27}$; donc on aura cette égalité $\frac{x}{18} + \frac{50 \times 18 - 50x}{27 \times 18} = \frac{31}{27}$; ſi on multiplie les deux termes de la premiere fraction du premier membre par 27, & les deux termes de la fraction du ſecond membre par 18, ce qui ne change ni l'égalité ni les valeurs des fractions, on aura $\frac{27x}{27 \times 18} + \frac{50 \times 18 - 50x}{27 \times 18} = \frac{31 \times 18}{27 \times 18}$; & en multipliant tous les termes par le dénominateur commun, ce qu'on exécute en l'otant ſimplement, l'on aura la nouvelle égalité $27x + 50 \times 18 - 50x = 31 \times 18$; ſi on retranche de part & d'autre 31×18, qu'on efface dans $50x$, $27x$ à cauſe que ces deux termes ont des ſignes contraires, on aura $19 \times 18 - 23x = 0$ ou $19 \times 18 = 23x$, donc $x = \frac{19 \times 18}{23} = \frac{342}{23} = 14\frac{20}{23}$. Il y avoit donc dans la couronne 15 liv. d'or moins $\frac{3}{23}$. Si dans $18 - x$ au lieu de $- x$ on met ſa va-

leur — $14\frac{20}{21}$, on trouvera pour la quantité d'argent mélé dans la couronne, 3 livres $\frac{3}{21}$. Or les deux quantitez que l'on vient de trouver par la réſolution du Problême, ſont celles qui entroient dans la couronne. 1°. Leur ſomme eſt égale à 18 livres. 2°. Il ne pouvoit pas y avoir une plus grande ni une moindre quantité d'or; car ſi cette quantité pouvoit être plus grande ou plus petite que celle que le Problême donne, il ſeroit aiſé de prouver que la perte de la couronne ſeroit plus grande ou plus petite que celle qu'on a ſuppoſée, les quantitez qu'on a trouvées ſont donc les véritables.

129. Remarque. Tout ce que l'on a dit dans la Propoſition & ſes Corollaires, ſuppoſe que les corps dont la peſanteur ſpécifique eſt plus grande que celle d'une liqueur, s'y enfoncent entierement, & qu'ils ont même beſoin d'être ſoutenus lorſqu'on ne veut point qu'ils aillent au fond : or on fait une expérience qui ſemble déroger à la regle générale, la voici. Il faut avoir un tuyau fort long comme de 10 ou 12 pieds qui s'élargiſſe par le bout d'en bas ainſi que la figure le répréſente : ſi ce bout d'en bas eſt rond & qu'on y mette un cylindre de cuivre fait au tour avec tant de juſteſſe qu'il puiſſe entrer & ſortir dans l'ouverture de cet entonnoir, & y couler ſans que l'eau puiſſe du tout s'inſinuer entre deux, & qu'il ſerve ainſi de piſton, ce qui eſt aiſé à faire ; on verra qu'en mettant le cylindre & ce tuyau enſemble dans une riviere, en ſorte toutefois que le bout du tuyau ſoit hors de l'eau, ſi l'on tient le tuyau de la main & qu'on abandonne le cylindre de cuivre à ce qui devra arriver, ce cylindre maſſif ne tombera point, mais demeurera ſuſpendu pourvu qu'ayant un pied de haut, le tuyau ſoit enfoncé d'environ 9 pieds : or il ſemble que le cylindre de cuivre devroit deſcendre & aller au fond, puiſqu'il eſt environ 9 fois plus peſant qu'un pareil volume d'eau. Fig. 25.

130. Il eſt vrai que ſi le cylindre de cuivre n'eſt pas ſoutenu, il doit tomber & aller au fond ſelon les principes qu'on a établis ; mais ſi l'eau qui le touche par deſſous & non par deſſus le ſoutient, il ne doit pas tomber : or ſi depuis le haut de l'eau juſqu'au bas du cylindre il y a 9 pieds, il ſera pouſſé de bas en haut par un effort égal au poids d'une colomne d'eau de 9 pieds de hauteur ; & parce que le cylindre de cuivre peſe environ autant que cette colomne d'eau, les deux efforts égaux & contraires ſe contrebalanceront ; ainſi le cylindre ne doit pas deſcendre : pour bien entendre de qu'elle maniere cet équilibre ſe fait, il faut remarquer que le cylindre de cuivre n'eſt pas ſeulement en équilibre avec un pareil volume d'eau, mais avec une colomne de neuf pieds qui preſſe

par toute ſa peſanteur au-deſſous du cylindre, en ſorte que ſi le tuyau ou l'entonnoir n'étoit enfoncé que de cinq ou ſix pieds, le cylindre tomberoit, la même choſe arriveroit, ſi étant enfoncé beaucoup plus avant, & ſi avant qu'on voudra ſuppoſer, l'eau pouvoit s'inſinuer dans le tuyau & agir par deſſus.

Des corps dont la peſanteur ſpécifique eſt moindre que celle de la liqueur où l'on les met.

131. Lorſqu'on met ſur une liqueur un corps dont la peſanteur ſpécifique eſt moindre que celle de la liqueur, il ne s'y enfonce pas entierement, il s'enfonce cependant, car ſi peu peſant qu'il puiſſe être, ſon poids rend la colomne de liqueur ſur laquelle il eſt poſé plus peſante qu'elle n'étoit, & par conſéquent plus peſante que les colomnes laterales, leur réſiſtance doit donc être ſurmontée; le corps ne doit pas cependant s'enfoncer entierement, parce que pour lors la colomne ſur laquelle il eſt poſé, ſeroit moins peſante que les autres, & ne pouroit leur réſiſter.

PROPOSITION X.

132. *Lorſqu'on met ſur une liqueur un corps dont la peſanteur ſpécifique eſt moindre, il s'enfonce juſqu'à ce que le volume de liqueur dont la partie enfoncée tient la place, peſe autant que ce corps.*

Le corps dont il s'agit doit entrer dans la liqueur juſqu'à ce que par ſon poids il puiſſe réſiſter à l'action des colomnes laterales; car ces colomnes tendent à s'inſinuer par deſſous entre le ſolide & la colomne ſur laquelle il eſt poſé, & par ſa peſanteur il réſiſte à cet effort & le rend inutile: or ſi on imagine qu'un volume de la même liqueur, prend la place de la partie enfoncée, il ſera en équilibre avec les colomnes laterales de même que le corps ſolide; cela eſt évident, puiſqu'une liqueur ſe met de niveau, & que toutes les parties ſont en équilibre. Il faut donc que ce volume de liqueur, & le corps dont il s'agit réſiſtent également par leurs peſanteurs à l'action des colomnes laterales, par conſéquent ces mêmes peſanteurs ſont égales.

133. Corollaires. 1°. *Plus la peſanteur ſpécifique d'un corps eſt grande, plus auſſi la partie enfoncée dans la liqueur eſt grande;* car il faut que le volume de liqueur égal à la partie enfoncée, peſe autant que le corps entier: or le volume du corps étant le même, ſi ſa peſanteur ſpécifique augmente, c'eſt-à-dire, ſi ce même volume vient à peſer davantage, il faut que ſa peſanteur abſolue augmente de même; donc le volume de liqueur qui peſe autant que

ce corps eſt plus grand, par conſéquent la partie enfoncée qui tient la place de ce volume de liqueur, eſt auſſi plus grande.

134. 2°. *Si on poſe ſur des liqueurs de differentes peſanteurs ſpécifiques, un corps moins peſant, c'eſt-à-dire, qui ſurnage dans toutes, il s'enfoncera davantage dans la moins peſante*; car chaque volume de liqueur dont la partie enfoncée tient la place, peſe autant que le corps entier, & puiſque ces liqueurs en pareil volume peſent inégalement, il faut que ſi l'on prend dans toutes des volumes de même peſanteur ils ſoient inégaux, & que le plus grand ſoit tiré de la liqueur la moins peſante; or ces differens volumes des liqueurs ſont égaux aux parties enfoncées du corps; donc ces parties ſont toutes inégales entr'elles & la plus grande ſe trouve dans la liqueur la moins peſante.

135. D'où l'on voit qu'un vaiſſeau avec la même charge doit s'enfoncer inégalement ſi les eaux où il flotte ſont inégalement peſantes; il n'eſt donc pas ſurprenant qu'un vaiſſeau qui aura navigué heureuſement ſur mer puiſſe être ſubmergé lorſqu'il entrera en eau douce, car l'eau de la mer eſt plus peſante que l'eau de riviere.

136. 3°. *Les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs dont on a parlé dans le Corollaire qui précede, ſont entr'elles réciproquement comme les parties enfoncées du corps qui ſurnage.* Car lorſque pluſieurs corps peſent également, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles réciproquement comme leurs volumes : or les volumes des liqueurs dont il s'agit ici, ſont égaux aux parties enfoncées du corps qui ſurnage dans toutes, d'ailleurs tous ces volumes peſent également; donc les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs ſont entr'elles réciproquement comme les parties enfoncées du corps qui ſurnage dans toutes.

137. 4°. *Les peſanteurs ſpécifiques d'une liqueur & d'un corps qui y ſurnage, ſont entr'elles comme le volume du corps entier à la partie enfoncée*; car le volume de liqueur dont la partie enfoncée tient la place, peſe autant que le corps entier : or lorſque deux poids ſont égaux, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles réciproquement comme leurs volumes; donc les peſanteurs ſpécifiques de la liqueur dont le volume eſt égal à la partie enfoncée & le ſolide qui peſe autant que ce volume de liqueur, ſont entr'elles réciproquement comme la partie enfoncée eſt au corps entier.

138. 5°. *Si l'on met deux corps de même poids ſur une liqueur où ils ſurnagent, les parties ſubmergées ſeront égales quoique les volumes de ces corps ſoient inégaux*; car les volumes de liqueur dont les parties ſubmergées tiennent la place, ſont égales en peſanteur

aux deux ſolides ; donc ces volumes de liqueurs ſont égaux parce qu'ils peſent également, donc les parties enfoncées de ces corps, tenant la place de ces volumes égaux de liqueur, ſont auſſi égales entr'elles.

139. 6°. *Si deux corps de même volume ſurnagent dans une même liqueur, leurs peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles comme les parties ſubmergées* ; car les volumes de liqueur dont les parties ſubmergées tiennent la place, ſont de même peſanteur que les ſolides qui leur coreſpondent. Cela poſé lorſque les volumes ſont égaux, les peſanteurs ſpécifiques ſont entr'elles comme les peſanteurs abſolues, puiſqu'elles n'en different point, donc dans l'hypotheſe preſente les peſanteurs ſpécifiques des ſolides ſont entr'elles comme les peſanteurs des deux volumes de liqueur dont les parties ſubmergées tiennent la place : or les peſanteurs de ces volumes de liqueur, ſont entr'elles comme les parties ſubmergées, ſi la partie ſubmergée de l'un des ſolides eſt double de la partie ſubmergée de l'autre ſolide, le volume de liqueur dont elle tient la place peſera deux fois autant. Donc les peſanteurs ſpécifiques des ſolides ſuppoſez de même volume, ſont entr'elles comme les parties ſubmergées.

140. 7°. Si l'on connoît la peſanteur abſolue dun corps qui ſurnage dans une liqueur, & la grandeur de la partie ſubmergée, on connoîtra auſſi ce que peſe un volume connu de cette liqueur, par exemple, ſi le volume du ſolide eſt d'un pied cube & qu'il s'enfonce d'un tiers ou de 4 pouces dans la liqueur qu'on ſuppoſe être de l'eau, que de plus on ſçache que le ſolide peſe 24 livres, on ſçaura que le tiers d'un pied cube d'eau peſe 24 liv. puiſqu'un volume d'eau égal à la partie enfoncée, peſe autant que le ſolide; on pourra donc trouver enſuite ce que peſe telle autre quantité d'eau qu'on voudra ſuppoſer. Réciproquement ſi l'on connoît ce que peſe un certain volume de la liqueur, enſemble la grandeur de la partie enfoncée du corps, on pourra déterminer la peſanteur de ce corps ; car on pourra ſçavoir ce que peſe le volume de liqueur dont la partie ſubmergée tient la place, & par conſéquent la peſanteur du corps, puiſque l'une de ces peſanteurs eſt égale à l'autre.

141. 8°. On connoîtra auſſi la force qu'il faut employer pour ſubmerger entierement le corps qui ſurnage : ainſi dans l'exemple précedent la force néceſſaire pour noyer tout-à-fait le ſolide ſuppoſé d'un pied cube, il faudra employer une force égale au poids de 48 livres, car ſelon l'hypotheſe le ſolide s'enfonce par ſon

ſon propre poids de 4 pouces, & les 8 pouces reſtans ſortent hors de l'eau, il faudra donc que la force qui enfonce ces 8 pouces déplace un volume d'eau égal aux deux tiers d'un pied cube, & qu'elle en ſurmonte la réſiſtance; or les deux tiers d'un pied cube d'eau peſant environ 48 livres, la force requiſe pour enfoncer entierement le corps dont il s'agit ici, devra donc être égale au poids de 48 livres.

142. 9°. Si l'on connoît la quantité dont un corps creux, par exemple, un vaiſſeau s'enfonce dans l'eau lorſqu'il n'eſt point chargé, & la quantité dont il s'enfonce lorſqu'il eſt chargé, on poutra déterminer la grandeur de la charge. *Elle eſt égale au poids d'un volume d'eau que le vaiſſeau déplace dans le ſecond enfoncement*, ce qui eſt viſible après ce qu'on vient de dire dans le Corol. précédent; de ſorte que ſi de l'enfoncement total, on retranche celui qui eſt l'effet du poids du vaiſſeau lorſqu'il n'eſt pas chargé, la différence des enfoncemens donnera un ſolide ou volume d'eau dont la peſanteur ſera égale à la charge du vaiſſeau : c'eſt ſur ce principe que M. de Mairan raiſonne dans l'inſtruction abrégée qu'il donne pour le jaugeage des Navires. Voyez les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1724, pag. 229.

143. 10°. *On peut faire en ſorte qu'un corps dont la peſanteur ſpécifique eſt plus grande que celle d'une liqueur, y ſurnâge.* Pour cet effet il faut augmenter le volume de ce corps ſans en augmenter la maſſe; ainſi ſi on veut qu'une certaine maſſe de cuivre, par exemple de dix livres nâge ſur l'eau, il faut lui donner un volume d'autant plus grand que la peſanteur ſpécifique de l'eau eſt plus petite que celle du cuivre; ſi l'eau peſe 9 fois moins en pareil volume que le cuivre, il faudra donner à cette maſſe la forme d'un vaiſſeau dont le volume ſoit 9 fois plus grand, & il peſera autant qu'un pareil volume d'eau & s'y enfoncera entierement; mais ſi on a ſoin de faire le vaiſſeau 10, 11, 12 fois plus grand que la maſſe de cuivre, pour lors il ſurnâgera.

144. 11°. *Si on enfonce entierement un corps qui ſurnâge, il faut la même force à quelque profondeur qu'on le faſſe deſcendre*; car la force qui l'enfonce & la peſanteur du corps compoſent une force totale qui eſt équivalente au poids du volume de liqueur dont le corps tient la place, puiſque par cette force le corps déplace un volume de liqueur égal au ſien : or ſi le corps devenoit tout-à-coup de même peſanteur ſpécifique que la liqueur, par ſa peſanteur il ſe tiendroit à l'endroit où l'on le placeroit, à quelque profondeur que ce fût, donc la force dont il s'agit ici, laquelle eſt

équivalente à cette peſanteur, aura auſſi le même effet.

145. 12. Si on a deux matieres qui peſent l'une plus & l'autre moins qu'une certaine liqueur, par exemple que l'eau, on en peut compoſer un corps qui ſoit de même peſanteur ſpécifique que la liqueur. Suppoſons qu'on prenne un pied cube de la matiere la plus peſante, & que ſa peſanteur ſpécifique ſoit triple de celle de l'eau, un pied cube d'eau peſe 72 livres; donc le pied cube dont il s'agit peſera 3 fois davantage, c'eſt-à-dire 216 livres, & étant plongé dans l'eau il perdra 72 livres de ſon poids; c'eſt pourquoi pour le ſoutenir il faudra employer une force de 144 liv. qui eſt la différence de 72 liv. à 216 liv. Il faut donc que le corps plus leger qu'on veut joindre au plus peſant ſoit tel, qu'étant mis ſur l'eau tout ſeul, il ſoit néceſſaire pour achever de l'enfoncer d'employer une force de 144 livres. Suppoſons donc que la peſanteur ſpécifique de la matiere la moins peſante ſoit les trois quarts de celle de l'eau, un pied cube de cette matiere peſera 54 livres qui ſont les trois quarts de 72. Un pied cube de cette matiere étant mis dans l'eau, perdra donc tout ſon poids, & la partie ſubmergée ſera les trois quarts du corps entier, & le quart reſtant ſera hors de l'eau. Cela poſé, on ſçait que pour enfoncer entierement ce corps il faudra employer une force qui ſoit égale au quart de la peſanteur d'un pied cube d'eau, cette force eſt donc égale au poids de 18 livres qui eſt le quart de 72 liv. D'où il ſuit que ſi on joint à la matiere la plus peſante pluſieurs pieds cubes de celle qui l'eſt moins, il faudra employer autant de fois 18 livres qu'il y aura de pieds cubes : or la force qui doit enfoncer la matiere moins peſante eſt connue, elle eſt de 144 liv. donc ſi on diviſe 144 par 18, le quotient indiquera le nombre de pieds cubes qu'il faut prendre dans la matiere la moins peſante : ce quotient eſt 8, c'eſt pourquoi ſi on joint 8 pieds cubes de la matiere la moins peſante au pied cube de celle qui peſe trois fois plus que l'eau, on aura en tout 9 pieds cubes qui peſeront autant que 9 pieds cubes d'eau, c'eſt-à-dire, que ce compoſé ſera de même peſanteur ſpécifique que l'eau; car ſi on multiplie 54 livres qui eſt la peſanteur d'un pied cube de la matiere la moins peſante, par 8 qui eſt le nombre des pieds cubes de cette matiere, on aura 432 livres pour la peſanteur de la matiere la plus légere : ſi a ce poids on ajoute celui du pied cube le plus peſant ſçavoir 216 liv. le corps compoſé peſera en tout 648 livres : or 9 pieds cubiques d'eau peſent auſſi 648 livres; donc le corps compoſé des deux matieres eſt de même peſanteur ſpécifique que l'eau.

Cet exemple ſuffit pour entendre l'opération qu'il faudroit faire ſi on vouloit trouver un corps de même peſanteur ſpécifique que la liqueur, qui fût compoſé de plus de deux matieres.

CHAPITRE TROISIE'ME.

De l'Equilibre et de la Preſſion des Fluides par le reſſort.

146. Entre les fluides que l'on connoît, il n'y a guere que l'air & la flamme qui aient une force de reſſort aſſez grande pour faire équilibre avec les autres corps. Le reſſort de l'air ſe manifeſte aſſez par pluſieurs expériences, ſoit en ſe dilatant, ſoit en ſe condenſant. La flamme ordinaire n'eſt pas ſi traitable que l'air, elle s'éteint & ſe diſſipe auſſi-tôt qu'on veut la comprimer; mais la flamme de la poudre à canon ſouffre d'être comprimée, & elle dure pendant quelque tems ſans s'éteindre. On obſerve auſſi que l'eau qui paroît deſtituée de reſſort lorſqu'elle eſt dans ſon état naturel, puiſqu'elle ne peut être ſenſiblement comprimée, a néanmoins une grande vertu élaſtique lorſqu'elle eſt réduite en vapeur par l'action du feu; la vapeur de l'eau bouillante a aſſez de force pour mouvoir de grandes machines, on lui attribue même plus de force qu'à la poudre à canon lorſqu'elle eſt enflammée: M. Muſchenbroeck rapporte dans ſes Eſſais de Phyſique des expériences qu'il a faites à ce ſujet. Il y a cependant cette différence, que la poudre à canon prend feu & s'enflamme promptement, au lieu qu'il faut du tems pour convertir l'eau en vapeur. On n'entreprend point de décrire ici ni la figure, ni la groſſeur, ni la ſtructure particuliere des parties des fluides élaſtiques: on n'éxamine pas non plus les divers mouvemens qu'elles ont, ou dont elles ſont ſuſceptibles. Cependant pour ſe former un idée groſſiere de la maniere dont l'air ſe condenſe & ſe dilate, on peut ſe repréſenter un grand amas de laine, ou concevoir un monceau de petites lames qui ſe plient & ſe roulent ſur elles-mêmes comme le reſſort d'une Montre, ou bien ſuppoſer des globules qui ſe compriment, & enſuite ſe dilatent lorſqu'on les laiſſe à eux-mêmes. Il eſt certain que ſi ces différentes parties ſont peſantes, les plus baſſes ſeront les plus preſſées, & qu'elles ſeront réduites par la preſſion en un moindre volume que les parties qui ſont au-deſſus; chaque lit ſera d'autant plus comprimé qu'il ſera plus proche de l'endroit le plus bas, & la compreſſion ira en diminuant de-là vers le ſommet: ſi on charge cet

amas d'un nouveau poids, on n'a point de peine à comprendre qu'il ſera affaiſſé, & que le ſommet s'approchera de la baſe ; ſi au contraire on diminue la preſſion, les couches inférieures ſe renfleront par la vertu élaſtique qu'on leur ſuppoſe, & occuperont ſuivant la hauteur une plus grande étendue qu'auparavant.

147. Pour ce qui eſt de la flamme, on peut concevoir que ſes moindres parties ſont autant de petits tourbillons de feu qui ſont dans une grande agitation, & qui tendent à s'échapper de tous les côtez, & à s'éloigner les uns des autres. On peut auſſi attribuer des mouvemens ſemblables aux parties de l'eau bouillante convertie en vapeur.

En général pour comparer la force des fluides élaſtiques avec une autre force connue, & réduire leurs effets au calcul, on les conçoit ſous l'idée d'air ; la poudre enflammée & la vapeur de l'eau bouillante ſous l'idée d'un air échaufé, & d'une mobilité extrême.

148. On réduit ce qu'on a à dire dans ce Chapitre à quatre ou cinq réflexions principales. Dans la premiere on examinera les cauſes qui augmentent ou qui diminuent le reſſort de l'air ; dans la ſeconde on conſidérera la compreſſion de l'atmoſphere ; dans la troiſiéme la compreſſion & la dilatation de l'air dans les vaſes qui le contiennent ; dans la quatriéme, le rapport des preſſions qu'il cauſe ſur les parois de ces vaſes ; enfin dans la cinquiéme, le rapport des preſſions que les parois ſupportent lorſqu'ils ſont remplis d'un fluide élaſtique & enflammé.

DES CAUSES QUI AUGMENTENT ET QUI DIMINUENT le reſſort de l'air.

149. On ſçait que l'air peut être réduit par la compreſſion dans des bornes plus étroites ; ſi on preſſe un balon plein d'air entre les deux mains, il s'applatit, & perd de ſon volume ; lorſque la compreſſion finit, il reprend auſſi-tôt ſa premiere rondeur, ce qui prouve que l'air a du reſſort, or la compreſſion eſt une des cauſes qui en augmente la force : car ſi la preſſion augmente, l'air ſe comprime davantage, & en ſe comprimant de la ſorte, ſon reſſort ſe roidit, & acquiert une force par laquelle il réſiſte à celle qui le reſſerre.

150. La chaleur eſt une ſeconde cauſe qui augmente le reſſort de l'air. A proprement parler la compreſſion n'ajoute rien au reſſort ; lorſqu'elle le bande elle le met ſeulement en état d'éxercer l'action dont il eſt capable ; mais la chaleur augmente réellement la vertu élaſtique de l'air, parce qu'avec le même degré de com-

preſſion ou de condenſation, il fait une plus grande réſiſtance lorſqu'il eſt plus échaufé. On en peut faire l'expérience en cette ſorte. Il faut introduire dans une veſſie une certaine quantité d'air, de maniere qu'après l'avoir liée à l'orifice, afin que l'air introduit ne ſorte point, elle demeure encore mollaſſe; ſi on la préſente au feu pour la chaufer, on s'apperçoit qu'elle s'enfle, & ſe durcit; or il eſt viſible que cette plus grande tenſion des parois de la veſſie a pour cauſe le reſſort de l'air; ce qui indique dans ce reſſort un ſurcroît de force, & parce que l'air éxerce cette plus grande force ſans avoir été comprimé de nouveau, puiſqu'au contraire ſon volume eſt un peu augmenté par l'élargiſſement de la veſſie, il faut conclure que la vertu élaſtique de l'air eſt augmentée par la chaleur du feu.

151. *Deux cauſes diminuent le reſſort de l'air, la rarefaction ou la dilatation actuelle, & le froid.* On ſçait qu'un reſſort n'éxerce ſa force que parce qu'il eſt comprimé, il cherche à s'étendre, & c'eſt dans cet effort que conſiſte ſa force actuelle. S'il vient à bout d'écarter les obſtacles qui le tiennent aſſujetti, en reprenant ſon extenſion naturelle, il ceſſe de faire effort, & il paroît privé de toute action. Les reſſorts groſſiers & ſenſibles prouvent ceci d'une maniere palpable; on en peut faire auſſi l'expérience ſur l'air par le moyen de la machine *Pneumatique*, qu'on appelle autrement machine *du vuide*; elle eſt compoſée de quatre ou cinq pieces principales; d'une platine A percée d'un trou à ſon centre C, d'un récipient R, qui eſt une eſpece de cloche de verre dont le diametre doit être moindre que celui de la platine, & afin que ſon bord puiſſe s'ajuſter éxactement avec la ſurface de la platine, on met par-deſſus une peau mouillée, percée auſſi d'un trou dans ſon milieu; la troiſieme piece eſt un tuyau ou corps de pompe DC, dont le canal CO eſt éxactement ſoudé par ſon extrémité C au trou de la platine, il eſt percé en travers de deux trous pour recevoir un robinet GE, qui eſt auſſi percé ou creuſé de maniere qu'étant tourné d'un certain ſens, l'air extérieur peut communiquer avec l'air du corps de pompe, ſans communiquer avec l'air du récipient lorſqu'on le met ſur la platine; & étant tourné dans un autre ſens laiſſe communiquer l'air du récipient avec l'air du corps de pompe, & ôte en même-tems toute communication avec l'air extérieur. PS eſt un piſton qui monte & deſcend dans le corps de pompe. Le récipient étant poſé ſur la platine & le robinet tourné de maniere que l'air du récipient puiſſe communiquer avec celui du corps de pompe, le piſton touchant la partie haute O, ſi on

Fig. 27.

vient à l'abbaiſſer, l'air par ſa peſanteur & ſon reſſort deſcendra dans le corps de pompe & ſe rarefiera dans le récipient ; ſi on tourne le robinet afin que l'air extérieur puiſſe communiquer avec l'air du corps de pompe, & qu'on leve le piſton pour lui faire toucher le haut, on en fera ſortir l'air ; ſi enſuite on tourne le robinet de maniere que l'air du récipient communique dans le corps de pompe, en abbaiſſant le piſton, il ſe rarefiera dans le récipient. Si on continue de hauſſer & de baiſſer le piſton, ayant ſoin de tourner le robinet d'une maniere convenable, on pourra rarefier l'air dans telle proportion qu'on voudra. Or l'on obſerve que la colomne de vif-argent que l'air du récipient ſoutenoit auparavant par ſon reſſort, deſcend & devient plus courte à meſure que l'air ſe rarefie ; ce qui prouve que la force du reſſort de l'air eſt diminuée par la rarefaction.

152. Le froid eſt une ſeconde cauſe qui diminue le reſſort de l'air, car dans l'exemple de la veſſie, lorſqu'en l'éloignant du feu elle ſe refroidit, elle redevient mollaſſe, ce qui prouve que l'air ſe condenſe en ſe refroidiſſant, & que ſon reſſort perd de ſa force, puiſqu'il réſiſte moins à la compreſſion.

153. Si un reſſort, & en particulier celui de l'air, n'eſt détenu dans la contrainte & le reſſerrement, qu'on lui laiſſe prendre ſon extenſion naturelle, il ceſſe de preſſer. On en fait l'expérience avec la machine du vuide, où à force de rarefier l'air le reſſort s'affoiblit & ceſſe enfin d'agir ſur le vif-argent, & de le faire monter dans le barometre.

154. *Un reſſort, & en particulier celui de l'air, preſſe avec une force égale à celle qui le bande.* Car la réaction d'un reſſort qui peut être encore comprimé, & la force qui le retient dans cet état de compreſſion ſont égales, puiſque ſi la réaction du reſſort étoit plus grande, il ſe détendroit ; & ſi elle étoit plus foible, il ſe comprimeroit davantage ; la réaction du reſſort eſt donc égale à la compreſſion, par conſéquent un reſſort preſſe avec une force égale à celle qui le bande. Si on imagine un reſſort ſpiral poſé ſur une table & chargé d'un poids, il s'affaiſſera juſqu'à ce que par la roideur qu'il acquiert en ſe comprimant il réſiſte à la preſſion du poids : or dans cet état la réſiſtance du reſſort & le poids ſont deux forces égales qui ſe repouſſent, & qui en ſe repouſſant preſſent également.

155. Lorſqu'un reſſort a été une fois bandé, il n'eſt pas néceſſaire que la force comprimante lui demeure appliquée, il ſuffit de lui oppoſer un obſtacle qui réſiſte au débandement : pour lors le

reſſort continuera de réagir & de preſſer avec le même effort : ainſi dans l'éxemple précédent, ſi on ôte le poids & qu'on cloue une planche qui empêche que le reſſort ne ſe détende, la preſſion cauſée ſur la table ſera encore la même. C'eſt pour cette raiſon que le vif-argent demeure ſuſpendu dans le barometre à la même hauteur, lorſque l'air du récipient qui preſſe immédiatement ſur le vif-argent, ne communique plus avec l'air extérieur, & qu'il n'agit plus que par ſon reſſort.

156. Tant qu'un reſſort peut être comprimé, & que la force ou le poids qui le comprime augmente, il eſt réduit à occuper des eſpaces de plus en plus petits : or ſi ces eſpaces diminuent dans la même raiſon que les poids augmentent, on dit qu'un tel reſſort ſe comprime dans la raiſon des poids : ainſi ſi le poids étant double, le reſſort occupe ſeulement la moitié de l'eſpace qu'il occupoit lorſqu'il n'étoit chargé que d'un poids ſimple, ſi étant comprimé par un poids triple il occupe ſeulement le tiers de l'eſpace qu'il occupoit lorſqu'il n'étoit chargé que d'un poids ſimple, on dit que ce reſſort ſe comprime dans la proportion des poids ; c'eſt-à-dire, que les eſpaces ou les volumes auxquels il eſt réduit ſont entr'eux réciproquement comme les poids dont il eſt chargé ; or parce que les denſitez ou les condenſations d'une portion de matiere ſont entr'elles réciproquement comme les volumes ou les eſpaces qu'elles occupent, un volume deux fois plus petit donne une denſité ou une condenſation double ; c'eſt pour cela que ſi un reſſort occupe des eſpaces qui ſoient entr'eux réciproquement comme les poids qui le compriment, on dit qu'il ſe comprime dans la raiſon des poids, & que les denſitez ou condenſations ſont dans la raiſon de ces poids.

PROPOSITION XL.

157. *L'air ſe comprime ſelon la proportion des poids.*

Cette Propoſition ſe prouve par l'expérience, elle a été faite par M. Mariotte.

Il faut avoir le tuyau recourbé ADEB dont les branches ſoient paralleles & fort inégales en longueur, la grande AD ouverte à ſon extrémité ſupérieure A, & la moins longue fermée en B. Si par l'ouverture A on verſe un peu de vif-argent qui rempliſſe la partie horiſontale DE du tuyau, on ſçaura que l'air qui eſt renfermé dans la branche moins longue, eſt dans ſon état naturel, c'eſt-à-dire, qu'il eſt dans le même érat de preſſion que l'air extérieur, ſi le vif-argent remplit éxactemement la partie DE ſans monter dans l'une ni l'autre branche. Mais ſi le vif-argent montoit dans Fig. 28.

la branche EB, l'air qu'elle contiendroit ſeroit plus dilaté que l'air extérieur, puiſqu'une partie du poids de l'atmoſphere ſeroit employée à ſoutenir le mercure qui ſeroit monté dans la branche EB; l'air que cette branche contient ne ſeroit donc pas preſſé par tout le poids de l'atmoſphere; il ſeroit donc plus dilaté que l'air extérieur qui eſt chargé de tout ce poids. Si au contraire le vif-argent montoit dans la longue branche AD, l'air de la branche EB ſeroit plus condenſé que l'air extérieur, puiſqu'il ſoutiendroit par ſon reſſort le poids de l'atmoſphere & celui du mercure qui ſeroit monté dans la branche AD. Suppoſons donc que le mercure rempliſſe éxactement la partie horiſontale du tuyau ſans monter dans aucune des branches, l'air de la branche EB ſera comprimé par le poids de l'atmoſphere, de même que celui que nous reſpirons. Si l'on verſe encore du mercure dans la branche AD, il montera en partie dans la branche EB & y condenſera l'air qu'elle contient; car cet air ſera pour lors preſſé par le poids de l'atmoſphere, & par celui du mercure qu'on aura verſé en dernier lieu; il ſera donc réduit à occuper un eſpace d'autant moindre que le mercure ſe tiendra à une plus grande hauteur dans la branche AD. Cela poſé, ſi les eſpaces que cet air occupe dans la branche EB ſont entr'eux réciproquement comme les différens poids dont il chargé, il s'enſuit qu'il ſe comprime ſelon la proportion des poids: or ſuivant l'expérience de M. Mariotte, la branche EB ayant 12 pouces de haut, ſi l'air qu'elle contient eſt reduit à 8 pouces, en ſorte qu'il occupe ſeulement la hauteur IB, la colomne LM de mercure qui ſera au-deſſus du niveau LI, aura 14 pouces de haut; l'air IB ſera donc chargé pour lors du poids de l'atmoſphere équivalent au poids d'une colomne de mercure de 28 pouces, & de la colomne LM de 14 pouces; c'eſt-à-dire, que l'air IB ſera chargé en tout du poids d'une colomne de mercure de 42 pouces: or l'eſpace de 12 pouces que l'air occupe lorſqu'il eſt preſſé par le poids de l'atmoſphere ou d'une colomne de mercure de 28 pouces, eſt à l'eſpace 8 qu'il occupe lorſqu'il eſt preſſé par le poids d'une colomne de mercure de 42 pouces, comme 42 eſt à 28, c'eſt-à-dire, que les eſpaces 12 & 8 ſont entr'eux réciproquement comme les poids qui réduiſent l'air à occuper ces eſpaces. Donc l'air ſe comprime dans la proportion des poids.

Si l'air étoit réduit à occuper ſeulement la moitié de la hauteur BO, c'eſt-à-dire, 6 pouces, en ſorte que le niveau du mercure dans la branche FB fût en GF, pour lors la colomne GN ſeroit de 28 pouces, & l'air en BF ſeroit chargé d'un poids double, c'eſt-à-

dire,

dire, du poids de l'atmoſphere & de celui de la colomne GN, & l'on auroit encore la proportion, OB de 12 pouces eſt à FB de 6 pouces, comme 28 +28 ou 56 eſt à 28, c'eſt-à-dire, que les eſpaces OB, FB que l'air occuperoit ſeroient entr'eux réciproquement comme les poids dont il ſeroit chargé.

Si l'air étoit réduit à occuper ſeulement l'eſpace CB de 3 pouces, l'eſpace OB ſeroit quadruple de l'eſpace CB, pour lors la colomne KP qui ſeroit au-deſſus du niveau KC, auroit une hauteur de trois fois 28 pouces, ou de 84 pouces, & tout le poids dont l'air en CB ſeroit chargé, équivaudroit au poids de cette colomne & de celui de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, que ce poids total ſeroit égal à celui d'une colomne de mercure de 112 pouces, & l'on auroit encore la proportion, OB de 12 pouces eſt à CB de 3 pouces, comme 112 eſt à 28.

158. Remarque. 1°. Lorſqu'on dit que l'air ſe comprime ſelon la proportion des poids, ce n'eſt pas à dire que ſi on augmente à l'infini le poids qui charge l'air de la branche EB, il doive ſe condenſer ſans fin; car l'air a des parties ſolides qui ne peuvent être comprimées; lors donc que la condenſation aura été portée juſqu'au point de rapprocher les parties ſolides & de faire qu'elles ſe touchent toutes, il eſt viſible que l'air ne pourra plus être condenſé, quand même on le chargeroit encore d'un poids immenſe. Lors donc qu'on dit que l'air ſe condenſe dans la proportion des poids, la Propoſition eſt hypothetique, c'eſt dans l'hypothèſe qu'il puiſſe être encore condenſé. Suppoſons, comme dans l'éxemple de la Propoſition, que l'eſpace OB a 12 pouces ou 144 lignes, & que les parties ſolides de l'air puiſſent occuper l'eſpace d'une ligne lorſqu'elles ſe touchent toutes; ſuivant la Proportion, pour réduire l'air qui eſt en OB à une ligne, il faudra le charger d'un poids qui ſoit 144 fois plus grand que le poids de l'atmoſphere, ou que celui d'une colomne de vif-argent de 28 pouces de haut. Si on fait enſuite de nouvelles tentatives pour réduire l'air à occuper un eſpace moindre qu'une ligne, elles ſeroient inutiles, quand même on le chargeroit d'un poids énorme.

159. 2°. Lorſqu'on dit que l'air ſe condenſe dans la proportion des poids, il faut que cet air ſoit également échaufé dans toutes ſes parties; ſi la chaleur étoit inégalement répandue, le rapport des denſitez ou des condenſations ne ſeroit pas égal au rapport des poids. Suppoſons, par éxemple, que l'on prenne un volume d'air dans l'endroit où il eſt chargé de la moitié du poids de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, du poids d'une colomne de vif-argent de

14 pouces de haut, ſi en comparant les denſitez ou les condenſations de cet air & de celui que nous reſpirons, la proportion avoit lieu, il faudroit que l'air que nous reſpirons fût deux fois plus denſe que cet autre air qui ſe trouve dans les couches ſupérieures bien au-deſſus de nous, puiſque l'air ici-bas eſt chargé du poids entier de l'atmoſphere, & que l'autre air qui eſt au-deſſus n'eſt chargé, ſelon l'hypothèſe, que de la moitié de ce poids; or ſi l'air qui touche la terre eſt plus échaufé que l'air des couches ſupérieures, (comme il n'y a aucun lieu d'en douter) le poids de l'amoſphere ne ſera pas capable de lui donner une condenſation deux fois plus grande; car ſi on ſuppoſe que cet air eſt déchargé de la moitié de ſon poids, il ne portera plus que le poids d'une colomne de vif-argent de 14 pouces de haut; l'on aura donc deux portions d'air inégalement échaufées & chargées d'un poids égal. Cela poſé, l'air qui eſt plus échaufé a une force de reſſort plus grande, & qui réſiſte davantage à la compreſſion; le même poids ou un poids égal ne pourra donc pas le réduire au même degré de condenſation, cet air ſera donc plus rarefié que l'air de la couche ſupérieure; un poids double ne ſera donc pas aſſez puiſſant pour le condenſer au double de l'air ſupérieur, c'eſt pourquoi les condenſations de ces deux airs ne ſont pas entr'elles dans la raiſon des poids.

160. COROLL. 1°. *Les denſitez ou condenſations d'un même air ou d'un air également échaufé par-tout, ſont entr'elles comme les poids dont il eſt chargé.* Car les eſpaces qu'il occupe ſont entr'eux réciproquement comme les poids dont il eſt chargé; or les denſitez ou condenſations ſont auſſi entr'elles réciproquement comme les eſpaces qu'une même portion d'air occupe: un eſpace ou un volume deux ou trois fois moindre donne une denſité double ou triple; donc les denſitez de l'air ſont entr'elles comme les poids dont il eſt chargé.

Fig. 25. 161. 2°. *Si on prend un tuyau fermé à un bout & ouvert à l'autre, afin que l'air puiſſe y entrer, qu'on plonge le bout ouvert bien avant dans l'eau, il eſt viſible que l'eau entrera dans le tuyau, & qu'elle y condenſera l'air qu'il contient:* car l'eau qui eſt à l'ouverture du tuyau eſt preſſée par le poids de l'atmoſphere & par celui de l'eau qui eſt au deſſus, & l'air qui eſt dans le tuyau ne réſiſte par ſon reſſort qu'avec un effort égal au poids de l'atmoſphere; il ſera donc contraint de céder à la preſſion, & de ſe condenſer, l'eau entrera donc dans le tuyau: or ſi on enfonce l'ouverture à différentes profondeurs, l'air ſera inégalement condenſé; ſi on enfonce le tuyau en ſorte qu'il y ait 16 pieds d'eau au-deſſus de la ſurface inférieure de l'air, l'eau occupera le tiers du tuyau, & l'air les deux tiers qui

reſtent. S'il y a 32 pieds d'eau au-deſſus de la ſurface inférieure de l'air, l'eau occupera la moitié du tuyau, & l'air l'autre moitié. S'il y a 48 pieds d'eau au-deſſus de la ſurface inférieure de l'air, l'eau remplira les trois quarts de la capacité du tuyau, & l'air le quart qui reſte, &c. Pour entendre la raiſon de ces différentes condenſations de l'air, il ſuffit de remarquer qu'une hauteur d'eau de 32 pieds preſſera l'air du tuyau avec autant de force qu'une colomne de vif-argent de 28 pouces de haut; lors donc que le tuyau eſt enfoncé de maniere qu'il y a 16 pieds d'eau au-deſſus de la ſurface inférieure de l'air, la preſſion totale de cet air eſt égale au poids de l'atmoſphere & au poids d'une colomne de vif-argent haute de 14 pouces, c'eſt-à-dire, à une colomne de vif-argent de 42 pouces de haut; & lorſque le tuyau eſt hors de l'eau, l'air qu'il contient eſt preſſé par un poids égal à celui d'une colomne de vif-argent de 28 pouces. Or 42. 28 :: 3. 2. donc ſi on diviſe la longueur du tuyau en trois parties égales, ſuivant la proportion établie dans la Propoſition, l'eſpace que l'air occupe étant condenſé par le poids 42 eſt à l'eſpace qu'il occupe lorſqu'il eſt preſſé par le poids 28, comme 2 eſt à 3; mais lorſque l'air eſt preſſé par le poids 28, il occupe la longueur entiere 3 du tuyau; donc lorſqu'il eſt preſſé par le poids 24, il occupe l'eſpace 2, c'eſt-à-dire, les deux tiers de cette longueur. On prouvera par un raiſonnement ſemblable le rapport des condenſations pour les autres cas qu'on vient de ſuppoſer.

162. 3°. Puiſque l'air ſe condenſe dans la proportion des poids, quelle que ſoit d'ailleurs la figure & la grandeur du vaiſſeau, il s'enſuit que s'il eſt également condenſé dans deux vaſes ou tuyaux de même diametre, mais dont les capacitez ſoient fort inégales, il faudra la même force ou des poids égaux pour contenir cet air dans le même degré de compreſſion ou de condenſation.

Or l'air étant compoſé d'une multitude de petits reſſorts, on peut conclure que pour les tenir dans le même degré de tenſion dans les deux vaſes, il faut leur oppoſer la même force ou des forces égales. Par conſéquent dans l'équilibre un petit nombre de reſſorts réagit avec autant de force qu'un plus grand nombre de reſſorts égaux aux précédens, pourvû qu'ils ſoient de part & d'autre dans le même degré de tenſion. La raiſon de cet effet ſe tire de ce que dans l'équilibre chaque petit reſſort éxerce deux actions en ſens contraires; s'ils ſont pluſieurs ſur une même ligne, ce ſont comme autant de puiſſances égales qui deux à deux ſe réſiſtent également; c'eſt pourquoi pour l'équilibre il ſuffit d'oppoſer aux deux reſſorts

qui terminent la file, des forces égales à leur réaction. Il n'en eſt pas de même lorſqu'il s'agit de comprimer actuellement les reſſorts de ces deux airs, il faut plus de force pour condenſer l'air d'un long tuyau que pour condenſer également l'air d'un tuyau moins long de même diametre. Il eſt vrai que le même poids ou des poids égaux ſuffiſent pour produire cette condenſation dans les deux vaſes; mais le poids qui preſſe dans le plus long des deux, ſera ſans doute plus de tems à reduire l'air au degré de condenſation qu'il a dans le moins long, puiſqu'il a un plus grand eſpace à parcourir; la ſomme des efforts de ce poids ſera donc plus grande, car il agira pendant tout letems de la compreſſion.

De la compression de l'atmosphere.

163. Nous venons de voir que l'air ſe comprime dans la raiſon des poids, d'ailleurs il eſt peſant; donc il ſe comprime par ſon propre poids, & la condenſation doit ſe faire à proportion de ſa peſanteur; d'où il ſuit que l'air inférieur doit être plus condenſé que l'air ſupérieur; car le poids de l'air diminue depuis la terre juſqu'au haut de l'atmoſphere; la denſité ou la condenſation doit donc diminuer dans la même raiſon. On ſuppoſe que la maſſe de l'air eſt également échaufée dans toutes ſes parties.

164. *La force du reſſort de l'air eſt proportionnelle à ſa denſité ou à ſa condenſation*, car la condenſation eſt proportionnelle au poids dont il eſt chargé: or la force actuelle de ſon reſſort eſt auſſi proportionnelle au poids, puiſque le poids & cette force ſont en équilibre; donc la force de reſſort de l'air eſt proportionnelle à ſa denſité ou condenſation: un air deux fois plus denſe toutes choſes étant d'ailleurs égales, doit avoir une force de reſſort double.

165. La force de reſſort de l'air eſt réciproquement proportionnelle aux eſpaces qu'il occupe: s'il eſt deux fois, trois fois plus dilaté, ſa force de reſſort ſera deux, trois fois moindre. Car pour le condenſer, il faudra un poids deux, trois fois plus petit; ce poids ſera donc réciproquement proportionnel à l'eſpace que l'air occupe; mais le reſſort de l'air eſt proportionnel au poids qui le bande & qui le condenſe; donc la force de reſſort de l'air eſt réciproquement proportionnelle à l'eſpace qu'il occupe.

166. Si l'air de l'atmoſphere ſe condenſe dans la proportion des poids dont il eſt chargé, on peut en trouver à peu près la hauteur ou l'étendue au-deſſus de la terre. Il faut concevoir que l'atmoſphere eſt partagée en couches concentriques de même peſanteur, la peſanteur de toutes enſemble ſera égale à celle d'une cou-

che ou orbe de mercure qui environneroit la terre & qui auroit 28 pouces d'épaiſſeur ou 336 lignes. Si on conçoit que les couches d'air ſoient auſſi au nombre de 336, chacune d'elles peſera autant qu'une couche de mercure d'une ligne d'épaiſſeur, car on ſuppoſe qu'elles ſont toutes de même peſanteur. Cela poſé les poids qui chargent les couches ſupérieures diminuent dans la progreſſion arithmetique. Ainſi le poids qui charge la couche la plus baſſe & qui touche la terre étant exprimé par 336, nombre des lignes que contiennent 28 pouces, la couche ſuivante ſera chargée d'un poids exprimé par 335, celle qui ſuit immédiatement, d'un poids repréſenté par 334, enſorte que les poids diminuent dans la même raiſon que le nombre des couches : or ſi l'air de chaque couche eſt condenſé à proportion du poids dont il eſt chargé, on peut trouver l'étendue que chaque couche occupe, & par conſéquent la hauteur de l'atmoſphere. Suppoſons que la premiere couche celle qui environne immédiatement la terre, occupe une étendue de 63 ou 66 pieds (cette étendue eſt la hauteur où il faut porter le barometre pour qu'il baiſſe d'unc ligne); ſi l'on nomme X l'étendue de la ſeconde couche l'on aura cette proportion 335. 336 :: 66. X. c'eſt-à-dire que ſelon la définition & la propoſition les étendues 66 & X de la premiere & de la ſeconde couche ſont entr'elles réciproquement comme les poids 336 & 335 dont elles ſont chargées ; donc ſi on multiplie les deux moyens, & qu'on diviſe le produit 336 × 66 par 335 le quotient qui eſt le quatriéme terme de la proportion ſera l'étendue de la ſeconde couche.

167. L'on voit donc que le produit de l'étendue d'une couche multipliée par le poids dont elle eſt chargée, eſt égal au produit de l'étendue de toute autre couche pareillement multipliée par le poids dont elle eſt chargée, c'eſt pourquoi ſi on diviſe le produit 336 × 66 par 334 qui eſt le poids de la troiſiéme couche, on doit trouver ſon étendue ; ſi on diviſe ce produit par 333 qui eſt le poids de la quatriéme couche, on aura auſſi ſon étendue ; ſi on continue de diviſer ce produit par le poids des couches ſuivantes, on trouvera l'étendue que chacune occupe, & leur ſomme égalera l'étendue totale de l'atmoſphere. On peut abreger conſiderablement le calcul par la méthode de M. Mariotte en cette ſorte. Il reduit en douziémes de lignes l'épaiſſeur de 28 pouces de l'orbe de mercure dont le poids eſt égal à celui de l'atmoſphere ; en 28 pouces il y a 4032 douziémes de ligne. Il conçoit auſſi que l'atmoſphére contient 4032 diviſions de même peſanteur, & dont chacune

peſe par conſéquent autant qu'une diviſion de mercure qui auroit un douziéme de ligne d'épaiſſeur. Si on ſuppoſe qu'une ligne de mercure peut contrepeſer & faire équilibre avec une hauteur d'air de 60 pieds, un douziéme de ligne peſera autant que 5 pieds d'air; ainſi la premiere diviſion de l'atmoſphere occupera une étendue de 5 pieds; & parce que depuis la terre juſqu'à la moitié de l'atmoſphere, il y a 2016 diviſions, & qu'en la plus haute de ces 2016 diviſions l'air y eſt deux fois moins condenſé, puiſqu'il n'eſt chargé que de la moitié du poids de l'atmoſphere, il s'enſuit que la 2016e. diviſion occupera 10 pieds. Cela poſé M. Mariotte détermine les étendues de ces 2016 diviſions, & il ſuppoſe que les différences de ces étendues croiſſent depuis 5 pieds juſqu'à 10 en progreſſion arithmetique, en ſorte que la premiere diviſion de l'atmoſphere étant de 5 pieds, ſi la ſeconde eſt par exemple de 5 pieds 1 ligne, la troiſieme ſera de 5 pieds 2 lignes, la quatrieme de 5 pieds 3 lignes, &c. Ces différences que l'on ſuppoſe en proportion arithmetique, ne different gueres de celles qu'on determineroit par la proportion géometrique: or lorſqu'on connoît le premier & le dernier terme d'une progreſſion arithmetique avec le nombre des termes, il eſt aiſé d'en trouver la ſomme, ce qui ſe fait en multipliant la ſomme du premier & du dernier terme de la progreſſion par la moitié du nombre des termes, ou en multipliant la moitié de cette ſomme par le nombre des termes (25 *Arith.*): la ſomme du premier & du dernier terme de la progreſſion eſt 15, le nombre des termes eſt 2016, & le produit cherché 15120 pieds qui eſt l'étendue qu'occupent les 2016 premieres diviſions qui peſent autant que 14 pouces de vif argent. Le reſte de l'air aura encore 2016 diviſions dont la plus baſſe eſt chargée du poids de 14 pouces de mercure & elle occupe une étendue de 10 pieds; & parce que depuis cette diviſion juſqu'à la moitié du reſte de l'air il y a 1008 diviſions, il s'enſuit que la 1008e. n'étant chargée que de la moitié du poids de 14 pouces de mercure, occupera une étendue de 20 pieds. On aura donc encore une progreſſion arithmetique dont on connoît le premier & le dernier terme qui ſont 10 & 20, & le nombre des termes qui eſt 1008. On trouvera donc que la ſomme de toutes les étendues qui forment cette progreſſion eſt de 15120 pieds, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt égale à l'étendue des 2016 diviſions précedentes. La diviſion dont l'étendue occupe 20 pieds a encore au-deſſus d'elle 1008 diviſions; & parce que juſqu'au milieu de ce nombre il y en a 504, la 504e. diviſion n'étant char-

Arith. 25.

gée que de la moitié du poids que ſupporte la 1008e. elle aura une étendue double, ainſi elle occupera 40 pieds; on aura donc encore une progreſſion arithmetique dont on connoît le premier & le dernier terme qui ſont 20 & 40, & dont le nombre des termes eſt 504: ſi on multiplie la ſomme de 20 & de 40, c'eſt-à-dire 60 par la moitié de 504, on trouvera que l'étendue totale de ces 504 diviſions eſt encore de 15120 pieds. Si on continue à operer de même pour les diviſions qui reſtent en cherchant d'abord l'étendue de la diviſion qui eſt au milieu de ces diviſions reſtantes, on aura de nouvelles progreſſions arithmetiques dans leſquelles on connoîtra le premier & le dernier termes, & le nombre des termes, & l'on trouvera que la ſomme des termes de chacune de ces progreſſions ſuivantes eſt égale à 15120 pieds.

168. Suivant ce calcul M. Mariotte trouve qu'il y a environ 15 lieues d'air au-deſſus de la terre; & pour en confirmer la bonté, il l'applique à deux celebres obſervations, dont l'une eſt l'expérience du Puy de Domme dont on a parlé ci-devant, & l'autre a été faite par M. Caſſini.

169. Remarque. Les condenſations de l'air de l'atmoſphere que M. Mariotte ſuppoſe ſe faire dans la proportion des poids dont il eſt chargé, ne s'accordent pas avec les obſervations. Suppoſons, par exemple qu'un lieu étant plus élevé qu'un autre de 397 toiſes, le mercure s'y tienne dans le barometre à la hauteur de 25 pouces 5 lignes, lorſqu'au lieu le plus bas il eſt à 28 pouces, l'abbaiſſement du mercure eſt de 2 pouces 7 lignes; ainſi 2 pouces 7 lignes dont le mercure s'abbaiſſe répondent à une hauteur d'air de 397 toiſes: or ſi on fait le calcul ſuivant le principe que l'air ſe condenſe dans la proportion des poids, on trouve que la hauteur à laquelle 2 pouces 7 lignes dont le mercure s'abbaiſſe répondent à une hauteur de 342 toiſes, en ſorte que les hauteurs obſervées ſont toujours plus grandes que celles qui ſuivent de la proportion établie par M. Mariotte, & d'autant plus grandes que les lieux où l'on fait les obſervations ſont plus élevez ſur le niveau de la mer; & le calcul s'éloigne de l'obſervation, ſoit qu'on le faſſe ſuivant la proportion géometrique, ſoit qu'on lui ſubſtitue la proportion arithmetique, comme M. Mariotte fait. Les hauteurs calculées ſuivant la proportion géometrique ſont moindres que celles que l'on trouve ſuivant la progreſſion arithmetique, & celles que donne la progreſſion arithmetique encore moindres que celles que l'on trouve par l'obſervation; d'où il ſuit que l'air de l'atmoſ-

phere ne ſe comprime pas dans la proportion des poids. *Voyez les Memoires de l'Acad. de l'an.* 1705 *p.* 61 *& les ſuiv.* La regle a lieu à l'égard d'un même air tel qu'eſt celui qu'on condenſe dans un tuyau, parce qu'il eſt également échaufé dans toutes ſes parties; mais deux airs inégalement échauffez ne doivent pas ſuivre la regle trouvée par M. Mariotte: or il eſt certain qu'à différentes hauteurs ſur le niveau de la mer, l'air eſt inégalement échauffé.

De la condensation et de la dilatation de l'air dans les vaiſſeaux qui le contiennent.

170. On peut condenſer l'air qui eſt dans un vaiſſeau en deux manieres, 1°. en y introduiſant du nouvel air, 2°. en reduiſant celui qui y eſt déja, dans des bornes plus étroites, c'eſt-à-dire en diminuant la capacité du vaiſſeau. On peut auſſi dilater l'air d'un vaſe en l'évacuant en partie, ou bien en augmentant la capacité du vaſe.

PROPOSITION XII.

171. *Si on introduit de l'air dans un vaiſſeau, ce qu'on exécute par le moyen d'une ſeringue, pour avoir le rapport de l'air condenſé à l'air primitif, il faut multiplier la capacité de la ſeringue par le nombre des coups de piſton donnez, à ce produit joindre la capacité du vaſe, & comme cette ſomme eſt à la capacité du vaſe, ainſi l'air condenſé eſt à l'air primitif.*

Suppoſons que la capacité de la ſeringue ou corps de pompe ſoit égale à celle du vaſe que l'on ſuppoſe exprimée par 1, & que l'on ait donné trois coups de piſton, on aura introduit dans le vaſe trois fois plus d'air qu'il n'y en avoit, & l'air condenſé ſera à l'air primitif comme 4 eſt à 1; or ſi on multiplie la capacité du corps de pompe, ſçavoir 1 par 3 qui eſt le nombre des coups de piſton donnez, & qu'au produit 3 on ajoute la capacité du vaſe exprimée par 1; la ſomme ſera 4, & elle ſera à la capacité du vaſe comme 4 eſt à 1, donc l'air condenſé eſt à l'air primitif comme la ſomme dont il s'agit ici eſt à la capacité du vaſe.

Si la ſeringue ou corps de pompe étoit deux fois plus grande que le vaſe, & le nombre de fois qu'elle auroit été vuidée encore 3, l'on auroit introduit dans le vaſe ſix fois plus d'air qu'il n'y en avoit, & l'air condenſé ſeroit à l'air primitif comme 7 eſt à 1: or le produit 6 qui réſulte de la capacité 2 du corps de pompe & de 3 qui eſt le nombre des coups de piſton, étant ajoûté à 1 qui

eſt

qui eſt la capacité du vaſe, le rapport de cette ſomme eſt auſſi égal à celui de 7 à 1; d'où l'on voit que le rapport de l'air condenſé à l'air primitif eſt égal à celui qui eſt entre cette ſomme & la capacité du vaſe, quelles que ſoient les grandeurs du vaſe & de la ſeringue.

172. On a dit plus haut de quelle maniere on pouvoit condenſer l'air d'un vaſe ou d'un tuyau en le plongeant dans l'eau, & l'on a déterminé la force de l'air condenſé à l'air dilaté; on peut faire la même opération en plongeant le tuyau dans du mercure, ou bien faire l'expérience de M. Mariotte en ſe ſervant d'un tuyau recourbé dont l'une des branches ſoit fort longue & ouverte à ſon extrémité ſupérieure, & l'autre plus courte & fermée.

PROPOSITION XIII.

173. *Lorſqu'on rarefie l'air du récipient de la machine Pneumatique, on aura le rapport de l'air primitif à ce qui en reſte dedans, ſi après avoir fait une ſomme de la capacité du récipient & du corps de pompe, on éleve cette ſomme & la capacité du recipient au degré de puiſſance indiqué par le nombre des coups de piſton donnez; car le rapport qui eſt entre l'air primitif & ce qui en eſt reſté dans le récipient, eſt égal au rapport de ces deux puiſſances.*

Suppoſons que la capacité du corps de pompe ſoit égale à celle du récipient, leur ſomme ſera à celle du récipient comme 2 eſt à 1, que l'on ait donné quatre coups de piſton; il eſt certain qu'au premier coup de piſton il n'eſt reſté que la moitié de l'air primitif; au ſecond coup il n'eſt reſté que la moitié du premier reſte ou le quart de l'air primitif; au troiſiéme coup de piſton il n'eſt reſté dans le récipient que la moitié de ce ſecond reſte ou la huitiéme partie de l'air primitif; au quatriéme coup de piſton il n'eſt reſté que la moitié de ce troiſiéme reſte, c'eſt-à-dire, la ſeiziéme partie de l'air primitif. Ainſi l'air primitif eſt à l'air dilaté comme 16 eſt à 1; mais la quatriéme puiſſance de 2 eſt à la quatriéme puiſſance de 1, comme 16 eſt à 1; donc l'air primitif & l'air dilaté ſont entr'eux comme la quatriéme puiſſance de 2 qui exprime les capacitez du récipient & du corps de pompe eſt à la quatriéme puiſſance de 1, qui eſt la capacité du récipient.

Si le corps de pompe étoit deux fois plus grand que le récipient, la ſomme des capacitez ſeroit 3; pour lors après le premier coup de piſton il y auroit dans le récipient ſeulement le tiers de l'air primitif; après le ſecond coup de piſton il y reſteroit ſeulement le tiers du premier reſte ou la neuviéme partie de l'air primitif; après le troiſiéme coup de piſton il reſteroit ſeulement le tiers du

ſecond reſte, ou la vingt-ſeptiéme partie de l'air primitif; après le quatriéme coup de piſton il reſteroit ſeulement le tiers du troiſiéme reſte, ou la 81me partie de l'air primitif; en ſorte que l'air primitif ſeroit à l'air dilaté comme 81 à 1, c'eſt-à-dire, comme la quatriéme puiſſance de 3 qui eſt la ſomme des capacitez du récipient & du corps de pompe, eſt à la quatriéme puiſſance de 1, qui eſt la capacité du récipient.

174. Cette Propoſition donne le moyen de dilater l'air du récipient dans tel rapport que l'on veut. On propoſe, par éxemple, de faire que l'air qui reſte dans le récipient ſoit 81 fois plus dilaté que l'air naturel que nous reſpirons. On ſuppoſe que la grandeur du récipient eſt à celle du corps de pompe comme 1 eſt à 2. Il eſt viſible qu'il s'agit de trouver le nombre des coups de piſton qu'il faut donner pour réduire l'air au degré de dilatation propoſé; les capacitez du récipient & du corps de pompe priſes enſemble étant 3, & celle du récipient 1, ſi l'on éleve ces deux nombres au degré de puiſſance marqué par le nombre des coups de piſton qu'il faut donner, lequel eſt inconnu, & que l'on peut exprimer par x, l'on aura la proportion, $3^x . 1^x :: 81 . 1$, c'eſt-à-dire, l'air primitif 81 & l'air dilaté 1 ſont entr'eux comme les puiſſances $3^x . 1^x$, dont l'expoſant x indique le nombre des coups de piſton. Pour trouver le nombre inconnu x, il faut opérer ſur les logarithmes des nombres 3, 1, 81, & 1, en ſe ſervant de la table des logarithmes. On ſçait que ſi on multiplie les logarithmes des nombres 3 & 1 par l'expoſant commun x, on trouve les logarithmes des puiſſances $3^x . 1^x$. Le logarithme de 3 eſt 4771213, celui de 1 eſt 0 ou zero: ainſi les logarithmes des puiſſances $3^x . 1^x$. ſont $x \times 4771213$ & $x \times 0$ ou 0; les logarithmes de 81 & de 1 ſont, 1.9084850 & 0. Or on ſçait encore que lorſque quatre nombres ſont en proportion géométrique, leurs logarithmes ſont en proportion arithmétique; l'on aura donc la proportion arithmétique, $x \times 4771213 . x \times 0 : 1.9084850 . 0$. La ſomme des extrêmes étant égale à la ſomme des moyens, (25 *Arith.*) l'on aura $x \times 4771213 + 0 = 1.9084850 + x \times 0$, ou $x \times 4771213 = 1.9084850$; car $x \times 0 = 0$, donc $x = \frac{1.9084850}{4771213} = 4$; donc l'expoſant x des puiſſances 3^x 1^x eſt égal à 4, & parce que cet expoſant eſt égal au nombre des coups de piſton qu'il faut donner, il s'enſuit que ſi l'on donne quatre coups de piſton, l'air du récipient ſera 81 fois plus dilaté que l'air naturel. Cette propoſition eſt l'inverſe de la précédente, dans laquelle on a ſuppoſé que le nombre des coups de piſton étoit connu.

175. On peut auſſi dilater l'air dans tel rapport que l'on veut ſans la machine pneumatique, en faiſant une expérience ſemblable à celle de Toricelli ; pour faire l'expérience de Toricelli on remplit tout-à-fait un tuyau de vif-argent, afin qu'il n'y reſte point d'air (on ſuppoſe que le tuyau eſt fermé à un bout) on renverſe enſuite le tuyau, & on fait tremper le bout ouvert dans du vif-argent qu'on a mis dans un vaſe. Mais dans l'expérience qu'il s'agit de faire ici, on laiſſe une certaine quantité d'air dans le tuyau, c'eſt-à-dire, qu'on ne le remplit pas entierement de vif-argent, on renverſe enſuite le tuyau, & on fait tremper le bout ouvert dans le vif-argent du vaſe ; pour lors l'air qui étoit à l'ouverture du tuyau, & qui occupoit une partie de ſa longueur, monte au haut, parce que le vif-argent, qui eſt plus peſant, deſcend à l'endroit le plus bas du tuyau. Or lorſque l'air eſt ainſi monté, il eſt néceſſaire qu'il ſe dilate, & qu'une partie du vif-argent qui eſt dans le tuyau ſe précipite dans le vaſe : car le poids du vif-argent qui eſt dans le tuyau & le reſſort de l'air qui eſt auſſi dans le tuyau compoſent une force qui doit faire équilibre avec le poids de l'atmoſphere ou de l'air extérieur, c'eſt-à-dire, avec une colomne de vif-argent de 28 pouces ; or ſi l'air demeuroit au haut du tuyau dans le même degré de condenſation qu'il a, il pourroit ſeul par ſon reſſort contrepeſer la colomne de 28 pouces de mercure, ou le poids de l'air extérieur, l'air extérieur n'a donc pas aſſez de force pour ſoutenir le vif-argent du tuyau, & pour empêcher l'air qui en occupe la partie ſupérieure de ſe dilater ; cet air ſe dilatera donc, & le vif-argent deſcendra en partie dans le vaſe : néanmoins il ne deſcendra pas tout, car pour lors le tuyau ſeroit ſeulement rempli d'un air dilaté, d'un air dont le reſſort s'étant affoibli par la dilatation ne pourroit plus faire équilibre avec l'air extérieur. Fig. 30.

176. Si l'on connoît la longueur du tuyau, & que l'on détermine l'eſpace que l'air dilaté doit y occuper, ou bien le rapport des étendues que l'air naturel & l'air dilaté doivent occuper dans le tuyau, on pourra auſſi connoître la quantité d'air naturel qu'il faudra y introduire afin qu'il ſe dilate dans le rapport propoſé. Suppoſons que l'on demande qu'après que le tuyau ſera renverſé & qu'il ſera mis en expérience, l'air dilaté occupe les deux tiers de la longueur, que l'on ſuppoſe être en tout de 36 pouces ; le vif-argent occupera donc l'autre tiers, & ſera par conſéquent 12 pouces au-deſſus du niveau de celui qui eſt dans le vaſe ; donc l'air dilaté qui occupera 24 pouces ſera équilibre avec une partie du poids de l'atmoſphere ou de l'air extérieur & le vif-argent qui ſe ſoutient à la

hauteur de 12 pouces, ſera équilibre avec l'autre partie : or parce que le poids de l'atmoſphere eſt égal au poids d'une colomne de mercure de 28 pouces, & que ſelon l'hypothèſe le tuyau doit en contenir 12, les 12 pouces du tuyau en contrebalanceront un pareil nombre dans le poids de l'atmoſphere ; donc les ſeize pouces reſtans du même poids ſeront contrebalancez par l'air dilaté qui eſt de 24 pouces. Cela poſé, 1°. l'air ſe condenſe dans la proportion des poids, ou les eſpaces qu'il occupe ſont entr'eux réciproquement comme ces poids. 2°. Les efforts ou preſſions qu'il cauſe par ſon reſſort ſont auſſi réciproquement proportionnelles aux eſpaces qu'il occupe ; donc puiſque l'on connoît l'eſpace que l'air dilaté occupe lorſqu'il eſt chargé d'un poids égal à celui d'une colomne de mercure de ſeize pouces de haut, l'on connoîtra auſſi l'eſpace qu'il doit occuper lorſqu'il ſera chargé du poids d'une colomne de 28 pouces, ou du poids de l'atmoſphere, en faiſant la proportion, 28. 16 :: 24. $x = 13\frac{5}{7}$; c'eſt-à-dire, les poids 28 & 16, & par conſéquent les efforts que l'air du tuyau éxerce par ſon reſſort ſont entre eux réciproquement comme les eſpaces 24 & $13\frac{5}{7}$ auxquels il eſt réduit par ces poids ; treize pouces $\frac{5}{7}$ eſt donc l'étendue que l'air doit avoir lorſqu'il eſt dans ſon état naturel, ou dans le degré de condenſation qu'il a à la ſurface de la terre ; c'eſt pourquoi ſi on verſe 22 pouces $\frac{2}{7}$ de vif-argent dans le tuyau, & que les treize pouces $\frac{5}{7}$ qui reſtent ſoient occupez par l'air, lorſque le tuyau ſera renverſé & qu'il trempera dans le vaſe, il ſe dilatera & remplira l'étendue de 24 pouces ; car dans ce degré de dilatation, il peut contrebalancer ſeize parties du poids de l'atmoſphere & les douze pouces de mercure qui ſont dans le tuyau contrepeſent les douze parties reſtantes ; en ſorte que ſi on vouloit ſuppoſer que le mercure ſe tient plus bas ou plus haut lorſque le tuyau eſt renverſé, il ſeroit aiſé de faire voir qu'il n'y auroit point équilibre ; ſi le mercure montoit au-deſſus de 12 pouces l'air du tuyau pourroit contrepeſer par ſon reſſort plus de ſeize parties du poids de l'atmoſphere, comme il paroît par le calcul, le poids du vif-argent & le reſſort de l'air compoſeroient donc une force plus grande que le poids de l'atmoſphere. Si le vif-argent du tuyau deſcendoit au-deſſous de 12 pouces, le reſſort de l'air dilaté ne ſeroit plus aſſez fort pour contrepeſer ſeize parties du poids de l'atmoſphere, il n'y auroit donc point équilibre entre ce poids d'une part & le vif-argent joint au reſſort de l'air dilaté de l'autre part.

177. En parlant de la longueur du tuyau, on n'a point eu égard à la partie qui doit tremper dans le vaſe, il faut toujours la dé-

duire, & elle ne doit point entrer dans le calcul.

178. Si le rapport de l'air primatif à l'air dilaté étoit donné; ſi on vouloit, par exemple, que l'air fût dilaté au triple, au quadruple de l'air naturel, on trouveroit de la même maniere la quantité d'air naturel qu'il devroit y avoir dans le tuyau lorſqu'on le renverſe, pour qu'il pût ſe dilater dans le degré propoſé. Suppoſons encore que le tuyau a 36 pouces de long, & que l'air qu'on y laiſſe doive être 4 fois plus dilaté que l'air extérieur; l'air dilaté ne pourra donc contrepeſer par ſon reſſort que la quatriéme partie du poids de l'atmoſphere, c'eſt-à-dire, 7 pouces de mercure; donc le vif-argent du tuyau contrepeſera les trois quarts reſtans, il ſera donc 21 pouces au-deſſus du niveau; par conſéquent l'air dilaté occupera les 15 pouces reſtans du tuyau, & l'on trouvera par une opération ſemblable à celle de l'exemple précedent qu'il faut verſer dans le tuyau 32 pouces $\frac{1}{4}$ de vif-argent; & laiſſer occuper à l'air naturel les $3\frac{3}{4}$ pouces reſtants. Voici la proportion qu'il faut faire $28 . 7 :: 15 . x = 3\frac{3}{4}$.

179. Dans les deux articles qui précedent on a ſuppoſé que la dilatation de l'air qui eſt dans le tuyau étoit connue, & l'on a cherché quelle étoit la quantité d'air naturel ou primitif qu'il falloit laiſſer dans le tuyau, afin que lorſqu'il ſeroit en expérience, il pût ſe dilater dans le degré propoſé; ſi la quantité d'air primitif eſt donnée, pour lors ſi on ne veut point s'en rapporter entierement à l'expérience, pour en apprendre quel doit être le degré de dilatation de cet air, ſi on veut prévoir & déterminer d'avance ce qui doit arriver, on le peut encore en raiſonnant ſuivant les mêmes principes; mais il faut avertir que le calcul conduit à une égalité qui eſt du ſecond degré, c'eſt-à-dire, que la quantité inconnue que l'on cherche, eſt élevée au quarré, & que de plus elle ſe trouve multipliée par d'autres quantitez connues; de là vient qu'on ne peut pas trouver cette quantité en multipliant ſeulement deux termes de la proportion, & en diviſant le produit par le troiſiéme. Cette égalité n'eſt pas cependant difficile à réſoudre: voici de quelle maniere on peut y arriver, & trouver l'inconnue que l'on cherche.

Suppoſons que la longueur AB du tuyau eſt de 24 pouces (on néglige la partie qui trempe dans le vaſe BD). Avant que l'air qu'il contient ſe dilate, il y a 15 pouces de vif-argent qui montent juſqu'au point C, le reſte AC qui eſt de 9 pouces eſt plein de l'air qui doit ſe dilater. On demande quelle eſt la quantité de cette extenſion ou dilatation qu'il doit recevoir. Avant d'entrer Fig. 30.

dans la réſolution de la queſtion, il faut donner des noms aux quantitez qui doivent entrer dans le calcul. Si on nomme x la quantité CE dont l'air ſe dilate, AC étant de 9 pouces, AE ſera exprimée par $9+x$, & BC étant de 15 pouces, BE ſera égal à $15-x$.

Poids de l'atmoſp. $=28$
AC $=9$ pouces.
CE $=x$
BC $=15$ pouces.
AE $=9+x$
BE $=15-x$

Cela poſé, il eſt évident que l'air dilaté AE doit faire équilibre avec une partie du poids de l'atmoſphere, & que le vif-argent BE qui reſte dans le tuyau doit faire équilibre avec l'autre partie; il eſt auſſi certain que lorſque l'air occupe l'eſpace AC, il peut par la force de ſon reſſort, contrepeſer le poids de l'atmoſphere ou faire équilibre avec une colomne de vif-argent de 28 pouces de haut, & que lorſqu'il eſt dilaté & qu'il occupe la partie AE, ſon reſſort s'eſt affoibli de maniere qu'il ne peut plus contrebalancer qu'une partie de ce poids, & que les efforts qu'il fait lorſqu'il eſt réduit en AC, & qu'il eſt dilaté en AE, ſont entr'ux comme les condenſations, ou réciproquement commme les volumes ou eſpaces AC, AE; c'eſt pourquoi ſi on nomme 28 le poids de l'atmoſphere ou la force du reſſort que l'air exerce lorſqu'il eſt réduit en AC, on peut avoir une expreſſion de ſa force lorſqu'il eſt dilaté en AE en faiſant cette proportion AE. AC :: 28. $\frac{AC \times 28}{AE}$

Ce quatriéme terme exprime la force de reſſort de l'air dilaté en AE, car cette force & la force 28 doivent être entr'elles réciproquement comme les eſpaces AE, AC conformément à la proportion qu'on vient de faire : or puiſque l'air dilaté contrepeſe par la force dont on vient de trouver l'expreſſion, une partie du poids 28 de l'atmoſphere ou d'une colomne de vif-argent de 28 pouces, & la colomne BE l'autre partie, il s'enſuit que la colomne BE & la force de l'air dilaté doivent compoſer une force totale qui ſoit égale au poids d'une colomne de mercure de 28 pouces. L'on aura donc cette égalité $BE + \frac{AC \times 28}{AE} = 28$. Si au lieu des quantitez BE, AC, AE on met leurs valeurs, on aura cette expreſſion $15 - x + \frac{9 \times 28}{9+x} = 28$. Si on ôte la fraction en multipliant $15-x$, & 28 par le dénominateur $9+x$, on aura cette nouvelle expreſſion $15 \times 9 - 9x + 15x - xx + 9 \times 28 = 9 \times 28 + 28x$. Si on retranche de part & d'autre 1°. 9×28. 2°. $15x$, l'égalité ſera réduite à cette expreſſion $15 \times 9 - 9x - xx = 13x$,

& ſi on ajoute aux deux membres de l'égalité $+9x+xx$ ce qui ne trouble pas l'égalité, il eſt viſible que dans le premier membre les quantitezajoutées ſeront contraires aux quantitez $-9x-xx$; ainſi l'égalité ſera réduite à cette expreſſion $15\times 9=9x+xx+13x$ ou $xx+22x=15\times 9$ qui eſt une équation du ſecond degré. Si on ajoute aux deux membres le quarré de 11 moitié du nombre 22 qui multiplie x, on aura une nouvelle égalité dont le premier membre ſera un quarré parfait & dont on pourra tirer la racine quarrée, ce qui ſervira à trouver la valeur de x. Voici cette nouvelle équation $xx+22x+121=15\times 9+121$. Or la racine quarrée du premier membre eſt $x+11$, celle du ſecond eſt indiquée par cette expreſſion $\sqrt{15\times 9+121}$; l'on aura donc $x+11=\sqrt{15\times 9+121}$, car les nombres égaux ont leur racines ſemblables égales; ſi après avoir multiplié 15 par 9 & avoir ajouté au produit 135, le nombre 121 on tire la racine quarrée de cette ſomme qui eſt 256, on trouvera 16 pour cette racine; donc $x+11=16$, ſi on retranche de part & d'autre 11 on aura $x=5$. Ainſi la dilatation que l'air recevra où l'eſpace CE eſt de 5 pouces & l'eſpace AE de 14 pouces, l'eſpace BE ſera de 15 pouces moins 5, c'eſt-à-dire 10 pouces. Or il eſt aiſé de démontrer que ſi le mercure ſe tient à la hauteur de 10 pouces & que l'air dilaté occupe 14 pouces, ſa force de reſſort & les 10 pouces de vif-argent doivent contrepeſer le poids de l'atmoſphere ou le poids d'une colomne de vif-argent de 28 pouces de haut. 1°. Le vif-argent du tuyau contrepeſera 10 pouces de cette colomne. 2°. Il reſte que l'air dilaté contrepeſe les 18 pouces reſtans, ce qui n'eſt pas difficile à appercevoir, car lorſque l'air occupe l'eſpace AC, il contrepeſe par la force de ſon reſſort 28 pouces de mercure, & lorſqu'il occupe l'eſpace AE il doit contrepeſer une colomne de vif-argent d'autant moindre que l'eſpace AE eſt plus grand que l'eſpace AC, & l'on doit avoir cette proportion; l'eſpace AE eſt à l'eſpace AC comme le poids 28 eſt au poids cherché X: or puiſque l'antécedent AE qui eſt exprimé par 14 n'eſt que la moitié de l'antécedent 28, il faut que le conſéquent AC qui eſt 9, ne ſoit que la moitié du conſéquent X; ce conſéquent, c'eſt-à-dire le poids cherché, eſt donc exprimé par 18; donc l'air dilaté en AE peut ſoutenir par ſon reſſort le poids d'une colomne de mercure de 18 pouces de hauteur, par conſéquent l'air dilaté & le mercure du tuyau doivent faire équilibre avec le poids de l'atmoſphere; & l'on ne peut pas ſuppoſer que le mercure ſoit plus haut ni plus bas, car s'il étoit au-deſſus de 10 pouces, ſon poids joint au reſſort de l'air, feroit une force plus grande

que le poids de l'atmoſphere, & s'il ſe tenoit au-deſſus de 10 pouces, cette force ſeroit moindre que celle de l'atmoſphere, il n'y auroit donc point équilibre.

180. On peut appliquer la formule $BE + \frac{AC \times 28}{AE} = 28$ à tant d'exemples que l'on voudra : ainſi ſi l'on ſuppoſe que le tuyau AB a 30 pouces de long, & que AC ſoit de 8 pouces, BC ſera de 22 pouces, AE ſera égal à $8+x$, BE à $22-x$; & après avoir ſubſtitué ces valeurs au lieu de BE, AC, AE, avoir ôté la fraction & avoir effacé les quantitez qui ſe détruiſent, on arrive à cette équation $xx+14x=22\times 8$, ſi on ajoute aux deux membres de l'égalité le quarré de la moitié de 14 qui multiplie x, on a $xx+14x+49=22\times 8+49$, dont le premier membre eſt un quarré parfait qui a pour racine $x+7$, la racine quarrée du ſecond membre eſt 15, ainſi $x+7=15$, ſi on retranche de part & d'autre 7, x ſera égal à 8, c'eſt à-dire, que l'air dilaté AE occupera 16 pouces ou un eſpace double de AC, & le vif-argent du tuyau aura 14 pouces de haut ; & l'on prouvera encore que cet air dilaté & le poids de la colomne BE doivent faire équilibre avec le poids de l'atmoſphere, car la colomne BE en contrebalance la moitié, il reſte donc que l'air dilaté contrepeſe l'autre moitié, ce qui eſt évident, car l'air en AC contrepeſe par ſon reſſort le poids entier de l'atmoſphere ; donc lorſqu'il eſt dilaté au double il doit en contrebalancer ſeulement la moitié ; donc l'air dilaté & la colomne de vif-argent doivent faire équilibre avec le poids de l'atmoſphere.

Du rapport des preſſions que l'air condenſé produit ſur les parois intérieures des vaiſſeaux qui le contiennent.

181. Lorſque l'air eſt preſſé la preſſion ſe communique également en tout ſens, c'eſt là la propriété commune à tous les fluides, c'eſt pourquoi toutes les parties d'un air condenſé ſont dans le même degré de compreſſion, tous les petits reſſorts ſont également bandez, & ils preſſent ſur les parois du vaiſſeau également en tout ſens. Lorſque de l'air preſſe les parois intérieures de deux vaiſſeaux, la difference des preſſions peut venir de trois cauſes, 1°. de l'inégalité des ſurfaces, 2°. de l'inégalité de denſitez, 3°. de l'inégalité des chaleurs.

PROPOSITION XIV.

182. *Si deux vaiſſeaux que l'on ſuppoſe clos de tout côté comme un balon, une veſſie, &c. contiennent de l'air, les preſſions qu'il cauſe ſur leurs parois intérieures, ſont en raiſon compoſée des ſurfaces, des quarrez des denſitez & des chaleurs.* Dem.

DEMONSTRATION. Puiſque tous les petits reſſorts d'un même air ſont également bandez, ſi l'on ſuppoſe d'abord que les denſitez & les chaleurs ſoient égales, les preſſions ſeroient entr'elles comme les ſurfaces ; une ſurface double ſerviroit d'appui à un nombre de reſſorts double, leſquels étant ſuppoſez également comprimez dans les deux vaiſſeaux, cauſeroient des preſſions proportionnelles à leurs nombres, c'eſt-à-dire, aux ſurfaces ſur leſquelles ils ſeroient appuyez ; une ſurface double ſupporteroit une preſſion double ; mais ſi l'air eſt, par exemple, trois fois plus denſe, ſur une même ſurface, il y aura un nombre de reſſorts trois fois plus grand, d'ailleurs parce que chacun d'eux eſt trois fois plus comprimé, il éxercera une force triple ; donc pour avoir la preſſion de tous ceux qui s'appuient ſur une même ſurface, il faudra multiplier leur nombre qui eſt triple par la force de l'un d'eux qui eſt auſſi triple ; donc la preſſion cauſée ſur cette ſurface ſera 9 fois plus grande, en ſuppoſant que les parois des deux vaiſſeaux ſont égales. Si de plus cette ſurface eſt double, comme on l'a d'abord ſuppoſé, la preſſion ſera 18 fois plus grande ; d'où l'on voit que la chaleur étant ſuppoſée la même pour l'air des deux vaiſſeaux, les preſſions ſeroient en raiſon compoſée des ſurfaces 2 & 1, & des quarrez 9 & 1 des denſitez 3 & 1. Si enfin la chaleur eſt plus grande, elle augmentera le reſſort de l'air à proportion de ſon intenſité, un degré de chaleur quadruple augmentera quatre fois autant la force de chaque petit reſſort, il faudra donc quadrupler la preſſion qui eſt déja 18 fois plus grande ; par conſéquent les preſſions des parois intérieures des deux vaiſſeaux, ſont en raiſon compoſée des ſurfaces 2 & 1, des quarrez 9 & 1, des denſitez 3 & 1, & des chaleurs 4 & 1, c'eſt-à-dire, que ces preſſions ſont entr'elles comme 72 & 1.

183. COROLLAIRES. 1°. *Les denſitez de l'air ſont entr'elles comme les produits qui réſultent des quantitez & des capacitez des vaiſſeaux priſes en raiſon inverſe.* Car plus la quantité d'air contenue dans un vaſe eſt grande, plus la denſité l'eſt auſſi ; la denſité eſt encore d'autant plus grande, que la capacité du vaſe qui contient cette quantité d'air, eſt plus petite. Les denſitez ſont donc entr'elles comme les produits des quantitez d'air & des capacitez des vaiſſeaux priſes en raiſon inverſe ; c'eſt pourquoi ſi dans le rapport que l'on vient d'établir dans la propoſition, au lieu des denſitez, on met les produits dont il s'agit ici, les preſſions ſeront en raiſon compoſée des ſurfaces, des quarrez de ces produits, & des chaleurs de l'air.

184. 2°. Si deux poids ſont équilibre avec de l'air qu'ils condenſent dans deux vaiſſeaux, ils ſont entr'eux en raiſon compoſée des ouvertures par où ils preſſent, des quarrez des produits dont on vient de parler dans le Corollaire précedent, & des chaleurs de l'air ; car ces poids ſont dans la raiſon des preſſions que l'air éxerce par ſon reſſort ſur les parois des vaiſſeaux ; mais ces preſſions ſont en raiſon compoſée des ſurfaces preſſées, des quarrez des produits dont il s'agit dans le Corollaire précedent, & des chaleurs de l'air ; donc les poids qui ſont équilibre avec ces preſſions, ſont auſſi dans cette même raiſon compoſée.

On pourroit déduire pluſieurs Corollaires de ceux qui précedent & de la propoſition ſelon que l'on ſuppoſeroit égales les quantitez ſemblables ou de même nom qui entrent dans les rapports que l'on vient d'établir ; mais on ne s'y arrête point, parce qu'ils ſe préſentent comme d'eux-mêmes & ſans faire de longs raiſonnemens.

Du rapport des preſſions que les parois des vaiſſeaux ſupportent lorſqu'ils ſont remplis d'un fluide élaſtique & enflammé.

185. On a remarqué plus haut que les fluides élaſtiques tels que la flamme, & même la vapeur de l'eau bouillante étoient comparables à un air fortement échaufé, & dont les parties ou petits reſſorts ſont dans une grande agitation, (il n'y a que la flamme de la poudre à canon qui ſouffre d'être comprimée pour quelque tems) ; or lorſqu'elle eſt ſerrée de tous côtez dans un vaiſſeau, elle fait effort en tout ſens pour ſe dilater, de même qu'un air condenſé ; on peut auſſi concevoir que les particules de la flamme ſont comme autant de petits reſſorts qui tendent à ſe développer & à s'étendre ; donc leur force augmente à proportion qu'ils ſont plus comprimez ; en effet la chaleur qui fait leur force, devient par la compreſſion, plus intenſe, plus vive & d'un plus haut degré ; ſi la flamme en même quantité eſt réduite à occcuper un eſpace deux fois plus étroit, elle ſera deux fois plus denſe, & le degré de chaleur deux fois plus grand ; une même ſurface ſervira donc d'appui à un nombre de reſſorts auſſi deux fois plus grand : d'ailleurs chacun d'eux agira ou preſſera avec deux fois plus de force ; on peut donc conclure comme on a fait dans la propoſition précedente pour un même air différemment condenſé, que les preſſions que la flamme exerce ſur les parois d'un même vaiſſeau, ſont entr'elles comme les quarrez des denſitez ; & ſi les ſurfaces ſont inégales, que ces preſſions ſont en raiſon compoſée des ſurfaces & des quarrez des

denſitez. (On ſuppoſe que la flamme dans ces divers degrez de condenſation vient de la même poudre, & que ce ſont préciſément les mêmes matieres qui lui ſervent d'aliment, & qu'elles ſont conditionnées de la même maniere; mais ſi la compoſition de la poudre eſt différente, ou que les matieres ſe ſurpaſſent en vertu, pour lors il arrivera à la flamme ce qu'on obſerve dans deux airs inégalement échauffez; l'air qui eſt pénétré d'un plus grand degré de chaleur, a une force de reſſort plus grande, quoiqu'il ne ſoit pas plus denſe ou plus candenſé; de même ſi la flamme eſt nourrie avec des matieres qui aient plus de vertu ou de force, elle ſera plus vive & ſon reſſort ſera plus puiſſant, quoiqu'elle ne ſoit pas plus denſe. C'eſt pourquoi pour lors les preſſions ſeront entr'elles en raiſon compoſée des ſurfaces, des quarrez des denſitez & des intenſitez des chaleurs. D'où l'on voit qu'il y a une certaine analogie entre les effets de la flamme en tant qu'elle preſſe par ſon reſſort, & ceux d'un air condenſé, & qu'on peut leur appliquer les mêmes raiſonnemens; de ſorte que ſi pour la flamme comme pour l'air, on peut déterminer par une expérience la force de la poudre enflammée & avec quel poids elle peut faire équilibre lorſqu'elle eſt dans un certain degré de condenſation, on pourra ſçavoir auſſi avec quel poids elle peut faire équilibre, ſi on vient à lui donner un degré de condenſation différent, lors même que les matieres de la flamme ſont d'une vertu inégale.

M. Mariotte avertit dans ſon Traité du mouvement des eaux pag. 390, qu'il eſt difficile de faire des expériences de cet équilibre, parce que la flamme dure peu de tems. Il ajoute enſuite que pour s'en former une idée, on peut ſuppoſer qu'il y ait une certaine quantité de poudre allumée qui rempliſſe un tuyau aſſez large, ſitué perpendiculairement, & qu'un grand poids dont la largeur occupe & remplit préciſément celle du tuyau en preſſant la flamme de cette poudre, la faſſe réſerrer juſqu'à ce qu'étant réduite à un petit eſpace il ſe faſſe équilibre entre ce poids & le reſſort de la flamme ſans qu'elle s'éteigne, en cet état le reſſort de la flamme feroit équilibre avec ce poids; en ſorte que ſi le poids étoit augmenté, cette même flamme ſe réduiroit à un plus petit eſpace, ſuppoſé qu'elle ne s'éteignît point, & ſon reſſort qui ſeroit alors plus fort, feroit encore équilibre avec ce plus grand poids.

186. Comme l'expérience telle que M. Mariotte l'expoſe & la décrit ſeroit difficile à faire, on peut pratiquer la méthode que M. Bigot de Morogues Officier d'Artillerie dans la Marine propoſe pour éprouver la force de la poudre allumée. Voyez ſon eſſai

de l'application des forces centrales aux effts de la poudre à canon, chez C.A. Jombert à Paris. On prendra une petite chambre AB de deux pouces de largeur & qui aura pour baſe un cercle AD d'un pouce quarré comme ſeroit une partie de canon de fuſil; on la remplira de poudre ſans boure & elle ſera preſſée de la façon dont on charge ordinairement les armes: on mettra ſur la bouche du petit canon un morceau de feutre un peu plus grand qu'elle, & pardeſſus un poids ſphérique, & l'orifice de la chambre ſera par ce moyen parfaitement fermé, le feu ſera porté par la lumiere A. Si la poudre a trop de force elle enlevera le globe; ſi elle en a trop peu, le globe ne bougera pas; on réiterera l'expérience; enfin on prendra un terme moyen entre celui qui a vaincu l'obſtacle & celui qui ne l'a pas fait. Il faut que le globe ſoit creux, on y laiſſe tomber des grains de plomb autant qu'il eſt néceſſaire pour réduire la flamme de la poudre en équilibre, & de cette ſorte on fait que la direction du centre de gravité ſoit dans l'axe vertical du petit cylindre, ce qui arriveroit difficilement ſi on augmentoit le poids autrement.

187. On remarquera 1°. que dans l'équilibre de la flamme avec le globe, il importe peu que le canon AB ſoit long ou court; ſi la flamme a le même degré de denſité, elle aura toujours la même force, pourvu que l'ouverture par où elle preſſe ſoit la même, car la preſſion eſt proportionnelle au produit de la ſurface preſſée & du quarré de la denſité de la flamme: il n'en ſeroit pas de même, ſi le globe étoit mis en mouvement par la flamme, & qu'elle pût ſe conſerver ſans ſe diſſiper; pour lors la quantité de poudre ou de la flamme ſeroit une des cauſes qui augmenteroit la viteſſe du globe. 2°. Il n'eſt pas non plus néceſſaire que la poudre s'allume toute à la fois, parce qu'en quelque quantité qu'elle ſoit allumée en même-tems, elle aura toujours la même denſité, & par conſéquent la même force; mais dans le mouvement actuel il ne faut pas négliger le tems que la poudre eſt à s'enflammer, car on conçoit bien que ſi elle s'embraſe toute en un inſtant, elle pouſſera le globe avec plus de force que ſi elle ne s'allume que ſucceſſivement; on ſuppoſe que le globe eſt dans un long canon, & que la flamme ne ſe diſſipe point.

Fin du cinquiéme Livre.

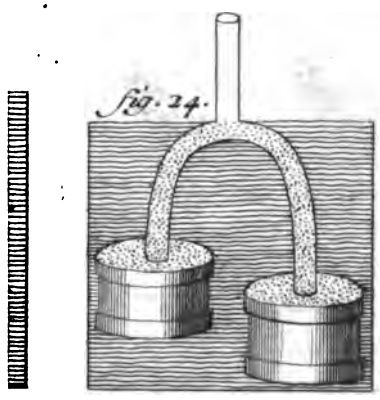


fig. 24.

fig. 25.

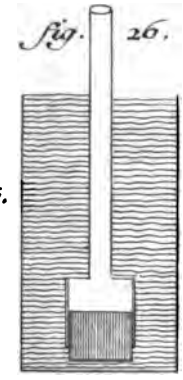


fig. 26.

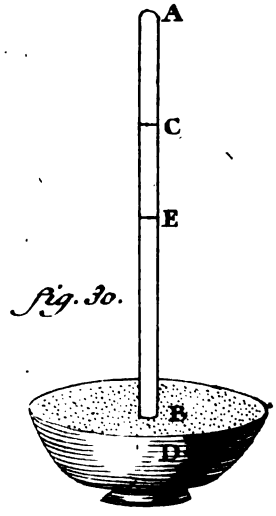


fig. 30.

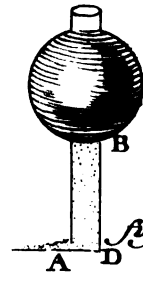


fig. 31.

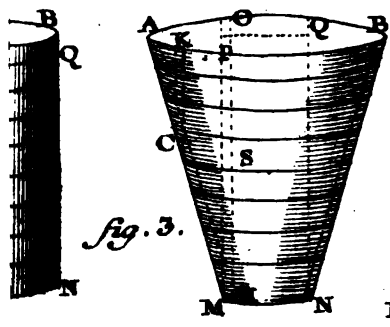


fig. 3.

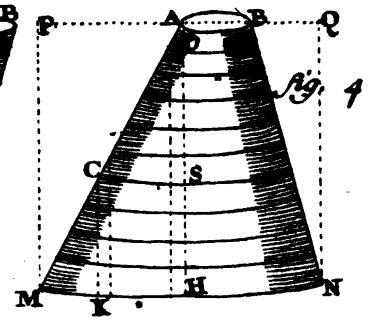


fig. 4.

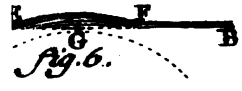


fig. 6.

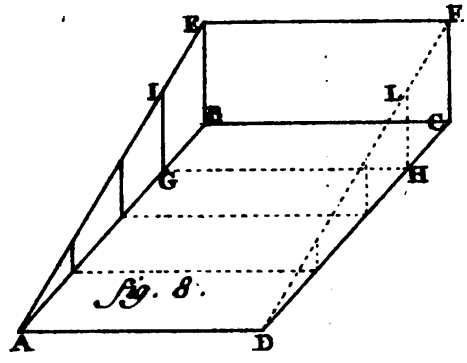


fig. 8.

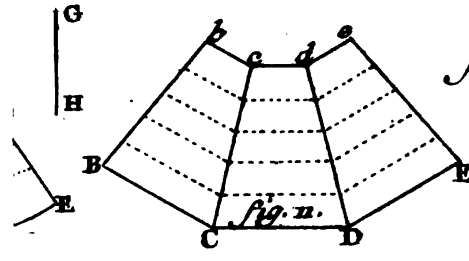


fig. 11.

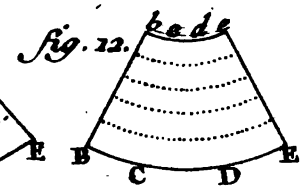


fig. 12.

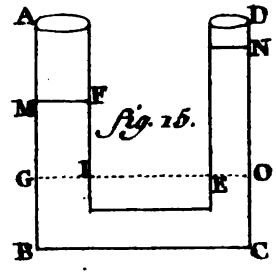


fig. 15.

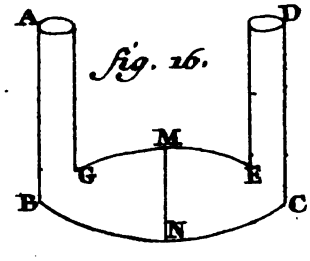


fig. 16.

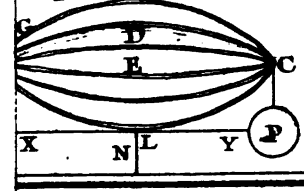


fig. 19.

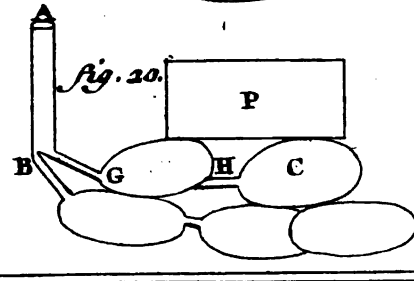


fig. 20.

PRINCIPES
SUR
LE MOUVEMENT
ET L'EQUILIBRE,
POUR SERVIR D'INTRODUCTION aux Mécaniques & à la Phyſique.

LIVRE SIXIE'ME.
DE L'HYDRAULIQUE.

1. DANS l'hydraulique on conſidere le mouvement des fluides, & ſur-tout le mouvement des eaux. Lorſqu'une liqueur n'eſt pas ſoutenue de tous côtez, elle coule ou j'aillit par l'action de la peſanteur; une preſſion étrangere peut produire le même effet. Si les liqueurs dans leur écoulement rencontrent un obſtacle qui s'oppoſe à leur paſſage, elles le choquent & font ſur lui une certaine impreſſion. On réduit tout ce que l'on a à dire dans ce Livre à quatre chefs. 1°. On examinera l'écoulement des liqueurs par des ouvertures horizontales. 2°. Leur écoulement par des ouvertures verticales. 3°. Leur écoulement en tant qu'il eſt l'effet d'une cauſe étrangere. 4°. Le choc ou la percuſſion des fluides.

CHAPITRE PREMIER.

De l'écoulement des liqueurs par des ouvertures horizontales.

2. DANS ce Chapitre on examinera premierement de quel endroit du réſervoir la liqueur vient lorſqu'elle ſort par une ouverture faite au bas du réſervoir. 2°. On conſiderera les rapport des viteſſes d'une liqueur lorſqu'elle ſort de deux réſervoirs qui ont des hauteurs inégales. 3°. On déterminera la viteſſe réelle avec laquelle une liqueur ſort d'un réſervoir, & celle avec laquelle elle continue d'être mue après qu'elle eſt ſortie. 4°. On traitera de l'écoulement d'une liqueur lorſqu'elle ſort par une ouverture horizontale, & que le réſervoir ou vaiſſeau ſe vuide entierement, l'on donnera en même-tems une idée des clepſidres ou horloges d'eau.

De quel endroit du réſervoir la liqueur vient lorſqu'elle ſort par une ouverture pratiquée au bas de ce réſervoir.

3. Pour bien entendre ce qui arrive à une liqueur qui ſort d'un vaiſſeau ou réſervoir, il faut rappeller ici en peu de mots ce qui a été dit dans le Livre précedent, de la preſſion en tout ſens qui ſe communique aux parties de la liqueur. Si on diviſe par la penſée la liqueur contenue dans un réſervoir, en tranches ou couches horizontales, elles ſont inégalement preſſées; plus elles ſont proches du fond, plus elles ſont chargées, & leur charge eſt égale au poids d'une colomne de cette liqueur qui auroit pour baſe la ſurface de la lame ou couche, & pour hauteur celle que la liqueur occupe au-deſſus de la lame.

4. Si lon fait une ouverture au fond du vaiſſeau la liqueur ſortira; car la lame qui eſt à l'ouverture eſt preſſée en deſſus & par les côtez, mais elle ne l'eſt point en deſſous; donc par la propriété commune à tous les fluides, cette lame doit couler vers l'endroit où elle n'eſt point ſoutenue, & où elle ne trouve aucune réſiſtance.

5. Lorſque la premiere lame eſt ſortie, elle eſt auſſi-tôt remplacée par une autre laquelle ſort auſſi à ſon tour puiſqu'elle eſt preſſée comme la premiere du dedans en dehors, & que d'ailleurs elle n'eſt point ſoutenue. La ſeconde lame & celles qui doivent la ſuivre, ſont formées non-ſeulement de la liqueur qui eſt directement au-deſſus de l'ouverture & qui fait partie de la colomne ver-

ticale DC, mais encore des parcelles qui ſont autour de l'ouverture C; en ſorte que ce n'eſt pas ſeulement la colomne DC qui en ſe renouvellant à chaque inſtant, fournit à la dépenſe; mais encore la liqueur qui environne cette colomne & qui eſt proche de l'ouverture C. Car toutes les parcelles qui ſont autour de l'ouverture ſont dans le même état de preſſion, & elles ſont pouſſées non-ſeulement de haut en bas, mais auſſi ſuivant une infinité de directions différentes vers l'ouverture; elles y accourront donc de tout côté pour former continuellement de nouvelles lames. Fig. 1.

6. La liqueur qui ſort du réſervoir n'eſt donc pas celle que l'on pourroit croire devoir couler le long de la colomme DC, & former une eſpece de chute; car la colomne DC conſiderée en entier & dans toute ſa hauteur n'eſt pas plus en mouvement que les colomnes environnantes. Quoique cette colomne réponde directement à l'ouverture, & qu'il ſemble qu'elle ne ſoit pas ſoutenue, elle l'eſt néanmoins par les colomnes environnantes, parce qu'elles ſont autant d'effort pour deſcendre que la colomne DC, & que la liqueur qui eſt au bas de ces colomnes vers le fond du vaiſſeau, a autant de force pour s'approcher de l'ouverture que la liqueur qui eſt au bas de la colomne DC. Il faut ſuppoſer pour l'article qui précede que la liqueur du réſervoir eſt aſſez haute par rapport à l'ouverture C pour que les particules qui s'y amaſſent en reçoivent une viteſſe qui les y faſſe arriver promptement pour la remplir, car ſans cela la colomne DC deſcendra, il ſe formera au-deſſus de l'ouverture C un eſpece d'entonnoir, & il faudra que la liqueur qui fournit à l'écoulement vienne de la ſurface ſupérieure.

On peut conſidérer la viteſſe d'une liqueur ſeulement pour le moment auquel elle ſort du réſervoir, ou la conſidérer dans les momens ſuivans.

Du rapport des viteſſes d'une liqueur lorſqu'elle ſort de deux réſervoirs qui ont des hauteurs inégales au moment de la ſortie.

7. On peut penſer que la liqueur qui ſort d'un réſervoir ne reçoit la viteſſe avec laquelle elle ſort qu'au moment de ſa ſortie, ou bien qu'elle la reçoit ſucceſſivement, & qu'elle eſt accélerée juſqu'à ce qu'elle ſoit ſortie. La premiere de ces deux hypothèſes peut avoir lieu pour les premieres petites gouttes qui ſe trouvent à l'ouverture C lorſque le flux commence, car on peut ſuppoſer la premiere lame ſi mince qu'elle ſorte au même inſtant qu'elle re-

çoit ſa viteſſe ; mais à l'égard des lames ſuivantes il y a tout lieu de croire qu'elles ont reçu une partie de leur viteſſe avant d'arriver à l'ouverture C ; c'eſt pourquoi les premieres gouttes doivent ſortir avec une moindre viteſſe que les ſuivantes, ce qui eſt conforme à des expériences faites par M. Daniel Bernoulli.

PROPOSITION I.

8. *Si une même liqueur, par exemple de l'eau, eſt à des hauteurs inégales dans deux réſervoirs, les lames ou petits priſmes de liqueur qui ſortent à chaque inſtant par les ouvertures horizontales & égales* C, c *ont à leur ſortie des quantitez de mouvement qui ſont entr'elles comme les hauteurs* H, h.

Fig. 1. 3. La propoſition à deux cas, ou bien les lames ou petits priſmes qui ſortent à chaque inſtant par les ouvertures égales C, *c*, reçoivent leur mouvement à la fois & en un moment ou ſucceſſivement : or la propoſition eſt vraie dans l'une & l'autre hypothèſe.

1°. Si les petits priſmes de liqueur reçoivent en un moment toute leur viteſſe, leurs quantitez de mouvement ſont entr'elles comme les forces qui les produiſent (*Liv. I.* 118) Or ces forces ſont les preſſions que la liqueur éxerce ſur ces lames ; donc les quantitez de mouvement ſont entr'elles comme ces preſſions, leſquelles ſont égales aux peſanteurs des colomnes qui répondent directement aux ouvertures C, *c* ; mais on ſuppoſe que les ouvertires C, *c* qui ſont les baſes de ces colomnes, ſont égales ; donc les colomnes dont il s'agit ſont entr'elles comme les hauteurs H, *h*. Leurs peſanteurs ou preſſions & par conſéquent les quantitez de mouvement qu'elles produiſent, ſont donc entr'elles comme les hauteurs H, *h*.

2°. Si les lames ou petits priſmes ne reçoivent leur mouvement que par degrez, & ſucceſſivement, je dis que les quantitez de mouvement qu'ils ont à leur ſortie ſont entr'elles comme les hauteurs H, *h*. On ſuppoſe que ces hauteurs demeurent les mêmes, & qu'il entre dans les reſervoirs autant de liqueur qu'il en ſort.

9. Puiſque les hauteurs H, *h* ne varient point, que la liqueur ſe tient à la même hauteur dans les réſervoirs qui la contiennent, il s'enſuit que les forces qui preſſent les petits priſmes ou cylindres de liqueur qui ſortent par les ouvertures C, *c*, ſont dans un rapport conſtant ; donc les quantitez de mouvement inſtantanées qu'elles produiſent, ſont auſſi dans un rapport conſtant, c'eſt-à-dire, dans le rapport que ces forces ont entr'elles ; ſi l'une des 2 forces eſt double, elle produira dans le même tems une quantité de mouvement double ; donc les quantitez de mouvement totales, c'eſt-à-dire,

à-dire, les ſommes des mouvemens inſtantanez produits en tems égaux par ces deux forces, ſont auſſi dans un rapport conſtant qui eſt le même que le rapport de ces forces : or les forces qui preſſent les petits cylindres de liqueur qui ſortent en même tems par les ouvertures C, *c*, ſont entr'elles comme les hauteurs H, *h*, en ſuppoſant que ces ouvertures ſont égales ; donc les quantitez de mouvement que les petits cylindres de liqueur qui ſortent en même tems par les ouvertures C, *c*, ſont auſſi entr'elles comme les hauteurs H, *h*.

PROPOSITION II.

10. *Les viteſſes que les lames ou cylindres de liqueur ont en ſortant des réſervoirs par les ouvertures horizontales* C, c, *ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs* H, h.

Demonstration. Car ſoit que les lames ou petits cylindres de liqueur qui ſortent à chaque inſtant par les ouvertures C, *c*, reçoivent toute leur viteſſe en un moment, ſoit qu'ils ne la reçoivent que ſucceſſivement, les quantitez de mouvement qu'ils ont à leur ſortie, ſont entr'elles comme les hauteurs H, *h*. Cela poſé ſi on nomme V la viteſſe du cylindre L, *v* la viteſſe du petit cylindre *l*, les quantitez de mouvement de ces cylindres à leur ſortie, ſont entr'elles comme les produits L×V, *l*×*v*, c'eſt-à-dire, comme les produits des maſſes par les viteſſes : or on ſuppoſe que les ouvertures C, *c* ſont égales, donc les petits cylindres L, *l* ayant même baſe, leurs maſſes ſont entr'elles comme les longueurs, & ſi l'on ſuppoſe que ces longueurs ſoient répréſentées par L, *l* qui déſignoient d'abord les ſoliditez, les quantitez de mouvement des petits cylindres, ſont encore entr'elles comme les produits L×V, *l*×*v* ; mais les longueurs L, *l* ſont entr'elles comme les viteſſes V, *v*, car puiſque l'écoulement eſt continu & ſans interruption, la longueur du cylindre de liqueur qui ſort doit être d'autant plus grande que la viteſſe eſt grande : ſi la viteſſe V eſt double, la longueur L doit auſſi être double ; donc ſi dans le rapport compoſé L×V à *l*×*v* au lieu du rapport ſimple L à *l* on met celui des viteſſes, le rapport V.V à *vv* ſera encore égal au rapport L×V à *l*×*v* ; donc les quantitez de mouvement des petits cylindres L, *l*, ſont entrelles comme les quarrez de leurs viteſſes V, *v*, ou les quarrez VV, *vv* comme les quantitez de mouvement, ou encore comme les hauteurs H, *h*, l'on aura donc cette proportion VV.*vv* :: H.*h*. Si l'on tire la racine quarrée de ces quatre termes, l'on aura V.*v* :: √H.√*h*, c'eſt-à-dire, que les viteſſes que les petits cylindres L, *l* ont à leur ſortie des réſervoirs, ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs H, *h*. Fig. 1.3.

11. COROLLAIRES. 1°. Puiſque les viteſſes de la liqueur qui ſort par les ouvertures C, *c* ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs H, *h*, il s'enſuit que *les dépenſes ou les quantitez qu'il en ſortira en même-tems des réſervoirs, ſont auſſi entre elles comme les racines quarrées des hauteurs* H, h; car lorſque les ouvertures ſont égales, les quantitez de liqueur qui ſortent en même-tems ſont comme les longueurs des cylindres qui paſſent par ces ouvertures égales, c'eſt-à-dire, comme les viteſſes de la liqueur qui ſort; or ces viteſſes ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs H, *h*; donc les dépenſes en tems égal ſont auſſi entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs.

12. 2°. *Si les ouvertures* C, c *ſont inégales, les viteſſes ſeront encore entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs* H, h. Car les preſſions qu'une liqueur éxerce à la même profondeur ſont proportionnelles aux ſurfaces; ainſi ſi l'ouverture étant, par éxemple, double, il s'y préſente deux fois plus de parties, elles ſortiront avec la même viteſſe que ſi l'ouverture étoit ſimple; parce que la ſomme des preſſions étant deux fois plus grande, chaque particule ne ſera ni plus ni moins preſſée que ſi elle paſſoit par une ouverture plus petite.

13. 3°. *Si les hauteurs* H, h *ſont égales, les dépenſes en tems égaux ſeront entr'elles comme les ouvertures*, car puiſque les hauteurs H, *h* ſont égales, les viteſſes de la liqueur qui ſort ſeront auſſi égales, les cylindres de liqueur qui ſortiront des réſervoirs en même-tems auront donc une même longueur, donc ils ſeront entr'eux comme les baſes ou les ouvertures; or les dépenſes ſont égales aux cylindres de liqueur qui ſortent en même-tems; donc ces dépenſes ſont entr'elles comme les ouvertures.

14. 4°. *Les dépenſes ſont entr'elles comme les produits des ouvertures* C, c *par les racines quarrées des hauteurs*; car ſi les ouvertures étoient égales, les dépenſes ſeroient entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs; mais puiſque les ouvertures ſont inégales, il paſſera par la plus grande plus de liqueur à proportion qu'elle ſera plus grande, la viteſſe étant la même, ainſi ſi l'ouverture eſt double ou triple, il y paſſera en même-tems deux, trois fois plus de liqueur; l'on voit donc que pour avoir le rapport des dépenſes, il faut multiplier les ouvertures par les viteſſes ou par les racines quarrées des hauteurs H, *h*, & le rapport des produits ſera égal à celui des dépenſes faites en même-tems.

On ſuppoſe que les hauteurs ſont tellement proportionnées aux ouvertures qu'il ne ſe faſſe point de creux ou d'entonnoir au haut

de la liqueur directement au-deſſus de l'ouverture, comme cela arrive lorſque la liqueur n'eſt pas à une hauteur ſuffiſante, & que l'ouverture eſt fort grande.

15. 5°. Si la liqueur pour acquérir les viteſſes avec leſquelles elle ſort par les ouvertures C, *c* tomboit de deux hauteurs, les viteſſes acquiſes par ces hauteurs, & qu'on ſuppoſe être les mêmes que celles qu'elle a en ſortant des réſervoirs; ſeroient entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs, d'où l'on peut conclure que les hauteurs qui donneroient les viteſſes avec leſquelles la liqueur ſort des réſervoirs, ſont dans la même raiſon que les hauteurs H, *h*; mais on ne peut pas conclure qu'elles n'en ſont point différentes, parce que deux rapports peuvent être égaux ſans que les termes du premier ſoient égaux aux termes du ſecond rapport.

16. 6°. Si l'on connoît la viteſſe avec laquelle une liqueur ſort d'un réſervoir, on peut connoître par une ſimple proportion la viteſſe avec laquelle elle ſortira d'un autre réſervoir, pourvû que la hauteur qu'elle y occupe ſoit connue.

17. 7°. Si l'on fait des ouvertures laterales à deux réſervoirs leſquelles ſoient petites, en ſorte que l'on puiſſe regarder comme nulle la différence des hauteurs, c'eſt-à-dire, que les diſtances qu'il y aura de la partie inférieure & de la partie ſupérieure d'une même ouverture à la ſurface de la liqueur, puiſſent être conſidérées ſans erreur ſenſible, comme une même diſtance ou hauteur, les parties de la liqueur qui ſortiront par cette ouverture, auront toutes une viteſſe ſenſiblement égale, comme ſi elles ſortoient par une ouverture horiſontale; c'eſt pourquoi ſi la liqueur ſort par de petites ouvertures laterales à différentes profondeurs ou diſtances des ſurfaces, elle aura à ſa ſortie des viteſſes qui ſeront entr'elles comme les racines quarrées de ces hauteurs ou diſtances.

18. Mais ſi les ouvertures étoient grandes, qu'elles occupaſſent une partie conſidérable dans la hauteur, il eſt viſible que toutes les parcelles de la liqueur ne ſortiroient pas avec la même viteſſe, il n'y auroit que celles qui ſeroient ſur une même couche horiſontale qui auroient des viteſſes égales repréſentées par la racine quarrée de la hauteur ou diſtance qu'il y auroit de cette couche à la ſurface de la liqueur, les lames ou couches qui ſeroient plus hautes ou plus baſſes auroient à leur ſortie des viteſſes moindres ou plus grandes. On verra dans la ſuite de quelle maniere on peut calculer les dépenſes, lorſque les ouvertures laterales ſont grandes.

De la vitesse réelle avec laquelle une liqueur ſort d'un réſervoir par une ouverture horiſontale, & de celle avec laquelle elle continue d'être mue après qu'elle eſt ſortie.

19. On peut déterminer cette viteſſe par l'expérience ou la déduire de la loi de la peſanteur & d'une propriété qui eſt commune à toutes les liqueurs. Il faut rappeller ici ce qui a été dit dans le Livre précédent de l'adhérence ou cohéſion des parties d'une liqueur, les parties d'une liqueur ſont adhérentes les unes aux autres, & il faut une certaine force pour les ſéparer; or cette cohéſion des parties paroît d'une maniere ſenſible dans l'écoulement de la liqueur, ſur tout lorſqu'elle ſort par une ouverture horiſontale, ſuivant une direction perpendiculaire à l'horiſon; car les premieres gouttes après leur ſortie s'accelerent ſelon la loi des corps peſans, & vont plus vite que celles qui ſortent enſuite, & cependant elles ne s'en détachent point; la liqueur forme une colomne continue depuis le haut juſqu'au bas; mais parce que les gouttes qui ſont ſorties les premieres vont plus vite que celles qui viennent après, il eſt néceſſaire que la colomne ſoit plus mince vers le bas que vers le haut; ainſi une même portion de liqueur occupe ſuivant la longueur de la colomne un eſpace d'autant plus grand qu'elle ſe trouve à une plus grande diſtance du réſervoir. Cela étant ainſi, on peut diſtinguer dans les gouttes qui compoſent la colomne deux mouvemens, l'un perpendiculaire à l'horiſon, c'eſt la peſanteur qui le produit; l'autre mouvement eſt horiſontal, & il rapproche les gouttes vers l'axe de la colomne à meſure qu'elle devient plus mince; le mouvement horiſontal n'étant point contraire au mouvement de peſanteur, comme on l'a prouvé dans le IIe Livre (112) les parcelles doivent s'accélérer ſuivant la loi des corps peſans, de même que ſi elles n'étoient pouſſées que dans la direction perpendiculaire à l'horiſon; on ne fait point d'attention à la petite réſiſtance qui provient de la cohéſion.

Fig. 2. 20. Suppoſons qu'une liqueur, par éxemple de l'eau, coule de ſa ſource, qui eſt en AB ſuivant une direction DC perpendiculaire à l'horiſon; ſelon ce qui vient d'être dit, il ſe formera une colomne AEFB plus large en AB qu'en EF. Que EF ſoit une ouverture faite ſur le fond horiſontal MN du vaiſſeau cylindrique AMNB, ce vaiſſeau ne changera rien au cours de la liqueur, & elle paſſera par l'ouverture EF, de même que ſi le vaiſſeau n'y étoit point, & en tombant ſa viteſſe s'accelerera de maniere que la lame ou petite tranche qui eſt en EF aura acquis une viteſſe exprimée

par la racine quarrée de DC; c'eſt-à-dire, que cette viteſſe ſera égale à celle qu'un corps peſant acquerroit s'il tomboit de la hauteur DC. Si l'on imagine que l'eſpace vuide AMEFNB qui eſt autoûr de la colomne AEFB eſt rempli de glace, la liqueur continuera de couler comme auparavant, & ſa viteſſe ſera accélérée de même; car la glace ne fait que toucher la colomne fluide & la liqueur coule dans cette eſpece d'entonnoir ſans trouver aucune réſiſtance.

21. Cela poſé, voici comme M. Newton prouve qu'*une liqueur qui ſort d'un réſervoir* AMNB *par l'ouverture horiſontale* EF *a à ſa ſortie une viteſſe égale à celle qu'un corps peſant acquerroit en tombant de la hauteur* CD. Que la glace AMEFNB ſe fonde, la colomne AEFB ne ſera plus qu'un même corps avec la glace fondue, & l'on aura un réſervoir ordinaire qui reçoit de la ſource AB autant de liqueur qu'il en ſort par l'ouverture EF: or la lame en EF aura encore la même viteſſe qu'elle avoit lorſque la liqueur deſcendoit dans l'entonnoir de glace AMEFNB, puiſque l'écoulement ſera auſſi grand qu'auparavant. 1°. Il ne ſera pas moindre, parce que la glace fondue & réduite en liqueur fait effort pour couler, ainſi cet effort ne ſçauroit diminuer l'écoulement. 2°. L'écoulement ne ſera pas plus grand, parce que la glace fondue & réduite en liqueur ne peut couler par l'effort qu'elle fait ſans s'oppoſer en partie à l'écoulement de la colomne AEFB; or ces efforts contraires doivent ſe compoſer de maniere que la quantité de liqueur qui s'écoule de la glace fondue empêche un pareil écoulement dans la colomne AEFB. C'eſt-là la nature des efforts contraires, de faire que l'effet produit par l'un diminue d'autant l'effet produit par l'autre; la force qui produit l'écoulement étant encore la même, il faut conclure que la viteſſe avec laquelle la liqueur ſort par l'ouverture EF eſt encore égale à celle qu'un corps peſant acquerroit en tombant de la hauteur DC. Fig. 2.

Voici une ſeconde preuve de la même Propoſition.

22. *La viteſſe avec laquelle l'eau ſort du réſervoir* a b *par l'ouverture* c, *eſt égale à celle qu'une goutte d'eau acquerroit en tombant librement depuis le niveau juſqu'à l'ouverture* c. On ſuppoſe que le vaiſſeau eſt entretenu plein. Fig. 3.

Suppoſons que le tems étant diviſé en parties indéfiniment petites il ſorte à chaque fois une lame d'eau dont l'épaiſſeur ſoit *cf*, la preſſion de la liqueur repréſentée par le poids de la colomne *cd* fera parcourir dans chaque partie du tems aux lames qui ſortent des eſpaces égaux à *fc*. Suppoſons encore qu'une de ces lames par-

coure ou puiſſe parcourir pendant le même tems l'eſpace *do* par le ſeul effort de ſa peſanteur ; il eſt certain que les peſanteurs de la colomne *dc* & de la lame d'eau étant deux forces conſtantes, communiquent à cette lame des viteſſes qui ſont entr'elles comme ces mêmes peſanteurs, c'eſt-à-dire, comme *dc* à *fc*, à cauſe que la colomne *dc* & la lame ont des baſes égales (*Liv.* I. 127). Ces mêmes forces communiquent auſſi des viteſſes qui ſont entr'elles comme les eſpaces qu'elles font parcourir en même-tems ou en tems égaux (*Liv.* I. 128), c'eſt-à-dire, que ces viteſſes ſont entr'elles comme *fc* & *do* : donc *dc. fc* : : *fc. do*, puiſque ces deux rapports ſont égaux à celui des viteſſes que la lame d'eau reçoit en tems égaux de la peſanteur de la colomne *dc* & de ſon propre poids : donc $dc \times do = \overline{fc}^2$. Cela poſé, ſi on nomme V la viteſſe de la lame d'eau après qu'elle eſt ſortie du réſervoir : v la viteſſe qu'elle acquiert en parcourant *do* : *v* la viteſſe qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur *dc*, l'on aura les deux proportions, V. v : : *fc*. *do*, v. *v* : : $\sqrt{do}$. $\sqrt{dc}$; ſi on multiplie par ordre, & qu'on diviſe les deux premiers termes par v, l'on aura la troiſiéme proportion V. *v* : : $fc \times \sqrt{do}$. $do \times \sqrt{dc}$, & ſi on éleve tous ces termes au quarré, on aura encore la proportion V^2. v^2 : : $\overline{fc}^2 \times do$. $\overline{do}^2 \times dc$, & ſi on diviſe les deux derniers termes par *do*, l'on aura enfin V^2. v^2 : : $\overline{fc}^2$. $do \times dc$; mais les deux derniers produits ſont égaux, donc les quarrez V^2. v^2 ſont auſſi égaux, & par conſéquent les racines V. *v*. ſont égales.

V. v : : *fc*. *do*.
v. *v* : : $\sqrt{do}$. $\sqrt{dc}$.
V. *v* : : $fc \times \sqrt{do}$. $do \times \sqrt{dc}$.
v^2. v^2 : : $\overline{fc}^2 \times do$. $\overline{do}^2 \times dc$.
V^2. v^2 : : $\overline{fc}^2$. $do \times dc$.

23. On peut encore prouver par l'expérience que ſi un vaiſſeau ou réſervoir eſt rempli d'une liqueur, elle a à ſa ſortie une viteſſe égale à celle qu'un corps peſant acquerroit en tombant d'une hauteur égale à la diſtance perpendiculaire qu'il y a de la ſurface à l'ouverture par où elle ſort. On ſuppoſe que l'ouverture eſt horiſontale, ou ſi elle eſt laterale, qu'elle eſt très-petite. L'expérience eſt de M. Newton, elle eſt rapportée & décrite au troiſiéme Cas de la propoſition 36. La hauteur CD de l'eau au-deſſus de l'ouverture laterale G étoit de vingt pouces & le plan horiſontal FI 20 pouces au-deſſous, c'eſt-à-dire, que GF perpendiculaire au plan horiſontal étoit égale à la hauteur CD ; or M. Newton trouva que l'eau qui jailliſſoit horiſontalement par l'ouverture G alloit rencontrer le plan FI à 37 pouces de la verticale GF.

Fig. 1.

24. Voici la preuve qu'on en peut déduire pour prouver la Propoſition dont il s'agit. Les petites lames ou gouttes d'eau qui ſortent à chaque inſtant par l'ouverture G ont à leur ſortie une viteſſe par laquelle elles parcourroient dans un tems donné un certain eſpace ſuivant la direction horiſontale, qui eſt celle qu'elles reçoivent; mais parce que l'effort de la peſanteur ſe joint à la viteſſe de chaque goutte, elles décrivent toutes une ligne courbe que l'on a démontré être une demi-parabole. Cela poſé, ſi la viteſſe d'impulſion, qui eſt celle que chaque goutte reçoit à ſa ſortie, eſt égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur DC, l'étendue FI de la demi-parabole GI décrite par chaque goutte doit avoir 40 pouces, c'eſt-à-dire, qu'elle doit être égale au double de CD ou de GF (Liv. II. 154), & ſi cette étendue eſt de 40 pouces, c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit égale au double de la hauteur GF ou CD, la viteſſe d'impulſion doit être égale à celle que chaque goutte acquerroit en tombant de la hauteur GF ou DC: or l'expérience montre que peu s'en faut que FI ne ſoit égale au double de GF ou de CD, puiſqu'il ne s'en faut que de trois pouces ou environ ſur 40; d'ailleurs on peut attribuer ce défaut à des cauſes qui empêchent que la viteſſe d'impulſion n'ait ſon effet plein & entier, telles ſont la réſiſtance de l'air & celle que la liqueur éprouve en frottant contre les bords de l'ouverture; on peut donc conclure de l'expérience, que la viteſſe avec laquelle une liqueur ſort d'un réſervoir, eſt égale à celle qu'une goutte de la liqueur acquerroit en tombant de la ſurface juſqu'au centre de l'ouverture par où elle ſort.

Dans l'expérience de M. Newton le mouvement des premieres gouttes eſt indépendant de l'impulſion de celles qui les ſuivent, en ſorte que chaque goutte qui précede décrit la demi-parabole GI, de même que ſi elle étoit ſeule ſans être aucunement pouſſée par les gouttes qui viennent enſuite; car les premieres gouttes vont pendant tout leur mouvement, plus vîte que les ſuivantes, on eſt donc aſſuré que cette expérience eſt une preuve non équivoque de la Propoſition qui en a été déduite.

25. COROLLAIRES, *où l'on explique ce qui arrive à une liqueur lorſqu'elle eſt ſortie du réſervoir.* La viteſſe avec laquelle l'eau ou toute autre liqueur ſort d'un réſervoir étant ſuppoſée égale à celle qu'un goutte acquerroit par ſa peſanteur, ſi elle tomboit d'une hauteur égale à la diſtance perpendiculaire qu'il y a de l'ouverture où la liqueur ſort, à la ſurface ſupérieure, on peut déduire les Corollaires ſuivans.

26. 1°. Sans avoir recours à la Propoſition de l'art. 16, on peut trouver immédiatement la quantité d'eau qu'il ſortira d'un réſervoir entretenu plein, & dont la hauteur eſt connue, ſi le tems de l'écoulement & l'ouverture par où la liqueur ſort ſont auſſi connus. Car puiſque la hauteur du réſervoir eſt connue, on pourra trouver par les regles du ſecond Livre la viteſſe qu'un corps ou une goutte de la liqueur acquerroit en tombant de cette hauteur, & ce ſera la viteſſe réelle de la liqueur qui ſort, donc on connoîtra l'eſpace qu'elle parcourt avec cette viteſſe dans une ſeconde de tems; c'eſt pourquoi ſi on multiplie cet eſpace par l'ouverture, on aura un cylindre dont la ſolidité eſt égale à la quantité de liqueur qui s'écoule dans une ſeconde; ſi enfin on multiplie ce cylindre par le tems donné, c'eſt-à-dire, par le nombre de ſecondes contenu dans le tems donné, on aura la dépenſe du réſervoir pendant ce tems, ou la quantité de liqueur qu'il en ſort.

27. REMARQUE. On remarquera à l'égard de ce premier Corollaire, que l'on ſuppoſe que toutes les gouttes ont à leur ſortie des directions paralleles ou perpendiculaires à l'ouverture: or M. Newton a obſervé que la liqueur qui ſort eſt compoſée de particules ou petites gouttes qui viennent de différens côtez du réſervoir, & qui ont des directions inclinées les unes aux autres & à l'ouverture. Si les directions des gouttes étoient paralleles entre elles, & perpendiculaires à l'ouverture, la liqueur ſortiroit du réſervoir ſous la forme d'un priſme ou d'un cylindre; mais parce que les directions ſont obliques à l'ouverture, la liqueur qui ſort a la forme d'une pyramide ou d'un cone tronqué dont la grande baſe eſt l'ouverture, & la moindre eſt hors du réſervoir à une petite diſtance de l'ouverture: or c'eſt la moindre baſe qui à proprement parler doit être conſiderée comme la vraie ouverture, puiſqu'il ne paſſe pas davantage de liqueur par la grande que par la petite, & la hauteur du réſervoir eſt la diſtance qu'il y a de cet endroit où la colomne eſt retrécie à la ſurface de la liqueur. Cela poſé, M. Newton trouve que le rétreciſſement du jet ou de la colomne jailliſſante ſe fait environ à un demi-pouce de l'ouverture, & que le diametre diminué eſt au diametre de l'ouverture, comme 21 eſt à 25, ou comme 5 eſt à 6, à peu-près, l'ouverture circulaire du vaiſſeau qui ſervit à l'expérience avoit de diametre $\frac{5}{8}$ de pouce.

28. Lorſque dans l'expérience on a égard à cette diminution ou retréciſſement de la colomne jailliſſante, on trouve que la dépenſe d'un réſervoir eſt proportionnée à la viteſſe qu'une goutte d'eau acquerroit ſi elle venoit à tomber par ſon poids depuis la ſurface de la liqueur juſqu'au centre de l'ouverture.

29. 20. *La force totale qui produit le mouvement d'une liqueur lorſqu'elle ſort d'un réſervoir eſt égale au poids d'une colomne de la même liqueur qui auroit pour baſe l'ouverture ou orifice par lequel elle ſort, & pour hauteur une hauteur double de celle que la liqueur occupe dans le reſervoir au-deſſus de l'orifice.*

Suppoſons que la liqueur ſorte par l'ouverture pendant un tems égal à celui qu'une goutte emploieroit à deſcendre depuis la ſurface juſqu'à l'orifice, il ſe formera un cylindre de liqueur qui aura pour baſe l'orifice, (on fait abſtraction du retreciſſement du jet dont on vient de parler) & pour hauteur, une hauteur double de celle qu'il a depuis la ſurface de la liqueur juſqu'à l'orifice, puiſque chaque lame a à ſa ſortie une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant depuis la ſurface juſqu'à l'orifice, & que d'ailleurs avec cette viteſſe la lame qui ſort la premiere peut parcourir uniformement un eſpace double de cette hauteur dans le tems qu'elle deſcendroit par l'action de la peſanteur depuis la ſurface juſqu'à l'orifice. Suppoſons que le même cylindre de liqueur ou un autre qui lui eſt égal tombe auſſi d'une hauteur égale à celle qu'il y a de l'orifice à la ſurface, il acquerra une viteſſe égale à celle que la liqueur a en ſortant du réſervoir; l'on aura donc deux cylindres égaux qui ſont mus avec des viteſſes égales; donc leurs quantitez de mouvement ſont auſſi égales. Cela poſé, les forces qui produiſent ces mouvemens égaux ſont deux forces conſtantes; d'un côté, c'eſt la preſſion de la liqueur contenue dans le reſervoir; de l'autre, c'eſt l'action de la peſanteur qui fait deſcendre le cylindre, ce ſont donc deux forces conſtantes qui en des tems égaux produiſent des quantitez de mouvement égales: or puiſque les quantitez totales de mouvement ſont égales, & que d'ailleurs les forces qui les ont produites en même-tems ou en tems égaux ſont conſtantes, il s'enſuit que les quantitez inſtantanées ſont auſſi égales; mais deux forces conſtantes ſont entr'elles comme les quantitez de mouvement qu'elles produiſent à chaque inſtant; donc la force qui produit le mouvement d'une liqueur qui ſort d'un reſervoir, & la peſanteur qui fait deſcendre le cylindre de liqueur qui auroit pour baſe l'orifice, & pour hauteur une hauteur double de celle qu'il y a de l'orifice à la ſurface ſont deux forces égales; donc, &c.

30. Remarque. On a vû dans le livre précedent que la force qui preſſe chaque lame de liqueur eſt égale au poids d'une colomne de la même liqueur qui auroit pour baſe cette lame, & pour hauteur celle qu'il y a depuis la lame juſqu'à la ſurface, & le corollaire précedent fait voir que la force qui produit le mouvement

d'une liqueur lorſqu'elle ſort du réſervoir, eſt double du poids de cette colomne; il faut donc conclure que la force qui preſſe une lame de liqueur dans l'équilibre, eſt moindre que la force qui lui donne le mouvement lorſqu'elle ſort du réſervoir: mais d'un autre côté il eſt certain que le mouvement de la liqueur lorſqu'elle ſort, n'eſt que l'effet de la preſſion des colomnes qui preſſent la lame qui ſort; comment peut-il donc ſe faire que cette force ſoit double de la peſanteur de la colomne qui eſt au-deſſus de la lame.

Pour répondre à la difficulté propoſée, il faut remarquer que le mouvement de chaque lame n'eſt pas produit en un ſeul inſtant & au moment qu'elle ſort; la preſſion des colomnes agit ſucceſſivement: or lorſqu'on dit que la force qui produit le mouvement d'une liqueur qui ſort d'un réſervoir eſt égale au poids d'une colomne double de celle qui répond à l'orifice, par cette force il faut entendre la ſomme des preſſions cauſées ſur la lame; ce n'eſt pas la preſſion inſtantanée cauſée par le poids de la liqueur, cette preſſion eſt ſeulement égale au poids de la colomne qui répond à l'orifice, mais c'eſt la totalité des efforts produits par cette colomne & celles qui l'environnent, qu'il faut conſiderer comme la force qui produit le mouvement de chaque lame qui ſort: or la ſomme de ces efforts que l'on regarde comme réunis en un ſeul inſtant & au moment que chaque lame ſort, eſt égale à la peſanteur d'une colomne double de celle qui répond à l'orifice.

Il y a encore quelques remarques à faire ſur cette force qui produit le mouvement de la liqueur lorſqu'elle ſort du réſervoir, mais elles ſe préſenteront plus à propos dans le ſecond traité.

31. 3°. Lorſque la liqueur eſt ſortie du réſervoir, ſi elle continue d'être mue dans l'air, ſon mouvement devient accéleré ou retardé; il eſt accéleré ſi la direction du jet eſt horiſontale, ou au-deſſous de l'horiſon; il eſt retardé ſi la liqueur eſt dirigée au-deſſus.

32. 4°. *Si la direction de la liqueur eſt perpendiculaire à l'horiſon le jet eſt en ligne droite.* Car un corps qui eſt pouſſé ſuivant la direction verticale ne s'en écarte point. Cela poſé, ſi la liqueur deſcend, *la colomne va en diminuant vers ſon extrémité inférieure à meſure qu'elle eſt plus éloignée de l'ouverture du réſervoir; or on peut déterminer cette diminution dans toute la longueur*, car ſi on conçoit que la colomne eſt coupée en IK & en LP par deux plans paralleles à l'horiſon, on pourra conſiderer les ſections IK, LP comme deux ouvertures par où la liqueur paſſe, & il eſt évident qu'en tems égaux il en paſſe la même quantité par LP & par IK, l'on a donc deux cylindres de liqueur égaux en ſolidité; donc les ba-

Fig. 2.

ſes LP, IK ſont réciproquement proportionnelles aux longueurs, c'eſt-à-dire aux viteſſes avec leſquelles la liqueur paſſe par ces ouvertures; mais ces viteſſes ſont auſſi entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs DS, DV, puiſque ces viteſſes ſont les mêmes que ſi la liqueur deſcendoit des hauteurs DS, DV. Donc les ſections LP, IK ſont entr'elles réciproquement comme les racines quarrées de DS, DV.

33. D'où l'on voit que ſi dans la longueur de la colomne on connoît la grandeur d'une des ſections tranſverſales, on pourra trouver la grandeur des autres par le moyen des hauteurs correſpondantes que l'on ſuppoſe connues.

34. Ce corollaire donne un moyen de calculer la quantité d'eau que donne une chute perpendiculaire, lorſqu'on connoît la hauteur de la ſource & le diametre d'une de ſes ſections tranſverſales; car puiſque la hauteur de la ſource eſt connue, on ſçait auſſi quelle eſt la viteſſe que l'eau a acquiſe juſqu'à la ſection meſurée; on connoît donc la longueur que l'eau parcourroit en une ſeconde avec la viteſſe acquiſe depuis la ſource juſqu'à la ſection; donc ſi on multiplie cette ſection par la longueur trouvée, on aura la quantité d'eau qui paſſe dans une ſeconde par cette ſection; & ſi on multiplie ce produit par le tems donné, c'eſt-à-dire, par le nombre qui exprime combien de fois le tems donné contient une ſeconde, on aura la quantité de l'écoulement pendant ce tems.

35. 5°. *Si la liqueur monte perpendiculairement à l'horiſon, le jet au lieu d'aller en diminuant, groſſira vers ſon extrémité ſupérieure*; car le mouvement des premieres lames ou gouttes ſe ralentira, & celles qui viennent après étant mues plus vîte rencontreront celles qui les précedent; de ſorte que pour obéir au mouvement vertical, il faudra que dans cette rencontre elles s'étendent tout au tour ſuivant des directions horiſontales, afin d'occuper moins de place dans la hauteur de la colomne. L'on déterminera encore la figure du jet de même que pour le cas du corollaire précedent.

36. 6°. *Le jet vertical doit atteindre à la hauteur du réſervoir ou à la ſurface de la liqueur*. Car chaque goutte a à ſa ſortie une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit ſi elle tomboit depuis la ſurface de la liqueur juſqu'à l'orifice ou ouverture par où elle ſort: or une telle viteſſe ſuffit au jet pour s'élever à cette hauteur; c'eſt pourquoi il y atteindra s'il ne trouve aucun obſtacle.

37 Ce corollaire eſt conforme à l'expérience lorſque les jets ſont petits ou médiocres; mais les grands jets s'écartent de la regle, parce que la réſiſtance de l'air & d'autres obſtacles les empê-

chent de s'élever juſqu'à la ſurface de la liqueur. *Voyez M. Mariotte* 2e. *partie* 3e. *diſcours* 3e. *regle.*

38. 7°. Si le jet eſt horiſontal ou incliné à l'horiſon, il ſera parabolique, c'eſt-à-dire que chaque goutte décrira une parabole ou une demie parabole, comme cela arrive lorſqu'on jette un corps en l'air ſuivant une direction horiſontale, ou inclinée à l'hrizon.

L'on déterminera l'amplitude de la parabole ou l'étendue du jet de la même maniere, & par les mêmes regles qui ont été expliquées dans le ſecond livre. Car puiſque la hauteur du reſervoir repréſente la force du jet ou la hauteur d'où toutes les gouttes venant à tomber acquerroient la viteſſe avec laquelle elles ſont pouſſées en l'air, il s'enſuit que ſi on décrit un demi cercle vertical dont le diametre ſoit la hauteur du réſervoir ou de la ſurface de la liqueur, & que la circonference rencontre la ligne de projection ſuivant laquelle les gouttes ſont pouſſées, que du point de rencontre on tire une perpendiculaire ſur le diametre, le quadruple de cette ligne ſera l'étendue du jet ou l'amplitude de la parabole. On trouvera auſſi ſelon les principes établis, un ſecond jet qui aura la même étendue que le premier, en ſorte qu'ils rencontreront l'un & l'autre l'horiſon ou un plan horiſontal au même point.

39. 8°. Les jets horiſontaux & inclinez au-deſſous de l'horizon diminuent en groſſeur à meſure que le jet devient plus éloigné du réſervoir; mais les jets inclinez au-deſſus de l'horiſon groſſiſſent juſqu'au plus haut point de l'arc parabolique. C'eſt une ſuite évidente des corollaires troiſiéme & quatriéme.

40. 9°. Si on perce un vaiſſeau ou réſervoir en un point G, qu'on reçoive ſur un plan horiſontal FI le jet GI qu'on trouve une troiſiéme proportionnelle à GF, FI, (dans le ſecond livre on l'a appellée *ligne d'égalité*), le quart de la troiſiéme proportionnelle eſt la hauteur de la ſurface de la liqueur au-deſſus de l'ouverture G. Cette quatriéme partie a été appellée force du jet, c'eſt la hauteur par laquelle les gouttes de la liqueur acquerroient en tombant la viteſſe avec laquelle elles ſortent du réſervoir; or cette hauteur eſt celle de la liqueur au-deſſus de l'ouverture G. Fig. 1.

De l'ecoulement d'une liqueur lorsque les vaisseaux ou réſervoir qui la contiennent ſe vuident entiérement. L'On donnne auſſi une idée des clepſidres ou horloges d'eau.

41. *Préparation pour la propoſition ſuivante :* On ſuppoſera qu'un vaiſſeau cylindrique ou qui a la figure d'un priſme, étant rempli d'une

ligueur, eſt percé à ſon fond d'une ouverture horiſontale par où la liqueur s'écoule juſqu'à ce que le vaiſſeau ſoit entierement vuidé. Le rapport de la baſe ou fond du vaiſſeau à l'ouverture C eſt exprimé par $\frac{A}{C}$ ſi le fond eſt 100 fois plus grand que l'ouverture C, le rapport ou quotient exprimé par $\frac{A}{C}$ ſera 100 & on concevra auſſi que la liqueur du vaiſſeau eſt diviſée en tranches ou lames horiſontales indefiniment minces de même épaiſſeur; & pour fixer l'imagination, on ſuppoſera auſſi que les lames ou tranches s'écoulent ſucceſſivement les unes après les autres, en ſorte qu'il n'y a que la tranche qui touche immédiatement le fond qui fournit à l'écoulement actuel, & que toutes les parties d'une même tranche ou couche ſortent par l'ouverture C avec une égale viteſſe & égale à celle que la tranche acquerroit ſi elle tomboit depuis le niveau juſqu'à l'endroit où elle ſe trouve.

PROPOSITION III.

42. *Suppoſons qu'une tranche ou lame de la liqueur contenue dans le vaiſſeau deſcende depuis la ſurface juſques ſur le fond. Je dis que ſi on multiplie le tems de la deſcente par le rapport* $\frac{A}{C}$ *ſuppoſé égal à* 100, *on aura le tems de l'écoulement entier, ou le tems que le vaiſſeau ſera à ſe vuider.*

Demonst. Si la petite lame DE deſcendoit librement par l'action de la peſanteur, lorſqu'elle ſeroit arrivée à l'endroit d'une tranche, elle auroit acquis une viteſſe égale à celle avec laquelle cette tranche doit ſortir par l'ouverture C; ainſi lorſqu'elle ſeroit arrivée en O, elle auroit acquis une viteſſe égale à celle avec laquelle la tranche BH doit ſortir par l'ouverture C; lorſqu'elle ſeroit arrivée en N, R, elle auroit acquis des viteſſes égales à celles que les tranches LM, PQ doivent avoir en C, de ſorte que ſi les tranches de la liqueur étoient égales à lame DE, le tems de l'écoulement d'une tranche par l'ouverture C, par exemple, le tems de la tranche LM ſeroit égal au tems pendant lequel la lame DE avec la viteſſe acquiſe depuis le niveau juſqu'à la tranche LM, paſſeroit par la ſection ou ouverture N qui répond à cette tranche; de même le tems de l'écoulement de la tranche PQ par l'ouverture C, ſeroit égal au tems pendant lequel la lame DE avec la viteſſe acquiſe depuis le niveau juſqu'à la tranche PQ paſſeroit par la ſection R qui répond à cette tranche, puiſque la viteſſe & l'ouver- Fig. 1.

d'une part, ſont égales à la viteſſe & à l'ouverture de l'autre part, de même que les lames de liqueur qui paſſeroient par ces ouvertures ; d'où l'on voit que le tems de l'écoulement de toutes les tranches par l'ouverture C ſeroit égal au tems pendant lequel la lame DE avec les différentes viteſſes acquiſes paſſeroit par les ſections correſpondantes de toutes ces tranches, ou égal au tems pendant lequel la lame DE deſcendroit depuis le le niveau juſqu'au fond ; mais puiſque ſelon l'hypothèſe les tranches PQ, LM, &c. ſont 100 fois plus grandes que la lame DE, & que d'ailleurs toutes les parties d'une même tranche ſortent d'une égale viteſſe, le tems de l'écoulement d'une tranche, par exemple, de la tranche PQ ſera, 100 fois plus grand que le tems pendant lequel la lame DE avec la viteſſe acquiſe depuis le niveau juſqu'à cette tranche, paſſeroit par l'ouverture ou ſection R ; donc pour avoir le tems de l'écoulement d'une tranche, par exemple de la tranche PQ ; il faut multiplier par 100 ou par le rapport $\frac{A}{C}$ le tems pendant lequel la lame DE avec la viteſſe acquiſe depuis le niveau juſqu'en PQ paſſeroit par la ſection R : or tous ces produits particuliers ont pour multiplicateur commun le rapport $\frac{A}{C}$ donc pour avoir la ſomme des mêmes produits, ou le tems de l'écoulement total il faut multiplierpar le rapport $\frac{A}{C}$ le tems de la deſcente de la lame DE depuis le niveau juſqu'au fond ; car ce tems de la deſcente eſt égal à la ſomme des tems particuliers pendant leſquels la lame DE avec les différentes viteſſes acquiſes paſſeroit par les ſections N, R, &c. correſpondantes de toutes les tranches donc, &c.

43. COROLL. 1°. *Si deux vaiſſeaux d'égale hauteur ſont remplis d'une même liqueur, les tems des écoulemens ſeront entr'eux comme les baſes ou fonds des vaiſſeaux ſi les ouvertures ſont égales.* Soit nommé (T) le tems que la lame DE emploieroit à deſcendre juſques ſur le fond GA, (*t*) celui de la deſcente de la lame *de* ; $\frac{A}{C}$, $\frac{a}{c}$ les rapports des baſes aux ouvertures, les tems des écoulemens ſeront exprimez par les produits $T \times \frac{A}{C}$, $t \times \frac{a}{c}$; or on ſuppoſe que les hauteurs DC, *dc* ſont égales ; donc les tems des deſcentes des lames DE, *de* ſont égaux ; les ouvertures C, c ſont auſſi égales ; donc ces produits ſont entr'eux comme les baſes repré-

Fig. 1, 3.

ſentées par A & *a*; donc les tems des écoulements étant exprimez par ces produits, ſeront entr'eux comme les baſes.

44. 2°. *Si les hauteurs* DC, dc *ſont inégales, & que les ouvertures* C, c *ſoient encore égales, les tems des écoulemens entiers ſeront entr'eux comme les produits des racines quarrées des hauteurs* DC, dc, *& des baſes.* Car les tems T, *t* des deſcentes des lames DE, *de* le long de DC, *dc* ſont entr'eux comme les racines quarrées des hauteurs; d'ailleurs on ſuppoſe que les ouvertures C, *c* ſont égales; donc les produits $T \times \frac{A}{C}$, $t \times \frac{a}{c}$, ſont entr'eux comme les produits des racines quarrées des hauteurs DC, *dc*, & des baſes repréſentées par A & *a*; donc les tems des écoulemens ſont auſſi entr'eux dans ce même rapport là.

45. 3°. *Si les baſes ou fonds ſont égaux, les tems des écoulemens ſont entr'eux en raiſon compoſée des racines quarrées des hauteurs* DC, dc, *& de la réciproque des ouvertures* C & c. Car ſi dans les produits $T \times \frac{A}{C}$, $t \times \frac{a}{c}$ au lieu des tems T, *t* on met le rapport des racines quarrées des hauteurs DC, *dc*; qu'on diviſe les deux produits par A & *a* qui répréſentent les baſes ſuppoſées égales; qu'enfin on multiplie les deux quotiens d'abord par C & enſuite par *c*, on aura deux nouveaux produits qui ont pour produiſans les racines quarrées des hauteurs DC, *dc*, & les ouvertures C & *c* priſes en raiſon inverſe: or ces produits ſont dans le même rapport que les produits $T \times \frac{A}{C}$, $t \times \frac{a}{c}$. (8. 14. *Arith.*); donc les tems des écoulemens exprimez par ces deux derniers produits, ſont auſſi entr'eux en raiſon compoſée de celle des racines quarrées des hauteurs DC, *dc*, & de la réciproque des ouvertures C & *c*. Et ſi les hauteurs ſont auſſi égales, les tems des écoulemens ſont entr'eux réciproquement comme les ouvertures; c'eſt pourquoi ſi un vaiſſeau ſe vuide par des ouvertures inégales faites ſur le fond horizontal, les tems des écoulemens par ces ouvertures, ſont entr'eux réciproquement comme ces ouvertures.

46. 4°. *Si on laiſſe vuider entierement un vaiſſeau priſmatique plein de quelque liqueur, qu'on l'entretienne enſuite toujours plein de la même liqueur pendant qu'on la laiſſe couler par la même ouverture qu'auparavant, la quantité qu'il en coulera pendant un tems égal à celui de l'écoulement total, ſera double de celle qu'il contient étant plein.*

Le tems de l'écoulement total de la liqueur eſt exprimé par le

Fig. 1. produit $T \times \frac{A}{C}$, en ſorte que ſi le tems T eſt, par exemple, d'un quart de ſeconde, que le rapport $\frac{A}{C}$ ſoit égal à 100, c'eſt-à-dire, que la baſe contienne 100 fois l'ouverture C, le tems de l'écoulement total ſera de 25 ſecondes produit de $\frac{1}{4}$ de ſeconde par 100; donc en 25 ſecondes il ſortira par l'ouverture C 100 colomnes qui auront pour hauteur commune DC, & pour baſes l'ouverture C; mais ſi le vaiſſeau eſt entretenu plein, la liqueur ſortira à chaque inſtant avec une viteſſe égale à celle qu'une goutte acquerroit en tombant de la hauteur DC, & avec cette viteſſe la lame qui ſort la premiere parcourroit dans le tems T égal à un quart de ſeconde, une hauteur double de DC; donc dans le tems d'un quart de ſeconde il ſortira par l'ouverture C une colomne dont la hauteur ſera double de DC; donc en 25 ſecondes ou en 100 quarts de ſecondes, il ſortira 100 colomnes qui auront une hauteur double de DC: or cette derniere quantité eſt double de la précedente. Donc ſi un vaiſſeau priſmatique eſt entretenu plein, il en ſortira deux fois autant de liqueur qu'il en contient ſi on la laiſſe couler pendant un tems égal au tems qu'il ſeroit à ſe vuider totalement.

47. 5°. On a fait voir dans la preuve de la Propoſition que pour avoir le tems de l'écoulement d'une tranche, il falloit multiplier par le rapport $\frac{A}{C}$ le tems que la lame DE ſeroit à traverſer librement l'épaiſſeur de cette tranche après être deſcendue par l'action de la peſanteur, de la ſurface de la liqueur juſqu'à l'endroit de cette tranche; donc pour avoir le tems de l'écoulement de pluſieurs tranches de la liqueur, il faudra auſſi multiplier par le rapport $\frac{A}{C}$ le tems que la lame DE ſeroit à traverſer librement les épaiſſeurs de toutes ces tranches après être deſcendue de la ſurface de la liqueur par l'action de la peſanteur juſqu'à l'endroit de chacune de ces tranches.

48. 6°. *Si on ſuppoſe que la lame* DE *puiſſe parcourir en tems égaux les épaiſſeurs ou eſpaces* EO, ON, NR, RC, *les tems des écoulemens, des portions de liqueur compriſes entre les plans* IK, BH; BH, LM; LM, PQ; PQ, GA ſont égaux entr'eux; car ils ſont tous égaux aux tems que la lame DE emploieroit à parcourir les hauteurs EO, ON, NR, RC, multipliez par le rapport $\frac{A}{C}$; or les

tems

tems de la lame DE par les hauteurs EO, ON, &c. ſont égaux, d'ailleurs le rapport $\frac{A}{C}$ eſt multiplicateur commun de ces tems égaux; donc les produits qui en réſultent ſont auſſi égaux; donc les tems des écoulemens qui ſont exprimez par ces produits ſont égaux.

49. 7°. *Les portions de liqueur qui s'écoulent en tems égaux, ſont entr'elles comme les nombres impairs* 7, 5, 3, 1, car les eſpaces CR, RN, NO, OE, que la lame DE parcourroit en tems égaux par le ſeul effort de la peſanteur, en tombant depuis la ſurface de la liqueur juſqu'en C, ſont entr'eux comme les nombres 7, 5, 3, 1: or par le Corollaire précedent les cylindres de liqueur qui ont pour hauteurs CR, RN, NO, OE, s'écoulent en tems égaux; de plus ces cylindres ayant des baſes égales, ſont entr'eux comme les hauteurs; donc ils ſont entr'eux comme les nombres impairs 7, 5, 3, 1; donc, &c.

50. 8°. *Si le tems dans lequel le vaiſſeau* AB *doit ſe vuider entierement, eſt connu, on peut déterminer & marquer ſur les côtez du vaiſſeau les quantitez qui doivent s'écouler dans chaque partie égale du tems donné.* Suppoſons que le vaiſſeau ſe vuide dans une heure, ſi on veut ſçavoir combien il s'en écoulera dans le premier quart d'heure, dans le 2, dans le 3 & le 4e quart d'heure, il faut diviſer la hauteur DC en quatre parties EO, ON, NR, RC qui ſoient entr'elles comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, & les portions de liqueur compriſes entre ces diviſions, s'écouleront en tems égaux, & par conſéquent chacune dans un quart d'heure, puiſque toute la liqueur s'écoule dans une heure.

51. 9°. Si l'on a un vaiſſeau rond ACB, c'eſt-à-dire, dont les ſections AB, GK, NO, IR paralleles entr'elles ſoient circulaires, & que les centres étant ſur la perpendiculaire DC, il ſoit de telle figure que ces mêmes cercles répréſentez par AB, GK, NO, IR &c. ſoient entr'eux comme les racines quarrées des hauteurs correſpondantes CD, CH, CM, CL; je dis que ſi un tel vaiſſeau eſt rempli d'une liqueur qui s'écoule par l'ouverture C, la ſurface de la liqueur parcourra en deſcendant des eſpaces égaux ſuivant la perpendiculaire DC en tems égaux. Fig. 4.

Pour démontrer la propoſition il faut concevoir que la liqueur eſt partagée en tranches très-minces & de même épaiſſeur, elles ſeront entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs correſpondantes, puiſque les ſections du vaiſſeau qui répréſentent ces tranches, ſont entr'elles dans cette raiſon. Cela poſé, les viteſſes

avec leſquelles la liqueur ſort à chaque inſtant par l'ouverture C, ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs de la liqueur ; donc les quantitez qui en ſortent par l'ouverture C à chaque inſtant, ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs, puiſque les quantitez qui ſortent en tems égaux par une même ouverture, ſont entr'elles comme les viteſſes : or les tranches de la liqueur par la figure particuliere du vaiſſeau, ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs correſpondantes ; donc elles ſont entr'elles cõme les viteſſes avec leſquelles la liqueur ſort, & par conſéquent entr'elles comme les quantitez qui ſortent en tems égaux ; donc ſi dans une partie du tems de l'écoulement, il ſort une quantité égale à la tranche GK, il eſt néceſſaire que dans le tems qui ſuit égal au précedent, il ſorte une quantité égale à la tranche ſuivante NO ; donc puiſque toutes les tranches ont la même épaiſſeur, il faut que la ſurface parcoure ſuivant DC des eſpaces égaux en tems égaux.

52. REMARQUE. Les deux derniers Corollaires peuvent donner une idée des clepſidres ou horloges d'eau. Ce ſont des inſtrumens qui ſervent à meſurer la longueur du tems par l'écoulement d'une liqueur. Dans les montres & les autres horloges à roue, l'aiguille du cadran parcourt des eſpaces égaux en tems égaux, ainſi ſa viteſſe ou l'eſpace qu'elle parcourt eſt la meſure du tems qui s'eſt écoulé. Les clepſidres meſurent auſſi le tems, mais c'eſt par la quantité de l'écoulement d'une liqueur ; cette quantité n'eſt pas la même pour tous les tems, elle varie ſelon que la ſurface de la liqueur eſt plus ou moins élevée au-deſſus de l'orifice, & ſelon la figure du vaiſſeau qui la contient, les deux derniers Corollaires peuvent faire comprendre qu'il y a autant de manieres de graduer les clepſidres, que l'on peut donner de figures différentes aux vaiſſeaux que l'on fait ſervir à cet uſage.

CHAPITRE SECOND.

DE L'ÉCOULEMENT DES LIQUEURS LORSQUE LES ORIFICES des réſervoirs ſont verticaux.

53. ON a ſuppoſé juſqu'ici que les liqueurs s'écouloient par des ouvertures horizontales percées ſur les fonds des vaiſſeaux, lorſqu'elles ſont verticales & très petites, on peut encore les regarder comme ſi elles étoient harizontales, ſur-tout ſi la ſurface de la liqueur eſt beaucoup élevée au-deſſus de l'ouverture,

parce que toutes les gouttes ont ſenſiblement une égale viteſſe, de même que ſi la liqueur ſortoit par une ouverture horizontale; mais ſi les ouvertures laterales ſont grandes, toutes les gouttes qui ſe préſentent enſemble & à la fois pour ſortir n'ont pas la même viteſſe, parce que n'étant pas toutes à la même profondeur, elles ſont inégalement preſſées, il n'y a que les gouttes qui ſont ſur une même couche horizontale qui ſortent avec des viteſſes égales, les viteſſes des gouttes qui ſont ſur une même ligne verticale, augmentent depuis le bord ſupérieur de lorifice juſqu'au bord inférieur. Or entre toutes ces viteſſes croiſſantes il y en a une qui tient comme le milieu entre la plus grande & la plus petite, elle eſt appellée *moyenne*.

54. Pour avoir une idée bien diſtincte de cette viteſſe moyenne, il faut ſuppoſer pour un moment que tous les filets de liqueur qui ſortent en même-tems par un orifice vertical, ont la même viteſſe que s'ils ſortoient par une ouverture horizontale; ſi cette viteſſe eſt telle que le réſervoir donne préciſément la même quantité de liqueur que lorſqu'ils ſortent avec leurs viteſſes réelles & inégales (les tems des écoulements étant ſuppoſez égaux), c'eſt cette viteſſe qu'on nomme *moyenne* & qu'il faut connoître pour meſurer la quantité de liqueur qu'il peut ſortir par un orifice vertical. On aura cette viteſſe ſi on peut déterminer à quel endroit de l'orifice elle répond. On avertit par avance que pour déterminer cette viteſſe, il faut ſe ſervir des proprietez de la parabole. La quadrature de l'eſpace parabolique, c'eſt à-dire, de l'eſpace enfermé par la parabole, entre dans cette détermination & en eſt comme le fondement. On a donné une démonſtration de cette quadrature à la fin du Traité (14. *de la Parab.*) en ſuppoſant les proprietez les plus ordinaires & très-connues de la parabole, leſquelles on a ſeulement ennoncées, afin que le lecteur puiſſe voir ſur quels principes cette démonſtration roule ſans être obligé de les chercher ailleurs.

55. Une liqueur qui paſſe par une ouverture verticale, ſort d'un réſervoir, ou bien elle coule dans un canal, comme l'eau d'un aqueduc ou d'une riviere. Dans ce Chapitre on conſiderera ſeulement les ouvertures verticales rectangulaires, ſoit que la liqueur ſorte d'un réſervoir, ſoit qu'elle coule dans un canal; & parce que les ouvertures verticales par où une liqueur paſſe, ſont pour l'ordinaire rectangulaires lorſqu'elles ſont pratiquées au bas des réſervoirs; dans ce Chapitre on n'en ſuppoſera point d'autres; outre cela la conſidération des ouvertures verticales différentes de la

rectangulaire engage dans un examen qui n'eſt pas de ce Traité. On finira le Chapitre en diſant un mot de la meſure des eaux.

De l'écoulement d'une liqueur lorsqu'elle sort par une ouverture verticale rectangulaire.

Ce Chapitre regarde principalement les eaux qui par leur abondance peuvent fournir à un long écoulement.

PROPOSITION IV.

56. *Si une liqueur ſort d'un réſervoir par une ouverture verticale & rectangulaire* EDCF, *la viteſſe de chaque lame horizontale qui ſe préſente à l'orifice pour ſortir, eſt exprimée par l'ordonnée d'une parabole qui auroit ſon ſommet à la ſurface de la liqueur, & pour coupée la diſtance du ſommet de la parabole à cette lame.*

Fig. 56. DEMONSTRATION. Si l'on conçoit que toute la liqueur qui répond à l'ouverture EDCF eſt diviſée en couches horizontales telles que IK, FE, &c. les viteſſes des parties d'une même couche ſeront égales, ce qui eſt évident: or je dis que les viteſſes des lames IK, FE ſont répréſentées par les ordonnées IL, FG de la demi parabole BLG qui auroit ſon ſommet au point B de la ſurface de la liqueur, & pour coupées BI, BF perpendiculaires aux lames IK, FE. Car les lames IK, FE ſont inégalement preſſées par la liqueur qui eſt au-deſſus de chacune d'elles, la lame FE étant à une plus grande profondeur, porte une charge plus grande que la lame IK; ainſi la lame FE doit ſortir avec une viteſſe plus grande que n'eſt celle de la lame IK; je dis de plus que les lames IK, FE reçoivent chacune la même viteſſe que ſi tout lorifice EDCF étoit bouché, excepté la petite fente rectangulaire IK ou FE; car quoique les lames ſupérieures ſoient en mouvement, elles chargent néanmoins les couches inférieures de même que ſi elles étoient en repos; un corps qui eſt mu horizontalement ſur un plan horizontal le preſſe avec autant de force que s'il étoit en repos, puiſque la force qui meut le corps ayant ſa direction horizontale ou parallele au plan, ne ſoutient aucune partie de ſon poids; donc les couches qui ſont au-deſſus des lames IK, FE étant mues horizontalement, cauſent ſur ces lames les mêmes preſſions que ſi elles étoient en repos. On peut donc conſiderer les petites fentes IK, FE comme les ouvertures de deux vaiſſeaux remplis d'une même liqueur; or dans cette hipothèſe les viteſſes des lames IK, FE ſeroient entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs BI, BF; d'ailleurs les ordonnées IL, FG

de la demi parabole BLG ſont entr'elles comme les racines quarrées des mêmes hauteurs BI, BF qui ſont les coupées priſes ſur l'axe de la demi parabole ; donc les viteſſes des lames IK, FE ſont entr'elles comme les ordonnées IL, FG.

57. Corollaires. 1°. Si l'on ſuppoſe que dans un certain tems, par exemple, d'une ſeconde, la lame IK puiſſe parcourir un eſpace égal à l'ordonnée IL, dans le même tems la lame FE pourra parcourir un eſpace égal à l'ordonnée FG, & les autres lames dans leſquelles on conçoit diviſée la liqueur qui eſt à l'ouverture, pourront parcourir un eſpace égal à l'ordonnée qui leur répond. Il ſortira donc en même tems par l'ouverture EDCF autant de lames qu'il y a de points dans la hauteur CF, leſquelles auront pour la largeur commune une ligne égale à la largeur de l'ouverture, & dont les longueurs ſeront égales aux ordonnées FG, IL, &c. de la demi parabole BLG.

58. 2°. Puiſque les lames qui ſortent en même-tems ſont rectangulaires, & qu'elles ont toutes pour largeur commune la largeur de l'ouverture, il s'enſuit que toutes enſemble elles forment un priſme de liqueur dont les deux baſes paralleles ſont l'eſpace parabolique AGFC.

59. 3°. Si l'on ſuppoſe que les ordonnées IL, FG, &c. ſont l'eſpace que les lames IK, FE, &c. peuvent parcourir dans un certain tems, par exemple, d'une ſeconde, on aura la quantité de liqueur qui paſſe pendant le même tems par l'ouverture EDCF en multipliant l'eſpace parabolique AGFC par la largeur de l'ouverture qui eſt égale à la hauteur du priſme. Il ne s'agit donc plus que de trouver l'eſpace parabolique AGFC.

60. Or 1°. *Lorſque le bord ſupériur de l'orifice* EDCF *touche la ſurface de la liqueur, le ſecteur parabolique* AGFC *eſt égal à un rectangle qui a pour hauteur la coupée* BF, *& pour baſe les deux tiers de l'ordonnée* FG. (14. *de la Parab. &* 40. *Géom.*) Fig. 5.

La hauteur BF eſt connue, l'ordonnée FG eſt auſſi connue, parce que la hauteur BF du réſervoir ou la diſtance depuis la ſurface de la liqueur juſqu'au bord inférieur de l'orifice, peut faire trouver la viteſſe de la lame FE, c'eſt à-dire, l'eſpace qu'elle peut parcourir en une ſeconde, lequel eſt égal à l'ordonnée FG ; c'eſt pourquoi ſi on multiplie BF par les deux tiers de l'ordonnée FG, on aura un rectangle BN égal au ſecteur parabolique AGFC. (*Voyez l'art.* 14 *de la parabole.*) Ainſi comme le ſecteur parabolique AGFC répréſente la ſomme des eſpaces que parcourent avec leurs viteſſes réelles les gouttes de liqueur qui ſortent le long de la verticale CF ou DE ; pareillement le rectangle BN

répréſente la même ſomme dans l'hypothèſe que les gouttes qui ſortent le long de la verticale CF ou DE ont toutes des viteſſes égales & répréſentées par FN ou IL ; donc puiſqu'on auroit la dépenſe du réſervoir pendant le tems que la goutte F parcourroit FG, en multipliant le ſecteur parabolique AGFC par la largeur FC ou CD de l'ouverture EDCF, on l'aura de même en multipliant le rectangle BN par la même largeur.

61. Il eſt viſible que les élémens du rectangle BN tels que FN, IL, &c. répréſentent la viteſſe moyenne dont on a donné la définition (53) puiſque ſi chaque goutte avoit une viteſſe exprimée par FN ou IL, la quantité de l'écoulement ſeroit la même que lorſqu'elles ſortent avec leurs viteſſes réelles.

Fig. 6. 62. 2°. Lorſque l'orifice EDCF eſt au-deſſous de la ſurface de la liqueur, on trouvera le ſegment parabolique AGFC en cette maniere. 1°. Les hauteurs BC, BF de la ſurface de la liqueur au-deſſus des bords inférieur & ſupérieur de l'orifice étant connues, on pourra trouver les viteſſes des lames CD, FE ; par conſéquent les ordonnées CA, FG de la demi parabole BLG, enſemble les coupées BC, BF ſeront connues ; c'eſt pourquoi ſi on prend CM égale aux 2 tiers de CA, FN égale aux 2 tiers de FG, qu'on forme les rectangles BM, BN, ils ſeront égaux aux ſecteurs paraboliques BAC, BGF ; donc ſi on retranche le rectangle BM du rectangle BN, c'eſt à-dire, le ſecteur BAC du ſecteur BGF, il reſtera du rectangle BN, un eſpece de gnomon ou d'équerre CFNPIM qui ſera égal au ſegment parabolique AGFC. 2°. Il faut réduire ce Gnomon en un rectangle qui ſoit encore égal au ſegment AGFC ; ce rectangle doit avoir pour hauteur celle de l'orifice qui eſt la même que celle du ſecteur parabolique AGFC : or les deux côtez MO, OP du rectangle OI ſont connus, MO eſt l'excez de CO ou FN ſur CM, & OP eſt égal à BC, la hauteur CF eſt auſſi connue ; c'eſt pourquoi ſi on cherche une quatriéme proportionnelle aux trois lignes CF, MO, OP, laquelle on ſuppoſe égale à NS prolongement de FN, on aura le rectangle OS égal au rectangle OI (12. *Arith.* 1. *Geom.*) par conſéquent le rectangle CS ſera égal au ſegment parabolique AGFC. Cela fait, il eſt viſible que comme le ſegment parabolique eſt égal à la ſomme des eſpaces que parcourent en même-tems avec leurs viteſſes réelles les gouttes qui ſortent le long de la verticale CF ou DE, de même le rectangle CS eſt auſſi égal à cette ſomme ; donc puiſqu'on auroit la dépenſe du réſervoir en multipliant le ſegment AGFC par la largeur CD ou FE, on l'aura également ſi on multiplie le rectangle CS par cette largeur.

63. Il eſt viſible que les élémens du rectangle CS expriment la viteſſe moyenne dont on a donné la définition.

64. 4°. L'on voit donc que pour trouver par le calcul la quantité de l'écoulement lorſqu'une liqueur ſort par une ouverture verticale, il faut réduire le ſolide irrégulier de liqueur tel que l'ouverture le donne en un parallelipipede dont les trois dimenſions ſoient les deux dimenſions de l'ouverture, & la ligne qui exprime la viteſſe moyenne. Les deux dimenſions de l'ouverture ſont connues par la meſure actuelle qu'on peut leur appliquer ; les opérations que l'on vient d'indiquer font trouver la troiſiéme dimenſion ou la ligne qui répréſente la viteſſe moyenne. Lorſque la viteſſe moyenne eſt connue, on peut avoir le parallelipipede cherché en multipliant l'ouverture par la ligne qui exprime cette viteſſe moyenne.

65. 5°. Lorſque la viteſſe moyenne eſt connue, on peut trouver à quelle profondeur elle répond. 1°. Dans le cas où l'ouverture touche la ſurface de la liqueur par ſon bord ſupérieur, la viteſſe moyenne FN ou IL eſt les deux tiers de la plus grande FG ; c'eſt-à-dire, que la plus grande viteſſe FG eſt à la moyenne FN ou IL comme 3 eſt à 2 ; donc leurs quarrez ſont entr'eux comme 9 & 4 : c'eſt pourquoi ſi on fait la proportion 9 . 4 :: CF . CI, ce quatriéme terme ſera la profondeur à laquelle répond la viteſſe moyenne IL ; car les hauteurs CE, CI ſont entr'elles comme les quarrés des viteſſes correſpondantes, puiſque les racines quarrées des hauteurs ſont comme les viteſſes. 2°. Si l'ouverture eſt au deſſous de la ſurface de la liqueur, on pourra auſſi trouver à quel endroit de la hauteur BF la viteſſe moyenne répond ; car la plus grande viteſſe FG ou la moindre CA eſt connue & la hauteur BF ou BC qui lui répond, de même que la viteſſe moyenne FS ou IL ; c'eſt pourquoi ſi on fait la proportion $\overline{FG}^2 . \overline{IL}^2 ::$ BF . BI, ce quatriéme terme eſt la hauteur à laquelle répond la viteſſe moyenne FS ou IL, en ſorte que ſi l'on perce le réſervoir à l'endroit trouvé, la liqueur ſortira avec une viteſſe égale à la viteſſe moyenne.

66. 6°. Lorſque l'ouverture EDCF eſt à une grande profondeur & qu'elle eſt petite, la viteſſe moyenne répond ſans aucune erreur ſenſible au centre de l'ouverture. C'eſt pourquoi dans ce cas la hauteur qui répond à ce centre étant connue, on pourra trouver immédiatement la viteſſe moyenne ſans recourir aux opérations précedentes.

67. 7°. *Si l'ouverture* EDCF *étoit ſur un fond horizontal autant au-deſſous de la ſurface de la liqueur que le bord inférieur* FE, *la quantité qui en ſortiroit ſeroit à celle qui en ſort. lorſqu'elle eſt* Fig. 5.

verticale, & que le bord ſupérieur CD *touche à la ſurface, comme* 3 *eſt à* 2.

Car ſi l'ouverture EDCF étoit horiſontale, chaque goutte auroit à ſa ſortie une viteſſe exprimée par FG; & lorſque la liqueur ſort par l'ouverture verticale EDCF, la quantité de l'écoulement eſt la même que ſi toutes les gouttes avoient une viteſſe moyenne exprimée par IL; donc les quantitez que fourniroient les deux ouvertures EDCF, l'une horiſontale, l'autre verticale, ſeroient entr'elles comme la plus grande viteſſe FG eſt à la viteſſe moyenne IL: or la viteſſe moyenne IL n'eſt que les deux tiers de la plus grande FG ou la plus grande viteſſe FG eſt à la viteſſe moyenne, comme 3 eſt à 2; donc les quantitez de liqueur qui s'écouleroient en même-tems par les deux ouvertures EDCF, l'une horiſontale, l'autre verticale, ſeroient entr'elles comme 3 à 2.

68. 8°. *Si une même liqueur coule de deux réſervoirs par des ouvertures verticales rectangulaires de même largeur qui touchent à la ſurface de la liqueur, les quantitez qui paſſent en même-tems par ces ouvertures ſont entr'elles en raiſon triplée des plus grandes viteſſes, ou des viteſſes moyennes.*

Car les quantitez de liqueur qui paſſent en même-tems par les ouvertures ſuppoſées, ſont entr'elles comme les produits de ces ouvertures & des viteſſes moyennes; or les viteſſes moyennes ſont dans la même raiſon que les plus grandes viteſſes, puiſqu'elles en ſont les deux tiers, & les ouvertures ayant la même largeur ſont entr'elles comme les hauteurs; d'ailleurs les hauteurs ſont entr'elles comme les quarrez des plus grandes viteſſes; donc ſi dans le rapport des produits on met celui des grandes viteſſes, qui eſt le même que le rapport des viteſſes moyennes, qu'au lieu du rapport des ſurfaces des ouvertures on mette celui des quarrez des plus grandes viteſſes, on trouvera que les produits des ouvertures par les viteſſes moyennes ſont entr'eux comme les cubes des grandes viteſſes, ou en raiſon triplée des grandes viteſſes; donc les quantitez de liqueur qui ſortent en même-tems par les deux ouvertures rectangulaires ſuppoſées, ſont entr'elles comme les cubes des plus grandes viteſſes, ou en raiſon triplée des plus grandes.

69. Comme les viteſſes moyennes ſont dans la raiſon des plus grandes viteſſes, puiſqu'elles en ſont les deux tiers, il s'enſuit que les quantitez de liqueur qui paſſent en même-tems par les deux ouvertures rectangulaires ſont entr'elles comme les cubes des viteſſes moyennes, ou en raiſon triplée de ces viteſſes.

70. 9°. *Si les ouvertures rectangulaires ſuppoſées ſont inégales en largeur, les quantitez de liqueur qui en ſortiront en même-tems ſont entr'elles*

entr'elles en raiſon compoſée des largeurs & des cubes des plus grandes viteſſes, ou des cubes des moyennes. Ce Corollaire ſe prouve de la même maniere que le précédent. Si les largeurs étoient égales, les quantitez de liqueur qui s'écouleroient, ſeroient entr'elles comme les cubes des plus grandes viteſſes ou des viteſſes moyennes; mais puiſque les largeurs des ouvertures ſont inégales, il eſt viſible que la plus grande largeur fournira en même-tems une plus grande quantité, & que l'augmentation ſera proportionnée à cette plus grande largeur; ſi la largeur eſt double ou triple, il en paſſera en même-tems une quantité double ou triple, puiſque l'ouverture ſera double ou triple, la hauteur demeurant la même; donc pour avoir le rapport des quantitez qui s'écoulent en même-tems par ces ouvertures, il faut multiplier les cubes des plus grandes viteſſes ou des viteſſes moyennes par les largeurs; donc, &c.

71. 100. *Soit l'ouverture verticale* EDCF, *ſi on ſuppoſe qu'elle eſt continuée juſqu'à la ſurface de la liqueur en* BR, *je dis que la quantité qui s'écoulera par l'ouverture* EDCF *eſt à celle qui s'écouleroit en même-tems par l'ouverture* BCDR, *comme la différence des cubes des viteſſes en* F *& en* C, *eſt au cube de la viteſſe en* C; en ſorte que ſi l'on nomme Q la quantité qui s'écouleroit par l'ouverture BFER, *q* la quantité qui s'écouleroit par l'ouverture BCDR, V la viteſſe en F, *v* la viteſſe C, l'on aura cette proportion, $Q-q.\ q::V^3-v^3.\ v^3$, qui eſt celle qui vient d'être énoncée; car $Q-q$. eſt la quantité qui s'écoule par l'ouverture EDCF, puiſque Q eſt la quantité qui s'écouleroit par l'ouverture BFER, & *q* celle qui s'écouleroit par l'ouverture BCDR. Cela poſé, l'on aura cette proportion, $Q.\ q::V^3.\ v^3$. Or ſi on retranche les conſéquens des antécédens, l'on aura encore $Q-q.\ q::V^3-v^3.\ v^3$; donc, &c. Fig. 6.

72. Ce Corollaire donne le moyen de trouver la quantité de liqueur qui ſort par l'ouverture EDCF ſans avoir recours à la viteſſe moyenne. Car on ſçait que la quantité qui s'écouleroit par l'ouverture BCDR eſt les deux tiers de la quantité qui s'écouleroit en même-tems par cette même ouverture ſuppoſée horiſontale, & autant au-deſſous de la ſurface de la liqueur que l'eſt le bord ſupérieur CD de l'ouverture EDCF: or on peut toujours trouver la quantité que donneroit cette ouverture horiſontale; donc la quantité *q* qui en eſt les deux tiers ſeroit connue, les viteſſes V, *v* en F & en C ſont auſſi connues; donc dans la proportion précédente les trois derniers termes ſeront connus; donc on pourra trouver par leur moyen le premier $Q-q$, qui eſt la quantité de liqueur qui ſort par l'ouverture EDCF.

Du mouvement d'une liqueur qui court ou coule dans un canal.

73. Le ſujet dont il s'agit ici ne peut gueres avoir ſon application qu'au mouvement des eaux & au cours des rivieres; M. Gulielmini l'a expliqué en ſix Livres, auxquels il a joint un long Traité de la nature des fleuves. J'en ai détaché, ſur-tout du quatriéme Livre ce qui m'a paru le plus néceſſaire pour donner une idée du mouvement des eaux courantes. L'utilité de cette connoiſſance paroît ſur-tout lorſqu'on veut meſurer la quantité d'eau qui coule dans un canal, que l'on veut diviſer une riviere en pluſieurs bras, ou en réunir pluſieurs en un, & lorſqu'il faut meſurer la force d'un courant.

74. *Un canal horiſontal* eſt celui dont le fond eſt parallele à l'horiſon. Un canal *incliné* celui dont le fond eſt incliné à l'horiſon.

75. L'eau coule dans un canal horiſontal ſuivant la même loi que ſi elle ſortoit d'un réſervoir par une ouverture verticale faite à ſes côtez, c'eſt-à-dire, que les couches inférieures y ſont preſſées par les ſupérieures dont elles reçoivent toute leur viteſſe, laquelle eſt proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur ou diſtance d'une couche à la ſurface de l'eau; ainſi ce que l'on va dire des eaux courantes eſt principalement pour les eaux qui coulent dans un canal incliné.

76. *L'eau qui coule dans un canal incliné accélere ſa viteſſe comme feroit un corps qui gliſſeroit ou rouleroit ſur un plan incliné*; plus le canal a de pente, plus l'accélération eſt grande; & lorſque l'eau eſt arrivée à l'extrémité inférieure, elle a la même viteſſe que ſi elle étoit tombée du canal ſuivant la direction perpendiculaire. On ſuppoſe que le fond & les bords du canal ſont parfaitement polis, en ſorte que l'eau n'eſt aucunement retardée par le frottement.

Fig. 7. 77. On appelle la *tête* ou le *commencement* du canal incliné l'endroit où le fond du canal prolongé rencontre la ſurface de l'eau. Ainſi ſi AB eſt le fond d'un canal dans lequel court l'eau repréſentée par ADLB, qu'on prolonge AB juſqu'au point E où eſt la ſurface de l'eau, le point E eſt ce que l'on appelle ici la *tête*, la *ſource* ou le *commencement* du canal incliné.

78. *L'eau qui coule dans un canal incliné va plus vîte au fond qu'à la ſurface. Ainſi l'eau qui coule immédiatement ſur* AB *va plus vîte que celle qui coule à la ſurface* DL. Car de quelque endroit que vienne l'eau qui coule en A, ſoit qu'elle y ſoit deſcendue de la ſur-

face EK, soit qu'elle y soit allée en glissant sur la surface horisontale GA, soit qu'elle y soit venue d'un endroit situé entre la surface & le fond, il est certain qu'elle aura la même viteſſe que ſi elle étoit tombée d'une hauteur égale à la perpendiculaire GE ou AM, puiſque ſa viteſſe ſera proportionnelle à la racine quarrée de la hauteur d'où elle ſera deſcendue, ou de la profondeur d'où elle aura commencé à couler; & ſi la même viteſſe eſt en partie l'effet de la preſſion & en partie l'effet de la deſcente, elle ſera encore proportionnelle à la racine quarrée de AM: or la viteſſe de l'eau qui coule en D eſt ſeulement proportionnelle à la racine quarrée de DN; donc la viteſſe de l'eau qui coule auprès du fond AB, eſt plus grande que celle de l'eau qui coule à la ſurface.

79. A meſure que l'eau par l'écoulement s'éloigne du commencement du canal, le rapport des viteſſes inégales avec leſquelles elle coule ſur le fond & la ſurface, approche toujours davantage du rapport d'égalité: car lorſque deux quantitez inégales augmentent également, en ſorte que leur différence eſt la même, le rapport d'inégalité diminue à proportion qu'elle deviennent plus grandes; ainſi le rapport de 2 à 1 eſt bien plus grand que celui de 6 à 5, & encore plus grand que celui de 100 à 99; or lorſque l'eau a paſſé la perpendiculaire AD, la viteſſe qu'elle acquiert en deſcendant le long du plan AB & le long de la ſurface DL, eſt la même, puiſque les plans inclinez AB, DL ſont paralleles ou preſque paralleles; la différence des viteſſes qui augmentent continuellement eſt donc la même; par conſéquent le rapport d'inégalité va en diminuant à meſure qu'elles augmentent.

D'où l'on voit que lorſque le canal incliné a une longueur conſidérable, on peut regarder les viteſſes de l'eau au fond & à la ſurface comme ſenſiblement égales.

80. Il y a des cauſes phyſiques qui concourent à rendre la viteſſe de l'eau qui coule ſur le fond AB égale à celle de l'eau qui coule à la ſurface, elles peuvent même la diminuer juſqu'au point qu'elle ſoit moindre que la viteſſe de l'eau à la ſurface; ces cauſes ſont les frottemens & les divers obſtacles que l'eau courante trouve dans ſon cours. M. Mariotte en a fait l'expérience, il a trouvé que ſi deux bales de cire étoient inégalement plongées dans un courant, que l'une nâgeât auprès de la ſurface, & que l'autre deſcendit près du fond, celle-ci alloit moins vîte & étoit précédée par celle qui étoit à la ſurface; mais quant à préſent on fait abſtraction de toutes les cauſes qui peuvent empêcher que la peſanteur n'ait ſon effet plein & entier.

81. *Si la même quantité d'eau coule dans un canal incliné & qu'aucune cauſe n'en trouble le cours, le courant diminue en groſſeur à meſure qu'il s'éloigne de l'origine ou de la ſource ; en ſorte que ſi on le coupe à différens endroits de ſa longueur, les ſections ſeront d'autant moindres qu'elles ſeront plus éloignées de la tête ou commencement du canal, c'eſt-à-dire, que le ſolide de liqueur ira toujours en diminuant vers l'extrémité inférieure du canal.* Car chaque ſection peut être conſiderée comme une ouverture par laquelle il paſſe à chaque inſtant la même quantité de liqueur, & parce que le courant demeure dans le même état, il en paſſe la même meſure par chacune d'elles : or la viteſſe de l'eau eſt plus grande vers l'extrémité inférieure du canal que vers l'extrémité ſupérieure ; il faut donc que la ſection qui aura été faite vers le bas du canal ſoit moindre que celle qui eſt faite vers le haut, puiſque ſi elles étoient égales, il paſſeroit plus d'eau par les ſections inférieures à cauſe de la plus grande viteſſe ; par conſéquent le courant d'eau eſt plus mince vers le bas que vers le haut du canal. On déterminera cette diminution par les mêmes regles & la même méthode par leſquelles on a déterminé celle d'une liqueur qui deſcend perpendiculairement, & qui coule par une ouverture horiſontale.

82. Quoique la diminution que le courant d'eau reçoit à meſure qu'il s'allonge vers l'extrémité inférieure du canal, ſe faſſe ſuivant la même loi que lorſque la chute eſt perpendiculaire, elle eſt néanmoins moindre, parce que cette diminution eſt toute fondée ſur la plus grande viteſſe des lames d'eau qui précédent, il eſt viſible que plus la différence des viteſſes ſera grande, plus la diminution du courant doit de même être grande : or lorſque la chute eſt perpendiculaire, la différence des viteſſes eſt certainement plus grande ; donc la diminution du courant doit être moindre lorſque l'eau court dans un canal incliné, que lorſqu'elle coule perpendiculairement à l'horiſon. Il eſt auſſi évident par une raiſon ſemblable que plus l'angle que le canal incliné ſera avec l'horiſon ſera petit, plus la diminution dont on parle ici ſera auſſi petite, en ſorte que ſi le canal devient horiſontal, le courant eſt également gros dans toute ſa longueur.

PROPOSITION IV.

83. *Si l'eau d'un courant eſt mûe dans un canal incliné ſans aucun obſtacle, & avec toute la viteſſe qu'elle doit avoir naturellement ; je dis que celle qui coule près du fond du canal, ne reçoit aucune impreſſion de celle qui eſt au-deſſus & vers la ſurface, c'eſt-à-dire, qu'elle n'en eſt aucunement preſſée.*

Pour prouver cette Propoſition, il faut concevoir que deux poids poſez l'un ſur l'autre deſcendent en même-tems ſuivant leur direction naturelle, il eſt viſible que les deux poids feront le même chemin ſuivant leur commune direction; & parce que le poids ſupérieur ne va pas plus vîte, il ne preſſera ou ne pouſſera aucunement le poids inférieur, quoiqu'il le touche; mais ſi le poids inférieur deſcendoit plus vîte, il ſeroit encore moins à portée d'être preſſé par celui qui eſt au-deſſus. Cela poſé, il faut faire attention que l'eau qui coule près du fond, va plus vîte que celle qui eſt près de la ſurface; or puiſqu'elle parcourt un plus grand eſpace ſuivant la longueur du canal incliné, il eſt néceſſaire qu'elle en parcoure auſſi un plus grand ſuivant ſa direction verticale; par conſéquent l'eau inférieure n'eſt aucunement preſſée par l'eau qui eſt au-deſſus & vers la ſurface du courant; car ce n'eſt que ſuivant la direction perpendiculaire que l'eau de la ſurface peut preſſer celle du fond.

84. Corollaires. 1°. L'on peut appercevoir la différence qu'il y a entre le mouvement de l'eau qui court dans un canal horiſontal, & de celle qui deſcend dans un canal incliné; c'eſt que dans un canal horiſontal l'eau ne coule que par la preſſion des colomnes ſupérieures, mais dans un canal incliné chaque couche ne reçoit le mouvement que de ſa peſanteur propre, puiſque les couches ſupérieures ne preſſent aucunement les inférieures.

85. 2°. La Propoſition ſuppoſe que l'eau qui deſcend a toute la viteſſe qu'elle peut recevoir de l'action de ſa peſanteur propre; mais ſi par quelque empêchement elle ne recevoit pas toute cette viteſſe, pour lors l'eau du fond ſeroit preſſée par l'eau qui eſt vers la ſurface, comme il arriveroit dans l'exemple des deux poids, ſi celui qui eſt au-deſſous deſcendoit moins vîte que celui qui eſt au-deſſus.

86. 3°. Si l'eau qui coule dans un canal incliné avoit toute la viteſſe qu'elle doit avoir naturellement, c'eſt-à-dire, que celle qui coule ſur AB eût en B toute la viteſſe qu'elle auroit acquiſe en deſcendant le long du plan incliné EB, ou en tombant de la hauteur SB; & que celle qui coule à la ſurface eût en L toute la viteſſe qu'elle auroit acquiſe en deſcendant le long du plan incliné OL, ou en tombant de la hauteur perpendiculaire RL, on pourroit meſurer la quantité de liqueur qui paſſeroit par la ſection ou ouverture BL: car les viteſſes en B & en L ſeroient entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs BS, RL, ou de leurs proportionnelles BH, LH, perpendiculaires à OL, EB, c'eſt-à-dire, comme les ordonnées BX, LV de la demi-parabole HVX qui auroit pour coupées BH, LH: Fig. 7.

or les viteſſes en B & en L, ou ce qui revient au même, les ordonnées BX, LV de la demi-parabole HVX étant connues, on pourroit trouver le ſegment parabolique BLVX, enſemble la viteſſe moyenne, laquelle étant multipliée par la ſection ou ouverture BL, donneroit par conſéquent la quantité de liqueur qui paſſe par la même BL, & que le canal fournit pendant le tems que les gouttes B, L parcourroient avec leurs viteſſes propres les ordonnées BX, LV.

87. 4°. Mais l'expérience de M. Mariotte, rapportée ci-deſſus, apprend que les obſtacles qui ſe trouvent au fond du canal empêchent que l'eau n'ait toute la viteſſe qu'elle devroit avoir : d'ailleurs l'eau d'une riviere coule avec une moindre viteſſe aux bords que dans le milieu de la largeur de ſon lit ; c'eſt pourquoi pour avoir la quantité de l'écoulement, il faut avoir recours à une autre méthode, ou plutôt il faut écarter les obſtacles qui peuvent troubler l'ordre établi. L'artifice conſiſte à conſtruire avec du bois ou de la pierre une ouverture rectangulaire garnie d'une porte qui puiſſe deſcendre & monter, & fermer telle partie de l'ouverture que l'on
Fig. 8. jugera à propos. L'ouverture eſt repréſentée par le cadre IEFK, & la porte ou fermeture par le rectangle MDCN. Si on oblige toute l'eau du canal de paſſer par cette ouverture ou par pluſieurs enſemble, ſuppoſé qu'une ne ſuffiſe pas, ſon cours deviendra régulier. Car ſi on abbaiſſe la porte ou cataracte DMNC juſqu'à ce qu'elle intercepte une partie du courant, l'eau s'amaſſera & montera dabord, parce qu'elle ne pourra pas paſſer toute par l'ouverture EDCF avec la viteſſe qu'elle a ; or le raiſonnement & l'expérience concourent à prouver qu'elle montera juſqu'à ce que toute celle que le canal fournit puiſſe paſſer par l'ouverture EDCF : tant que la quantité de l'écoulement ſera moindre que ce qui vient de la ſource, il eſt néceſſaire que le ſurplus s'amaſſe au-deſſus de l'ouverture EDCF, & que la hauteur augmente ; d'un autre côté à meſure que l'eau monte, la viteſſe de celle qui paſſe eſt accélérée, & enfin lorſque toute celle qui coule le long du canal paſſe, elle ceſſe de monter & demeure dans cet état.

Si l'on ſuppoſe que l'eau ſe ſoit arrêtée en PB, *je dis que la viteſſe qu'elle a en paſſant par l'ouverture* EDCF *eſt la même que ſi elle ſortoit d'un réſervoir ordinaire qui auroit pour hauteur* BF.

1°. Puiſque la viteſſe que la pente du canal peut donner à l'eau eſt moindre que celle qu'elle a lorſqu'elle paſſe par l'ouverture EDCF, il eſt viſible que cette derniere viteſſe ne peut pas être l'effet de la ſeule pente ; la viteſſe de l'eau à l'ouverture EDCF

eſt donc l'effet & de la pente du canal & de la preſſion ſuivant la hauteur BF : or je dis en ſecond lieu que cette viteſſe n'eſt pas plus grande que ſi elle n'étoit produite que par la preſſion de la hauteur BF ; car la force de la pente & la preſſion ſuivant BF ſont deux cauſes qui tendent à produire un même effet, ſçavoir la viteſſe de l'eau qui coule, & c'eſt la preſſion ſuivant BF qui eſt ſupérieure à la force de la pente, puiſque c'eſt cette preſſion qui produit l'augmentation de viteſſe que l'eau reçoit ; mais ces deux cauſes s'empêchent également, l'effet produit par l'une retarde ou diminue de tout autant l'effet produit par l'autre ; ſi la force de la pente produit le tiers de l'effet total, il faut que la preſſion ſuivant BF ſoit diminuée ou affoiblie d'un tiers, & qu'elle ne produiſe que les deux tiers reſtans de l'effet ; ainſi la viteſſe avec laquelle l'eau paſſe par l'ouverture EDCF eſt la même que ſi elle ſortoit d'un réſervoir ordinaire qui auroit la hauteur BF ; puiſque ſans la pente du canal cette viteſſe ſeroit l'effet de la preſſion ſuivant BF.

88. Cela étant ainſi, ſi on décrit une demi-parabole BALG, dont les coupées ſoient BC, BF & les ordonnées correſpondantes CA, FG qui expriment les viteſſes de l'eau en C & en F, leſquelles ſont connues, parce que les hauteurs BC, BF qui les produiſent le ſont auſſi ; on aura l'eſpace parabolique CAGF qui repréſentera la ſomme des eſpaces parcourus ou des viteſſes avec leſquelles l'eau ſort dans la hauteur FC, & l'on trouvera comme ci-devant la viteſſe moyenne OL, laquelle étant multipliée par l'ouverture EDCF, fera connoître la quantité de l'écoulement pendant le tems qu'une goutte d'eau ſeroit à parcourir CA avec la viteſſe qu'elle a en C ou FG avec la viteſſe qu'elle a en F.

89. On ſuppoſe que le côté horiſontal EF du cadre EIKF eſt au-deſſus de l'eau dormante, s'il y en a ; car ſi ce côté étoit enfoncé dans une profondeur où l'eau ne coulât point, le produit dont on vient de parler n'exprimeroit pas la vraie quantité de l'écoulement, il faut que le côté EF ſoit dans le fil même du courant. Il faut de plus que le plan EIKF ſoit perpendiculaire au même courant, ſans quoi le produit de l'ouverture EDCF par la viteſſe moyenne ſeroit trop grand, & n'exprimeroit pas la vraie quantité d'eau qui ſe ſeroit écoulée.

De la meſure des Eaux.

90. Lorſqu'on veut exprimer en meſures connues la quantité de liqueur qui paſſe par une ouverture, il ne ſuffit pas d'avoir égard à la grandeur de l'ouverture, à la hauteur de la ſurface ou du réſervoir, & au tems de l'écoulement, il faut de plus fixer la ſignifi-

cation du terme qui exprime la meſure connue. On meſure ordinairement les liqueurs par lignes, pouces, pieds, &c. Or c'eſt pour ôter toute équivoque que M. Mariotte appelle *pouce d'eau* l'eau qui coulant pendant l'eſpace d'une minute donne quatorze pintes d'eau meſure de Paris, qui peſent deux livres chacune. (M. Mariotte ſuppoſe que la liqueur paſſe un peu le bord de la meſure pour qu'elle peſe deux livres). Selon cette définition toute ouverture qui donne quatorze pintes d'eau en une minute, donnera auſſi un pouce d'eau : ainſi parce que ſuivant les expériences de M. Mariotte l'ouverture d'un pouce circulaire donne 14 pintes en une minute lorſque la ſurface de l'eau eſt une ligne au-deſſus de cette ouverture, & qu'une ouverture circulaire de 3 lignes de diametre fournit la même quantité dans un tems égal, ſi elle a ſon centre treize pieds au-deſſous du niveau, on dira que ces deux eaux coulantes ſont d'un pouce. Si une ouverture donnoit en une minute le double, le triple, &c. de 14 pintes, on diroit que cette eau coulante ſeroit de deux, de trois pouces, &c. S'il ne couloit en une minute que la douziéme partie de 14 pintes, on diroit que cette eau eſt d'une *ligne*.

91. Si on veut meſurer la quantité d'eau en pieds & pouces cubes, il faut diviſer le nombre de pintes par 35 & l'on aura des pieds cubes, parce qu'un pied cube d'eau contient 35 pintes. Si on multiplie le nombre de pintes par $49\frac{1}{5}$, le produit exprimera des pouces cubiques, parce que la pinte contient $49\frac{1}{5}$ pouces cubiques. Si on diviſe le nombre de pintes par $27\frac{1}{2}$, on aura des pieds cylindriques, parce que le pied cylindrique contient 27 pintes $\frac{1}{2}$. Si on multiplie le nombre de pintes par $62\frac{5}{6}$, on aura des pouces cylindriques, parce que la pinte contient 62 pouces cylindriques $\frac{5}{6}$. Ces déterminations ſont fondées ſur ce que le pied cubique contient 35 pintes, & ſur le rapport du cercle au quarré de ſon diametre, qui eſt égal à celui de 11 à 14.

CHAPITRE TROISIE'ME.

Du mouvement d'une liqueur en tant qu'il a pour principe l'action d'une cauſe étrangere.

92. POUR aſſujettir les liqueurs à ſuivre un certain cours lorſque quelque force externe les preſſe ou les pouſſe, il faut qu'elles ſoient retenues de tous côtez, excepté à l'endroit de leur ſortie. On appelle machines hydrauliques les vaiſſeaux qui ſervent

vent à diriger les liqueurs & à les conduire, les plus ordinaires ſont les pompes: pour les faire jouer on emploie la force de l'air, celle d'un courant, les puiſſances animées, par éxemple, des hommes, des chevaux, &c. Comme dans le ſujet des pompes il ne s'agit pas tant d'expliquer de nouveaux principes que d'appliquer ceux qui ont été établis, on renvoie cette matiere au Traité qui doit ſuivre celui-ci; & afin de ne pas laiſſer le Lecteur en ſuſpens ſur la notion qu'il doit prendre des pompes, on ſe contentera d'en donner une idée très-ſuccinte. On ſe borne quant à préſent à expliquer les mouvemens d'une liqueur dans des tuyaux droits ou recourbez qu'on nomme *ſiphons* ces mouvemens ſont produits au moins en partie par une force différente de la peſanteur propre de la liqueur, par éxemple, par la preſſion de l'air. M. Gullielmini a parlé des ſiphons avec éxactitude dans deux lettres qui ſont à la ſuite de ſon Traité de la meſure des eaux coulantes: on l'a ſuivi dans ſa maniere de démontrer, elle eſt fort ſimple.

93. Dans ce Chapitre on conſidérera 1°. la viteſſe avec laquelle une liqueur ſort d'un ſiphon. 2°. La viteſſe avec laquelle elle eſt mûe dans un ſiphon. 3°. Les balancemens qu'une liqueur fait dans un ſiphon lorſqu'une fois elle a été agitée par une cauſe extérieure. 4°. En conſéquence on donnera une explication des ondes qui ſe forment à la ſurface d'une liqueur, & ſur-tout de l'eau. 5°. Le mouvement d'une liqueur produit par la preſſion d'un air condenſé. 6°. On donnera une notion abrégée des pompes.

De la viteſſe d'une liqueur lorſqu'elle ſort d'un Siphon.

Quoique l'on ait déja dit quelque choſe des ſiphons dans le Livre précédent, on reprend le même ſujet, afin d'en donner ici une explication ſuivie.

94. On ſçait que ſi un tuyau droit ou recourbé eſt plein de quelque liqueur, l'air la preſſe aux deux ouvertures en des ſens oppoſez avec des forces égales, en ſorte que ſi la liqueur n'avoit d'autre principe de mouvement que la preſſion des colomnes d'air qui répondent aux deux orifices du tuyau, elle ne couleroit point, parce qu'un corps qui eſt pouſſé ſuivant des directions oppoſées par des forces égales, eſt en équilibre. Or afin d'aider l'imagination, l'on demande ici qu'au lieu des colomnes d'air qui preſſent aux deux ouvertures, on puiſſe ſubſtituer la preſſion de deux colomnes de liqueur de même peſanteur ſpécifique que la liqueur contenue dans le tuyau; ainſi ſi le ſiphon CBA eſt plein d'eau au lieu des co-

Fig. 9. 10. lomnes d'air qui répondent aux ouvertures C, A, on pourra ſuppoſer que ce ſont deux colomnes d'eau CI, AM égales en peſanteur aux colomnes d'air qui preſſent aux ouvertures C, A, & parce que la preſſion que l'air éxerce à chaque ouverture eſt égale à celle qu'y cauſeroit une colomne d'eau de 32 pieds, on feindra auſſi que chacune de ces colomnes a 32 pieds de haut.

PROPOSITION V.

95. *Dans les ſiphons qui ont des branches égales, & dont la hauteur n'excéde pas 32 pieds lorſqu'ils ſont pleins d'eau, il ne ſe fait aucun flux, aucun écoulement de la liqueur contenue; mais elle demeure ſuſpendue; que ſi les deux branches ſuppoſées toujours égales excedent 32 pieds, l'eau coulera de l'une & de l'autre branche juſqu'à ce que ſa hauteur perpendiculaire dans le ſiphon ſoit de 32 pieds.*

Fig. 9. DEMONSTAT. DE LA I. PARTIE. Il faut concevoir qu'au ſiphon ABC dont les branches AB, CB ſont égales, c'eſt-à-dire, dont les orifices A, C ſont ſur une même ligne horizontale AC, on a attaché aux ouvertures A, C deux tuyaux AM, CI de 32 pieds de long remplis d'eau juſqu'à l'horizontale MI. Les deux colomnes d'eau AM, CI cauſent aux ouvertures A, C des preſſions égales à celles que l'air y produit, & preſſent auſſi l'eau du ſiphon dans le même ſens que l'air la preſſe, c'eſt-à-dire, de bas en haut; donc l'effet, quant à l'écoulement doit être le même. Cela poſé, ſi on ſuppoſe que la preſſion de l'air ceſſe, & que celle des colomnes AM, CI lui ſuccede, il faut démontrer que l'eau contenue dans le ſiphon ABC doit être en repos. Le point B étant le plus haut du ſiphon ABC, diviſe la liqueur contenue en deux colomnes BA, BC de même peſanteur, leſquelles agiſſent contre les colomnes AM, CI, & tendent à les ſurmonter; les colomnes AM, CI réagiſſent auſſi contre les colomnes BA, BC & les repouſſent vers le haut du ſiphon; il ſe fait donc au point B deux efforts contraires, la colomne AM tend à faire deſcendre la colomne AB le long de la branche BC, & la colomne CI tend à faire deſcendre la colomne BC le long de la branche BA; or ces deux efforts ſont égaux, c'eſt-à-dire, que les preſſions contraires que les colomnes AM, CI produiſent en B ſont égales. Cela étant 1°. ſi les colomnes BA, BC ont chacune 32 pieds de haut, elles ſont en équilibre avec les colomnes AM, CI; il y a donc au point B égalité de preſſions en ſens contraires. 2°. Si les colomnes BA, BC ont moins de 32 pieds de haut, les colomnes AM, CI preſſeront la lame B en ſens con-

traires avec des efforts égaux aux différences de leurs peſanteurs à celles des colomnes BA, BC; mais ces différences ſont égales; donc les preſſions cauſées en B par les colomnes AM, BC étant égales & directement oppoſées, la colomne BA ne pourra deſcendre dans la branche BC, ni la colomne BC dans la branche BA; par conſéquent l'eau du ſiphon ſera en repos.

Demonst. de la II. Partie. La ſeconde partie de la Propoſition ſe démontre facilement après ce qui vient d'être dit; car ſi les colomnes BA, BC encore ſuppoſées égales ont plus de 32 pieds de haut, elles excéderont en hauteur les colomnes AM, CI, par conſéquent elles en ſurmonteront les efforts; donc elles couleront dans les branches BA, BC, ainſi l'équilibre ne pourra avoir lieu tant qu'elles ſeront plus hautes; mais à l'inſtant que la colomne BA ſe ſera miſe au niveau de la colomne AM, c'eſt-à-dire, auſſitôt que ſa peſanteur égalera celle de la colomne d'air qui répond à l'orifice A, il eſt évident qu'elle n'aura de force que pour contrepeſer la colomne AM; il faut dire la même choſe de la colomne BC à l'égard de la colomne CI: lors donc que les colomnes BA, BC ſeront au niveau des colomnes AM, CI, c'eſt-à-dire, qu'elles auront préciſément 32 pieds de haut, l'écoulement ceſſera de ſe faire, & l'eau du ſiphon ſera en repos.

96. Corollaires. 1°. *Si les branches* BA, BC *ſont inégales, il ne peut y avoir d'équilibre; ainſi ſi c'eſt la branche* BA *qui eſt la plus longue, l'eau coulera par l'ouverture* A, *quoique les colomnes* BA, BC *aient moins de* 32 *pieds de haut.* Car puiſque la colomne BA eſt plus longue que la colomne BC, elle détruit ou empêche dans l'action de la colomne AM une partie de ſon effort plus grande que n'eſt l'effort que la colomne BC détruit ou empêche dans l'action de la colomne CI; donc la colomne CI preſſe plus fortement la lame ou tranche B, que ne fait la colomne AM, puiſque les preſſions que les colomnes AM, CI éxercent en B ſont égales aux différences de leurs peſanteurs aux peſanteurs des colomnes BA, BC; donc la preſſion de la colomne CI prévaudra ſur celle de la colomne AM; la liqueur paſſera donc de la branche BC dans la branche BA, & elle coulera par l'orifice de cette branche. Fig. 10.

97. 2°. *Si l'extrémité* C *de la branche* BC *trempe dans un vaiſſeau où il y ait de l'eau, la preſſion que la colomne* CI *ou que la colomne d'air repréſentée par* CI *éxerce en* B *continuant d'être plus grande, l'eau du vaiſſeau montera dans la branche* BC, *& coulera dans la branche* BA, *& le flux ſera continuel*; car la colomne d'air repréſentée par CI preſſe ſur toute la ſurface de la liqueur du

vaiſſeau excepté à l'orifice C qui trempe dans l'eau ; donc cette preſſion obligera l'eau du vaiſſeau de monter dans la branche CB, puiſque rien ne l'en empêche, le flux ſera donc continuel.

98. 3°. Si dans le Siphon ABC il n'y a que de l'air, & qu'en faiſant tremper ſon extrémité C dans l'eau, on ſuce à l'autre bout, l'air ſe rareſiera & perdra de ſa force, & l'air extérieur qui peſe ſur la ſurface de l'eau du vaſe conſervant toute celle qu'il a deviendra par-là plus fort que l'air intérieur, & obligera l'eau du vaſe d'entrer dans le ſiphon ; de ſorte ſi l'on vient à bout de ſucer tout l'air qu'il contient, l'eau prendra ſa place & le remplira ; pour lors ſi les branches BA, BC ſont égales il y aura équilibre entre l'eau du ſiphon & l'air qui la preſſe aux orifices A, C ; mais ſi les branches BA, BC ſont inégales & la branche BA la plus grande, l'eau coulera par l'orifice A ; que ſi c'eſt la branche BC qui eſt la plus grande, l'eau redeſcendra dans le vaiſſeau.

99. Dans ce troiſiéme Corollaire on ſuppoſe que la branche BC n'excede pas 32 pieds, c'eſt-à-dire, qu'elle ne ſurpaſſe pas en longueur, la hauteur de la colomne d'eau que l'air peut ſoutenir par ſon poids ; car ſi la longueur BC étoit plus grande que celle d'une telle colomne, l'eau ne pourroit monter qu'à la hauteur de 32 pieds après avoir même ſucé ou pompé tout l'air du ſiphon.

100. 4°. On peut conclure de-là que ſi on a deſſein de conduire de l'eau par la preſſion de l'air naturel en quelqu'endroit, il faut 1°. qu'il ſoit plus bas que la ſource, 2°. que la hauteur à laquelle il faut élever l'eau pour l'y faire deſcendre n'excede pas 32 pieds, ſans ces deux conditions l'entrepriſe ne peut reuſſir ; ainſi ſi on vouloit ſe ſervir du ſiphon pour faire monter de l'eau du bas d'une montagne ſur le ſommet pour la conduire enſuite dans un lieu plus bas que la ſource on n'en viendroit pas à bout.

Fig. 11. 101. 5°. Si on a un ſiphon ABC à une ſeule branche qu'on en ſuce l'air en faiſant tremper ſon extrémité C dans l'eau elle y montera, & ſi enſuite on a ſoin de boucher avec le doigt l'orifice ſupérieur A, elle demeurera comme ſuſpendue d'elle-même dans le tuyau ; ſi après cela on le retire, & que l'ouverture ſoit tournée en bas, l'eau demeurera encore ſuſpendue. Cela eſt évident après ce qui précede & ce qu'on a dit dans le livre cinquiéme

PROPOSITION VI.

Fig. 10. 102. *La viteſſe avec laquelle l'eau ſort de la longue branche BA du ſiphon ABC eſt égale à celle qu'elle acquerroit par une chûte éga-*

le à DA qui eſt la différence des longueurs des deux branches.

Dem. Il faut mener les horiſontales CD, MO. Il eſt évident que DA eſt la différence des longueurs des deux branches, & parce que les colomnes AM, CI qui repréſentent les preſſions que l'air exerce aux ouvertures AC, ſont égales; que d'ailleurs les parties LM, CO compriſes entre les horiſontales OM, CDL ſont auſſi égales, il s'enſuit que DA eſt égale à OI; ainſi ſi on démontre que la viteſſe avec laquelle l'eau ſort de la branche BA eſt égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur IO, on aura auſſi demontré que cette viteſſe eſt la même que celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur DA différence des longueurs des branches. Cela poſé puiſque l'air qui preſſe ſur la ſurface EF tient lieu d'une colomne d'eau de 32 pieds qui auroit pour baſe EF, il faut concevoir que c'eſt cette colomne qui preſſe au lieu de l'air, & que pour la ſoutenir, les côtez du vaiſſeau ſont continuez juſqu'à RN, & qu'à l'ouverture A répond un tuyau AM de 32 pieds plein d'eau laquelle preſſe à l'orifice A. Je dis donc que la viteſſe avec laquelle l'eau ſort par A eſt la même que ſi étant en A elle prenoit ſon cours vers le haut, & qu'elle ſortît par l'orifice M; car ſuppoſons que la force qui pouſſe l'eau au dehors agit par repriſes, ſoit que l'eau ſorte par A ou par M, il faudra que la force mouvante ſurmonte à chaque impulſion la réſiſtance de la colomne AM, & qu'elle mette en mouvement la liqueur contenue dans le ſiphon; donc ſoit que l'eau ſorte par A ou par M, la force mouvante a préciſément la même réſiſtance & le même poids à ſurmonter; donc la viteſſe qu'elle imprime à l'eau qui ſort par A eſt la même que ſi elle ſe détournoit vers le haut, & qu'elle ſortît par M: or ſi l'eau ſortoit par M elle auroit une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur IO; car lorſqu'une liqueur ſort d'un réſervoir tel que RGHN par l'ouverture M du tuyau CBAM, elle a la viteſſe qu'elle acquerroit ſi elle tomboit de la hauteur IO qui eſt au-deſſus de l'ouverture, la figure & la longueur du tuyau ne changeant point cette viteſſe (car on fait ici abſtraction de toute réſiſtance, & l'on a ſeulement égard à la force de la preſſion;) donc la liqueur ſort par A avec une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit par une chute égale à IO ou à DA qui eſt la difference des longueurs des branches.

103. Corall. 1°. Plus la différence des branches CB, BA ſera grande, plus auſſi la viteſſe avec laquelle l'eau ſort par l'orifice A ſera grande. Fig. 10.

104. 2°. Lorſqu'on dit que la viteſſe de l'eau à ſa ſortie en A eſt égale à celle qu'elle acquerroit par une chute égale à DA difference des branches CB, BA, on ſuppoſe que la longue branche BA n'excede pas 32 pieds; car comme le réſervoir REFN n'a que 32 pieds de hauteur, ſi la branche BA a plus de 32 pieds de long, la viteſſe de la liqueur lorſqu'elle ſort en A, n'en ſera pas pour cela plus grande, puiſqu'elle ne peut être plus grande que celle qu'elle acquerroit de la hauteur IO.

105. 3°. La plus grande viteſſe que la liqueur peut avoir lorſqu'elle ſort de la branche AB eſt égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur de 32 pieds, ce qui arrive lorſque la branche CB eſt infiniment peu longue, & que la branche BA a 32 pieds de long, car pour lors la colomne qui a pour hauteur IO, & qui imprime à l'eau la viteſſe avec laquelle elle ſort par l'ouverture A a auſſi 32 pieds qui eſt la plus grande hauteur qu'elle puiſſe avoir. La viteſſe eſt donc pour lors la plus grande.

106. 4°. *Si l'eau ſort de deux ſiphons, elle a des viteſſes qui ſont entr'elles comme les racines quarrées des différences des longues branches aux moins longues.* (On ſuppoſe toujours que les longues branches n'excedent pas 32 pieds): car les viteſſes avec leſquelles l'eau ſort ſont égales à celles qu'elle acquerroit par des chûtes égales à ces différences; or les viteſſes acquiſes par deux hauteurs ſont entr'elles comme les racines quarrées des mêmes hauteurs; donc les viteſſes avec leſquelles l'eau ſort de deux ſiphons ſont entr'elles comme les racines quarrées des différences des longues branches aux moins longues. Cette propoſition eſt conforme à l'expérience, elle eſt de M. Guilielmini. Dans un des ſiphons la différence des branches étoit de 714 parties, & dans l'autre elle étoit de 542, le premier ſiphon donna 24 onces d'eau en 20 vibrations, l'autre ſiphon donna dans le même-tems 20 onces $\frac{1}{3}$; or ſi on tire les racines quarrées des différences 714, 542 elles ſont aſſez exactement entr'elles comme les quantitez d'eau 24 & 20 $\frac{1}{3}$ qui expriment les viteſſes, car les orifices des ſiphons étoient égaux ou plutôt c'étoit le même ſiphon dont il avoit raccourci l'une des jambes afin d'avoir des différences inégales.

107. 5°. *Si les orifices des ſiphons ſont inégaux, les quantitez de liqueur qu'ils fourniſſent en même-tems ſont entr'elles en raiſon compoſée de ces orifices & des racines quarrées des différences des longues branches aux moins longues.*

De la vitesse avec laquelle l'eau coule dans les ſiphons.

108. Nous venons de voir dans la propoſition précedente que la viteſſe avec laquelle l'eau ſort du ſiphon lorſqu'elle eſt arrivée en A, eſt égale à celle qu'elle acquerroit ſi elle venoit à tomber de la hauteur DA différence des longueurs BA, BC; mais l'eau coule-t-elle dans toute la longueur du ſiphon avec cette viteſſe ou bien en a-t-elle de différentes dans les différens endroits de cette longueur? Pour répondre à la queſtion propoſée nous ferons les reflexions ſuivantes. Fig. 10.

109 1°. Si l'on a ſeulement égard à la viteſſe que l'eau reçoit en C en vertu de la preſſion cauſée par l'excès de la force de la colomne CI ſur celle de la colomne AM, cette viteſſe eſt égale à celle que la chûte IO ou DA donneroit; or cette viteſſe eſt continuellement retardée à meſure que l'eau monte dans la branche CB par l'effort de ſa peſanteur propre, en ſorte que ſi la branche CB étoit plus haute que IO ou DA, l'eau ne pourroit monter en B par la ſeule viteſſe qu'elle reçoit en C; afin donc qu'elle puiſſe monter juſqu'en B il faut que l'eau qui eſt entrée la derniere dans le tuyau pouſſe celle qui y eſt entrée la premiére, ainſi le mouvement de l'eau qui coule dans le ſiphon CBA eſt compoſé.

110. 2°. *Si de l'eau coule dans un vaiſſeau cylindrique vertical ou incliné avec les viteſſes qu'elle peut acquerir à meſure qu'elle deſcend, il ne peut pas ſe faire qu'elle rempliſſe exactement le tuyau*; car le ſolide de liqueur qui coule dans le tuyau devient de plus en plus mince à meſure que ſon extrémité inférieure s'éloigne de la ſource ou de l'orifice ſupérieur du tuyau (19), par conſéquent, la liqueur ne remplit pas exactement le tuyau.

111. 3°. *Si une liqueur, par exemple, de l'eau coule dans un tuyau cylindrique vertical ou incliné d'une viteſſe uniforme dans toute la longueur du tuyau, elle en remplit exactement la capacité.* Car puiſque l'eau coule avec la même viteſſe dans toute la longueur du tuyau, elle coule auſſi à l'ouverture inférieure avec la même viteſſe à chaque inſtant de ſa ſortie, ainſi le tuyau en fournit la mêmême quantité à chaque inſtant; donc il en paſſe la même quantité par toutes les ſections que l'on peut imaginer dans la longueur du tuyau; donc les petits priſmes de liqueur qui paſſent par ces différentes ſections ſont tous égaux entr'eux: de plus ils ont tous la même longueur laquelle repréſente la viteſſe uniforme avec laquelle l'eau coule dans le tuyau; par conſéquent les baſes des petits priſmes ſont égales: or ces baſes meſurent la capacité du tuyau ſuivant

la largeur. Donc ſi de l'eau coule uniformement dans un tuyau cylindrique ou priſmatique, elle en remplit exactement la capacité.

112. 4°. *Si une liqueur, comme de l'eau, remplit un tuyau cylindrique vertical ou incliné dans lequel elle coule le tuyau étant toujours entretenu plein, elle y eſt mue d'une viteſſe uniforme.* Car puiſque le tuyau eſt entretenu plein, il en ſort conſtamment la même quantité: donc il en paſſe auſſi la même quantité par toutes les ſections que l'on peut imaginer dans la longueur du tuyau; donc tous les petits priſmes qui paſſent en même-tems par ces ſections ſont tous égaux entr'eux; d'ailleurs ils ont des baſes égales, puiſque la liqueur remplit exactement le tuyau; donc les hauteurs ſont auſſi égales: or ces mêmes hauteurs repréſentent les viteſſes avec leſquelles ces petits priſmes ou cylindres ſont mus; par conſéquent la liqueur ou toutes les parties qui la compoſent ſont mues dans le tuyau cylindrique d'une viteſſe égale ou uniforme.

PROPOSITION VII.

113. *La viteſſe avec laquelle de l'eau coule dans un tuyau cylindrique vertical ou incliné lorſqu'il eſt entretenu plein, eſt égale à la viteſſe qu'elle acquerroit en tombant du haut du tuyau juſqu'au plan horizontal de la baſe.*

Fig. 12. DEMONST. Soit le tuyau AB vertical ou incliné ſur le plan horizontal HE, je dis que ſi le tuyau AB eſt entretenu plein d'eau, elle coulera dans toute la longueur BA avec une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit ſi elle tomboit de la hauteur CG. Pour le démontrer, il faut concevoir que le tuyau AB eſt dans un vaiſſeau EFDH plein d'eau, elle ne contribuera en rien à l'écoulement, puiſque l'ouverture ſupérieure touche la ſurface de la liqueur; or puiſque l'air preſſe aux orifices A, C au lieu de ces preſſions, on peut ſuppoſer qu'il y a une colomne d'eau de 32 pieds, repréſentée par AM laquelle preſſe de bas en haut à l'ouverture A, & que le vaiſſeau EFDH étant prolongé juſqu'en RN, en ſorte que la hauteur ajoutée CI ſoit auſſi de 32 pieds, eſt entretenu plein d'eau juſqu'en RN, il eſt certain que la force que le cylindre de liqueur FDRN imprimeroit à l'eau qui entre dans le tuyau n'eſt pas plus grande que celle que lui donne la colomne d'air dont elle tient la place; ce que le cylindre FDRN feroit de plus que la colomne d'air c'eſt qu'il fourniroit à l'écoulement en entretenant le tuyau AB toujours plein; ainſi la viteſſe que l'eau auroit étant mue dans le tuyau ſi elle étoit preſſée aux ouvertures A, B par deux colomnes d'eau

de

de 32 pieds, eſt la même que celle qu'elle a lorſqu'elle eſt preſſée par l'air qui leur repond. Soit enfin tirée l'horiſontale MOL, puiſque OG & CI ſont égales à AM, il s'enſuit que CI=OG & que IO=CG. Cela poſé l'on aura un réſervoir ENRAM où l'eau ſortira par l'ouverture A avec la même viteſſe qu'elle ſortiroit par l'ouverture M, ainſi qu'on a fait voir dans la propoſition précedente; or ſi l'eau ſortoit par l'ouverture M elle auroit une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur IO ou CG; donc la viteſſe de l'eau en A, c'eſt-à-dire, celle avec laquelle elle coule dans le tuyau AB eſt égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur IO ou CG. Fig. 12.

On peut dire encore que ſi la liqueur qui eſt dans le tuyau ABC deſcendoit ſeule le long de ce tuyau ſans qu'il lui en ſuccedât de la nouvelle, le cylindre de liqueur ſeroit acceleré dans ſa deſcente, de maniere que la lame C qui eſt la plus haute en arrivant au bas du tuyau auroit une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur IO ou CG; or puiſque la viteſſe de cette lame eſt indépendante de celles qui la ſuivent, il s'enſuit que cette lame arrivant en A aura toute la viteſſe que peut donner la chûte IO ou CG; mais d'un autre côté le tuyau par l'hypothèſe demeure plein; donc les lames qui ſuivent la lame C ont la même viteſſe que cette lame; donc l'eau coule dans le tuyau avec une viteſſe égale à celle qu'elle acquerroit par la chûte CG.

113. Pour concevoir encore plus diſtinctement comment il peut ſe faire que l'eau coule dans le tuyau BA avec une viteſſe uniforme & égale à celle que donneroit la chûte perpendiculaire CG; il faut ſuppoſer d'abord que l'air n'agit point aux ouvertures du tuyau, & qu'il y a de l'eau qui eſt toujours prête à entrer par l'ouverture B tandis qu'elle ſort par l'ouverture A; il eſt certain que ſuppoſant d'abord le tuyau plein, le cylindre de liqueur deſcendra d'un mouvement accéleré comme ſur un plan incliné, & parce que les lames d'eau qui ſuivent la lame C ou l'extremité ſupérieure du cylindre CA n'ont aucune viteſſe lorſqu'elles entrent dans le tuyau, celle qu'elles auront en A ſera égale à celle que peut donner la chûte perpendiculaire CG, le tuyau BA ne ſera donc pas entretenu plein, puiſque l'eau y eſt continuellement accelerée: préſentement que l'air agiſſe aux ouvertures du tuyau, & qu'étant encore d'abord plein, le cylindre de liqueur CA commence à deſcendre, il eſt indubitable que la colomne d'air qui agit en A ſera affoiblie ou contrebalancée en partie par le poids du cylindre d'eau CA; donc la colomne qui répond à l'ouverture B

deviendra plus forte de tout autant : or cette force eſt employée à donner aux lames d'eau qui ſuivent la lame C, toute la viteſſe qu'elle peut avoir & avec laquelle elle eſt mue ; de cette maniere les lames ont toutes la même viteſſe & le tuyau eſt entretenu plein ; & parce que la lame C étant arrivée en A, a la viteſſe que peut donner la chûte CG, il s'enſuit qui les autres lames qui viennent après celle-là ſont toutes mues avec cette même viteſſe. D'où l'on voit que c'eſt l'air qui fait qu'une liqueur peut couler d'une viteſſe uniforme dans un tuyau droit ou incliné, & qu'elle peut le remplir exactement.

115. Ceci s'accorde avec l'expérience, elle eſt de M. Gulielmini. Le tuyau BA étoit un peu incliné ſur le fond HE du vaiſſeau EFDH, & ſon extrémité ſupérieure touchoit preſque à la ſurface de l'eau contenue dans le vaiſſeau. Il laiſſa donc couler l'eau dans le tuyau BA ; mais parce que l'air s'inſinuoit par l'ouverture B, il arriva que l'eau dans l'écoulement ne put remplir exactement la capacité du tuyau : pour ôter à l'air toute entrée dans le tuyau BA, il en retrancha une petite partie, ce qui n'empêcha pas l'air d'entrer encore dans le tuyau : lorſqu'il en eut ôté environ 2 pouces, l'eau coula à plein tuyau, il continua de diminuer peu à peu la longueur du tuyau juſqu'à l'ouverture A où l'eau coula enfin comme elle auroit fait d'un réſervoir ordinaire, & à chaque fois qu'il accourcit le tuyau, il reçut l'eau qu'il laiſſa couler pendant des intervalles de tems toujours égaux, il peſa ces produits & il les trouva parfaitement égaux ; ainſi le tuyau dégorgera toujours la même quantité quoiqu'inégalement long, & chaque produit fût trouvé égal à celui que donnoit l'ouverture A toute ſimple & ſans tuyau ; ce qui ne ſeroit pas arrivé ſi l'eau avoit coulé dans toutes ces differentes longueurs de tuyau avec une viteſſe moindre qu'elle n'avoit lorſqu'elle ſortit par l'ouverture A toute ſimple & ſans tuyau.

116. COROLLAIRES. 1°. Après tout ce qui vient d'être dit, on peut conclure que l'eau qui coule dans un ſiphon y eſt mue d'une viteſſe uniforme & qu'elle le remplit exactement. Mais il faut pour que cela ſoit que l'ouverture ſoit petite, car ſi elle étoit grande l'eau ſeroit obligée de venir de loin pour fournir à l'écoulement, & il ſe feroit à l'ouverture & même dans le ſiphon un vuide ſemblable à celui qui ſe forme au-deſſus des ouvertures des réſervoirs lorſqu'elles ſont trop grandes.

117. 2°. Si une liqueur coule d'une viteſſe uniforme dans un ſiphon, & que le vaiſſeau ou la courte branche trempe demeure toujours plein, on pourra ſçavoir quelle quantité il en peut ſortir

dans un tems donné en connoiſſant la difference des longueurs des branches & le diametre du ſiphon.

118. Si on veut épuiſer la liqueur qui eſt dans un vaiſſeau & le vuider, on pourra déterminer la durée de l'écoulement & la quantité qu'il en paſſe en tems égaux en ſe ſervant de la propoſition

DES BALANCEMENS QUI ARRIVENT A UNE LIQUEUR lorſqu'une puiſſance après l'avoir contrainte de monter au-deſſus du niveau, la laiſſe retomber en l'abandonnant à elle-même.

119. Lorſqu'une liqueur eſt en repos dans un ſiphon, elle eſt de niveau dans les deux branches, la ſurface ſupérieure eſt ſur un même plan horizontal; mais ſi quelque puiſſance ſe joint à la peſanteur de la liqueur, elle lui fera perdre l'équilibre & la contraindra de monter dans l'une des branches en l'abbaiſſant dans l'autre. Soit le ſiphon ABC où la liqueur qu'il contient ſoit en équilibre, la ſurface DEFG eſt de niveau; que ſi quelque force pouſſe la liqueur de haut en bas dans la branche CH, elle la fera deſcendre comme de FG en IK, & la fera monter dans la branche AP auſſi haut qu'elle eſt deſcendue comme en LM ſi le ſiphon eſt cylindrique: or ſi la puiſſance qui a agi ſur la liqueur, la laiſſe enſuite à elle même, elle deſcendra dans la branche AP puiſque les liqueurs tendent à ſe mettre de niveau; ainſi elle deſcendra en DE; mais l'expérience montre qu'elle ne s'y arrête pas, elle deſcend au-deſſous du niveau BEFG dans la branche AP comme en ON, & elle monte au-deſſus dans la branche CH comme en RS auſſi haut qu'elle eſt deſcendue dans la branche AP; il eſt évident que la liqueur s'abbaiſſera enſuite dans la branche CH, & qu'elle montera dans la branche AP, mais elle ne s'arrêtera pas au niveau DEFG, elle montera au-deſſus dans la branche AP, & elle deſcendra au-deſſous dans la branche CH: la liqueur continuera à monter & à deſcendre de la ſorte & à ſe balancer dans le ſiphon, par ces allées & ces retours alternatifs: or ce ſont ces vibrations ou balancemens que l'on ſe propoſe d'expliquer ici; on va démontrer qu'ils ſont reglez ſuivant une loi ſemblable à celle des pendules. Fig. 13.

120. 1°. *Si après que la liqueur eſt deſcendue dans la branche* CH *au-deſſous du niveau* DEFG, *& qu'elle eſt montée dans la branche* AP *en* LM, *elle eſt abandonnée à elle même, elle deſcendra par un mouvement acceleré juſqu'au repos* DEFG; car tant que la colomne LP ſera plus haute que la colomne KH, elle pourra

imprimer par l'excès de ſon poids de nouveaux degrez de viteſſe; par conſéquent la liqueur deſcendra juſqu'au repos DEFG par un mouvement acceleré.

121. 2°. *Lorſque la liqueur ſera parvenue en* DE, *elle continuera de deſcendre par un mouvement retardé autant au-deſſous du niveau* DEFG *qu'elle étoit montée au-deſſus.*

1°. La liqueur deſcendra au-deſſous du niveau ou repos DEFG, puiſqu'elle a toute la viteſſe qu'elle a acquiſe durant l'accéleration par LD. 2°. *Son mouvement ſera retardé*, car comme elle ne peut deſcendre au-deſſous du niveau DEFG dans la branche AP qu'elle ne monte au-deſſus dans la branche CH, la colomne de cette branche ſera plus peſante que celle de la branche AP; donc la liqueur ceſſera d'être accelerée, puiſque la colomne qui deſcend & qui tend à faire monter la liqueur eſt moins peſante que la colomne qui monte & qui tend à la faire deſcendre: or puiſque la liqueur ceſſe d'être accelerée, & que d'ailleurs elle monte dans la branche CH contre l'effort de la peſanteur, il s'enſuit qu'elle ſera retardée. 3°. *La liqueur deſcendra dans la branche* AP *autant au-deſſous du repos* DEFG *qu'elle étoit montée au-deſſus en* LM, c'eſt-à-dire, qu'après être deſcendue dans la branche AP juſqu'au repos DEFG, elle montera au-deſſus dans la branche CH & la hauteur GS à laquelle elle parviendra eſt égale à la hauteur DL, d'où elle eſt deſcendue dans la branche AP; car comme un corps peut avec la viteſſe acquiſe par une certaine hauteur, remonter à l'endroit d'où il a commencé à deſcendre; de même la liqueur contenue dans le ſiphon peut auſſi avec la viteſſe acquiſe par la hauteur LD, remonter dans la branche CH à la hauteur GS égale à LD; la peſanteur ôte à la liqueur la viteſſe acquiſe, par les mêmes degrez qu'elle les lui a donnés, & le retardement eſt tout ſemblable à l'accéleration: or cela ne peut être ainſi que la liqueur ne monte en RS qui eſt au même niveau que LM.

Fig. 14. 122. 3°. Si le poids *p* du pendule *cp* décrit des arcs de cycloïde tels que *ld*, *do*, il eſt accéleré en deſcendant, & retardé en montant de maniere que lorſqu'il eſt arrivé à quelque point *l* ou *o*, la force qui l'accélere ou qui le retarde, eſt au poids comme l'arc *ld* ou *do*, compris entre le lieu du poids & le repos *d*, eſt à la demi cycloïde *db*. (*Liv. II.* 204.)

123. 4°. Si on ſuppoſe que la demi-cycloïde *db* eſt égale à la moitié de la longueur du cylindre de liqueur LBK; que l'arc *ld* que le pendule décrit en deſcendant eſt égal à la hauteur LD que

la liqueur parcourt auſſi en deſcendant juſqu'au repos D ; & que l'arc *do* que le pendule décrit depuis le repos *d* en montant en *o*, eſt égal à la hauteur DO ou GS que la liqueur décrit en montant auſſi au-deſſus du niveau DEFG, il eſt évident que le pendule & la liqueur décriront des eſpaces égaux en deſcendant & en montant.

PROPOSITION VIII.

125. *Si le pendule* cd *dont la longueur eſt ſuppoſée la moitié de celle du cylindre de liqueur* LBK, *& la liqueur parcourent des eſpaces égaux* ld, LD *en deſcendant juſqu'au repos* d, DEFG *& depuis le repos les eſpaces auſſi égaux* do, DO *ou* GS *en montant, je dis que ces eſpaces ſeront décrits en même tems, c'eſt-à-dire, que les balancemens de la liqueur ſe feront en même-tems que le pendule fera ſes vibrations.* Fig. 13. 14.

Demonstration. Les forces qui accélerent la liqueur lorſque la ſurface LM deſcend au repos DEFG ſont les petits cylindres OM, leſquels ayant tous des baſes égales & égales à celles du cylindre entier LMBKI, il s'enſuit que ces petits cylindres ſont entr'eux & au cylindre total, comme les hauteurs LO ſont entr'elles & à la longueur LBK, ou bien comme leurs moitiez LD & DB, ou encore comme leurs égales *ld*, *db* ; donc les forces qui accélerent la liqueur, ſont au poids du cylindre total comme LD & DB, ou leurs égales *ld*, *db* ; c'eſt-à-dire, comme les diſtances au repos DEFG ou *d* à la longueur DB ou à ſon égale *db* ; pareillement les forces qui accélerent le poids *p* aux points *b*, ſont entr'elles & au poids *p* comme les diſtances *ld* ſont entr'elles & à la demi cycloïde *bld* ; c'eſt pourquoi ſi on nomme F une des forces accéleratrices de la liqueur lorſque la ſurface LM eſt à une certaine diſtance du repos DEFG, que l'on nomme *f* la force accéleratrice du poids *p* lorſque ce poids eſt à la même diſtance du repos *d* ; que l'on nomme P le poids du cylindre de liqueur contenue dans le ſiphon, on aura F . P :: *ld* . *bld* ; on aura auſſi *f* . *p* :: *ld* . *bld* ; donc F . P :: *f* . *p*, ou F . *f* :: P . *p*, c'eſt-à-dire, que les forces qui à égales diſtances du repos DEFG & *d* accélerent les maſſes P, *p*, ſont dans le rapport conſtant de ces maſſes ; d'ailleurs les eſpaces LD, *ld*, DO ou GS & *do* ſont égaux ; donc elles les font parcourir en tems égaux (*Liv. I.* 129) ; donc les balancemens de la liqueur contenue dans le ſiphon, ſe font en même-tems que les vibrations du pendule qui décrit des arcs de cycloïde, & dont la longueur eſt égale à la moitié de celle de la liqueur du ſiphon.

126. COROLLAIRES. 1°. *Tous les balancemens grands & petits d'une liqueur contenue dans un ſiphon, ſont iſochrones ou d'égale durée ;* car leur durée eſt égale à celle des vibrations d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde : or ces arcs grands & petits ſont décrits en tems égaux ; donc les balancemens d'une liqueur contenue dans un ſiphon, ſe font auſſi en tems égaux, par conſéquent ils ſont iſochrones.

127. *Si la liqueur contenue dans le ſiphon a 6 $\frac{1}{9}$ pieds de long, ſes vibrations ou balancemens ſeront d'une ſeconde, c'eſt-à-dire, que la liqueur ſera une ſeconde à deſcendre dans une des branches du ſiphon, & une ſeconde à remonter dans la même branche.* Car un pendule de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ qui font 3 pieds $\frac{1}{18}$ ou environ, fait ſes vibrations en une ſeconde : or ſi la liqueur qui eſt contenue dans le ſiphon a une longueur double, c'eſt-à-dire, 6 pieds $\frac{1}{9}$, elle fait ſes vibrations en même-tems que ce pendule ; donc elles les fera dans une ſeconde.

128. 3°. *Plus l'eſpace ou l'étendue qu'une liqueur occupe dans un ſiphon eſt grande, plus le tems des vibrations ou balancemens eſt long.* Car plus un pendule eſt long, plus auſſi le tems de chaque vibration eſt long ; en ſorte que deux pendules de longueurs inégales achevent leurs vibrations en des tems qui ſont entr'eux comme les racines quarrées de leurs longueurs : or ſi une liqueur occupe dans deux ſiphons des étendues qui ſoient doubles des longueurs de ces pendules, les tems des balancemens ſont égaux aux tems des vibrations des pendules ; donc les tems qu'une liqueur eſt à faire ſes balancemens dans deux ſiphons où elle occupe des étendues differentes, ſont comme les racines quarrées des longueurs de ces pendules ou de celles que la liqueur occupe dans les ſiphons ; par conſéquent plus l'étendue qu'une liqueur occupe dans un ſiphon eſt grande, plus le tems des balancemens eſt long.

DES ONDES QUI SE FORMENT A LA SURFACE D'UNE LIQUEUR, & ſur-tout de l'eau lorſqu'on la touche.

129. Une liqueur qui eſt tranquille à ſa ſurface de niveau, aucune partie n'eſt plus haute que les autres ; mais ſi on la touche ou que l'on y jette quelque corps, la partie touchée s'enfonce, la partie environnante s'éleve & devient plus haute qu'elle n'étoit ; car le corps jetté ne s'enfonce qu'autant qu'il déplace un volume de liqueur égal à la partie enfoncée ; ce que l'on conçoit pouvoir ſe faire en deux manieres. 1°. En ſuppoſant que les par-

ties déplacées ſe meuvent horizontalement, & avec elles toutes celles qui ſont ſur le même plan horizontal, auquel cas il eſt néceſſaire que le mouvement ſe tranſmette dans un inſtant depuis l'endroit du corps jetté, juſqu'aux extrémitez de la ſurface. 2°. Le volume de liqueur que le corps jetté déplace, peut monter au-deſſus de la ſurface & y former une hauteur au lieu d'être mu ſuivant des directions horizontales : or l'obſervation apprend que c'eſt la ſeconde de ces hypotheſes qui a lieu, ce qui eſt d'ailleurs conforme à la loi générale de la communication du mouvement, ſuivant laquelle lorſqu'un corps mou eſt choqué ou preſſé, le mouvement ne ſe tranſmet pas dans un inſtant d'une extrémité du corps à l'autre extremité ; car il n'y a que les premieres parties qui ſont d'abord déplacées. C'eſt pour obéir à cette loi qu'une liqueur qui eſt frappée ou preſſée monte au-deſſus du niveau : elle ne peut pas être mue ſuivant la direction de la force qui la preſſe, parce que les parties qui ſont au-deſſous s'y oppoſent, la loi établie ne permet pas non plus qu'elle ſoit mue horizontalement ; c'eſt pourquoi elle monte contre ſa propre peſanteur au-deſſus de la ſurface pour y former une petite éminence ; la liqueur ainſi amaſſée en l'air autour du corps qui s'enfonce, ne pouvant ſe ſoutenir d'elle même retombe bientôt par ſon poids, & parce qu'étant arrivée au niveau elle a acquis une viteſſe qui la fait deſcendre au-deſſous de tout autant qu'elle eſt deſcendue, elle déplace en s'abbaiſſant de la ſorte, un volume de liqueur de même que le corps jetté en a déplacé un ; ce ſecond volume après avoir été contraint de monter contre la direction de la peſanteur, retombe bientôt, & lorſqu'il eſt parvenu à la ſurface ou niveau, il deſcend auſſi au-deſſous par la viteſſe acquiſe, & déplace un nouveau volume de liqueur, lequel monte auſſi & retombe après : ce ſont ces hauſſemens & abbaiſſemens alternatifs en tant qu'ils ſe propagent juſqu'aux extrémitez de la liqueur qu'on nomme *Ondes*. D'où l'on voit que les ondes imitent les balancemens qui ſe font dans le ſiphon. Pour donner une idée plus diſtincte des ondes & de leurs progrez, on obſervera.

130. 1°. Que les ondes ſe diſpoſent en cercles ou cerceaux concentriques, ils ont tous leurs circonférences ou leurs bords paralleles à la ſurface de la liqueur ; ils la touchent par le bord inférieur, & ils la ſurmontent par le bord ſupérieur ; les ondes imitent la figure circulaire, parce que le mouvement du corps jetté ſe diſtribue aux parties qui l'environnent & ſe tranſmet comme du centre vers la circonférence.

131. 2°. Lorſque la partie haute d'une onde s'abbaiſſe, elle perd au-deſſus de la ſurface de la liqueur la figure ronde qu'elle avoit, & il ſe forme au-deſſous du niveau un ſillon circulaire de la même grandeur, & le volume abbaiſſé en ſouleve un autre, pour lors il paroît une nouvelle hauteur pareillement de figure circulaire. Si l'on imagine un plan perpendiculaire à la ſurface de la liqueur, & qui paſſe par le centre commun des ondes, il les coupera comme le diametre coupe le cercle & la circonférence, Fig. 15. & la ſection pourra être repréſentée par la figure ABCED: A,C,D, &c. repréſentent les parties hautes qui ſont au-deſſus de la ſurface ou niveau HO; B,E, &c. repréſentent les parties baſſes qui ſont au-deſſous. Lorſque les parties hautes A, C, D s'abbaiſſent en F,I,L les parties baſſes B,E montent au-deſſus du niveau HO en G,K & deviennent les parties hautes des ondes: les parties hautes G, K redeſcendent enſuite, & les parties baſſes F, I, L remontent en A, C, D.

132. 3°. *Lorſque les parties hautes* A,C,D *s'abbaiſſent, leur viteſſe eſt accelerée juſqu'au niveau* HO. Car lorſque les parties hautes deſcendent, les parties baſſes B,E montent: or juſqu'à ce que les unes & les autres ſoient arrivées au niveau HO, les parties A,C,D étant plus élevées que les parties B,E, il eſt évident qu'elles ſeront accélerées par leur peſanteur; mais lorſqu'elles ſeront arrivées au-deſſous du niveau HO, les parties B,E ſeront au-deſſus; par conſéquent la viteſſe des parties A,C,D ſera retardée par les parties B, E devenues plus hautes.

D'où l'on voit que les ondes ſe font préciſément ſuivant la même loi que les balancemens d'une liqueur dans un ſiphon, & que ces mouvemens ſont tout-à-fait ſemblables.

133. 4°. On nommera ici largeur d'une onde l'intervalle qui eſt entre deux parties hautes A, C, ou entre deux parties baſſes B, E, & l'on dira qu'une onde a parcouru ſa largeur lorſque le mouvement ſe ſera communiqué d'une partie haute A à l'autre partie haute C, ou d'une partie baſſe B à l'autre partie baſſe E.

PROPOSITION IX.

134. *Le tems qu'une onde eſt à parcourir ſa largeur eſt égal au tems qu'un pendule dont la longueur eſt égale à la largeur de l'onde, employe à faire une vibration.*

Fig. 15. DEMONSTRATION. Comme la courbe ABC ne differe pas ſenſiblement en longueur de la largeur AC, on prendra indifféremment l'une pour l'autre. Concevons que la partie haute A s'abbaiſſe juſqu'en F, la partie baſſe B montera juſqu'en G, & ſelon

ce

ce qui vient d'être dit le mouvement de la partie A ſera accéléré juſqu'au niveau HO, & enſuite retardé juſqu'en F. On peut donc comparer le mouvement de A en F, & de B en G au mouvement d'une liqueur qui eſt dans un ſiphon & qui étant plus haute dans l'une des branches, ſi elle eſt laiſſée à elle-même, elle deſcend dans cette branche d'abord par un mouvement accéléré juſqu'au lieu du repos, enſuite par un mouvement retardé au-deſſous du même repos; donc ſi on fait un pendule dont la longueur ſoit égale à la moitié de AB ou au quart de ABC qui eſt la largeur de l'onde, dans le tems que le pendule fera une vibration, la liqueur deſcendra de A en F, & elle montera de B en G; & dans le tems d'une ſeconde vibration la liqueur deſcendra de G en B, & elle montera de I en C; de ſorte que dans le tems de deux vibrations d'un pendule qui auroit pour longueur le quart de ABC, le mouvement ſe communique de A en C, c'eſt-à-dire, que pendant deux de ces vibrations l'onde parcourroit ſa largeur; mais ſi l'on a un pendule dont la longueur ſoit égale à la largeur ABC de l'onde, il fera une vibration tandis que le pendule qui a pour longueur le quart de ABC en feroit deux, puiſque les nombres de vibrations que ces deux pendules font en même-tems, ſont entr'eux réciproquement comme les racines quarrées de 4 & de 1, c'eſt-à-dire, entr'eux comme 1 & 2 qui ſont les racines quarrées de 1 & de 4 (*Liv. II.* 218). Par conſéquent le tems qu'une onde eſt à parcourir ſa largeur, lequel eſt égal au tems que le pendule qui a pour longueur le quart de cette largeur mettroit à faire deux vibrations, eſt auſſi égal au tems pendant lequel un pendule qui auroit pour longueur la largeur entiere feroit une vibration.

135. Corollaires. 1°. *Les ondes qui ont une largeur de* 3 *pieds* 8 *lignes* $\frac{1}{2}$ *ou* 3 $\frac{1}{18}$ *pieds la parcourent en une ſeconde.* Car un pendule qui a cette longueur bat en une ſeconde; ces ondes feront donc dans une minute 183 $\frac{1}{3}$ produit de 3 $\frac{1}{18}$ pieds par 60 & dans une heure elles feront 11000 pieds produit de 183 $\frac{1}{3}$ par 60.

136. 2°. *Les tems que deux ondes emploient à parcourir leurs largeurs ſont entr'eux comme les racines quarrées des mêmes largeurs.* Car ces tems ſont égaux à ceux qu'emploieroient deux pendules à faire leurs vibrations & dont les longueurs ſeroient égales aux largeurs des ondes: or les tems des vibrations ſont entr'eux comme les racines quarrées des longueurs des pendules. (*Liv. II.* 217) Donc, &c.

La propagation du ſon a une grande affinité avec le mouvement des ondes.

De l'écoulement d'une liqueur produit par la condenſation de l'air.

Nous venons de voir la part que l'air libre & tel que nous le reſpirons peut avoir dans l'écoulement d'une liqueur : nous allons voir en peu de mots quels effets l'air condenſé peut produire en faiſant jaillir une liqueur.

137. 1°. L'air ſe condenſe dans la proportion des poids ou des forces qui le compriment : pour condenſer de l'air 2, 3 fois plus qu'il n'eſt, il faut employer une force double, triple, &c. & parce que la condenſation de l'air auprès de la terre répond au poids d'une colomne de vif-argent de 28 pouces ou d'une colomne d'eau de 32 pieds, il s'enſuit que pour condenſer l'air que nous reſpirons au double, au triple, &c. il faudra le charger d'un poids égal à celui d'une colomne de mercure qui auroit une hauteur double, triple de 28 pouces, ou d'une colomne d'eau qui auroit une hauteur double, triple de 32 pieds.

138. Cela étant, ſi un air condenſé preſſe ſur la ſurface d'une liqueur, la preſſion ſera proportionnelle au degré de condenſation, car l'air fait effort par ſon reſſort, & tend à ſe rétablir avec une force égale à celle qui le comprime & le tient aſſujetti ; s'il eſt deux fois plus condenſé que l'air que nous reſpirons, il preſſera ſur la ſurface de la liqueur avec une force égale au poids d'une colomne d'eau de 64 pieds de haut ou d'une colomne de mercure de 56 pouces ; c'eſt pourquoi ſi dans le vaiſſeau où ſe trouve cet air condenſé, il y a quelque liqueur, par exemple, de l'eau, qu'on le perce en quelque endroit, l'eau j'ailliroit à la hauteur de 64 pieds, de même que ſi elle ſortoit d'un réſervoir où la ſurface de l'eau ſeroit 64 pieds au-deſſus de l'ouverture, puiſque les preſſions ſont égales dans les deux ſuppoſitions ; mais parce que l'air extérieur réſiſte par ſon poids ou ſon reſſort autant qu'une colomne d'eau de 32 pieds, la moitié de la force de cet air condenſé ſe conſumera à ſurmonter la réſiſtance de l'air extérieur ; ainſi quoique l'eau enfermée dans le vaiſſeau ſoit autant chargée que ſi elle avoit au-deſſus une colomne d'eau de 64 pieds, elle ne jaillira néanmoins qu'à la hauteur de 32 pieds.

139. En général pour avoir la hauteur du jet qu'un air condenſé peut produire, il faut 1°. trouver la hauteur d'une colomne de la liqueur qui doit jaillir, laquelle puiſſe donner par ſon poids à l'air extérieur le degré de condenſation qu'il a ; ainſi ſi c'eſt du vif-argent qui doit jaillir, la hauteur de la colomne de vif-argent

qui peut retenir l'air que nous reſpirons dans le degré de condenſation qu'il a, eſt de 28 pouces ; ſi c'eſt de l'eau qui eſt preſſée, la colomne dont il s'agit eſt de 32 pieds. 2°. Le rapport des condenſations de l'air extérieur & de l'air enfermé dans le vaiſſeau étant connu, s'il eſt, par exemple, égal à celui de 1 à 3, & que la liqueur jailliſſante ſoit du vif-argent, il faut trouver la hauteur de la colomne de la même liqueur dont le poids peut donner à l'air auprès de la terre un degré de condenſation trois fois plus grand, par la proportion $1 . 3 :: 28 . x = 84$. Le quatriéme terme qui eſt 84 pouces, eſt la hauteur cherchée. 3°. Si de 84 on ôte 28 qui exprime la réſiſtance que l'air extérieur fait au jet, le reſte qui eſt 56 pouces eſt la hauteur à laquelle le jet de vif-argent peut monter par la preſſion d'un air 3 fois plus condenſé que l'air extérieur ; ſi la liqueur jailliſſante étoit de l'eau, le troiſiéme terme de la proportion ſeroit 32 pieds, & la hauteur cherchée ſeroit 96 pieds, & 64 différence de 32 à 96 la hauteur à laquelle l'eau peut monter lorſquelle eſt preſſée par un air 3 fois plus condenſé que l'air libre auprès de la terre. On trouvera de la même maniere la hauteur du jet pour toute autre liqueur dont la peſanteur ſpécifique ſera connue, le degré de condenſation de l'air comprimé étant donné.

DES POMPES.

140. Les pompes ſont de longs tuyaux dans leſquels l'eau monte à une certaine hauteur par la preſſion de l'air extérieur ou de quelque autre cauſe. Dans toutes les pompes il faut diſtinguer trois parties principales, le tuyau, le piſton, & les ſoupapes. Dans le tuyau il y a encore deux parties remarquables, celle où le piſton joue en allant & en venant, on l'appelle *corps de pompe* ou *barillet* ; & l'autre partie qui eſt deſtinée à contenir l'eau ou à la conduire à la hauteur deſtinée.

141. Les pompes ſont de deux ou trois ſortes, *aſpirantes*, *foulantes*, *aſpirantes & foulantes* en même-tems.

La pompe aſpirante eſt celle où l'eau monte par la ſeule preſſion de l'air extérieur. Si le tuyau AB trempe dans l'eau par ſon extrémité inférieure C, qu'on léve le piſton EF depuis le bas juſqu'à la hauteur de 32 pieds, de maniere qu'il ne reſte point d'air dans le tuyau entre l'eau qui y monte & le piſton, elle montera à cette même hauteur de 32 pieds ; car l'air extérieur en preſſant ſur la ſurface de l'eau preſſe auſſi celle qui répond à l'ouverture C, & l'oblige d'entrer dans le tuyau où elle ne trouve aucune réſiſtance, Fig. 16.

& de ſuivre le piſton ; & parce que l'air extérieur peut faire équilibre par ſon poids avec une colomne d'eau de 32 pieds, il s'enſuit que ſi on leve le piſton à cette hauteur, le tuyau ſe remplira ; pour lors il y aura équilibre entre cette colomne d'eau & l'air extérieur : ſi on leve le piſton à une plus grande hauteur, l'eau ne montera pas pour cela plus haut, mais elle ſe tiendra à la hauteur de 32 pieds.

142. Si à l'ouverture C il y a un ſoupape G, & que le piſton EF étant percé d'un trou dans ſa baſe inférieure, il y ait auſſi une ſoupape H, on peut faire ſortir l'eau du tuyau en abbaiſſant le piſton ; car pour lors la ſoupape G que la preſſion de l'air extérieur tenoit ouverte, ſe ferme parce que le piſton preſſe de haut en bas, & la ſoupape H qui étoit fermée parce que l'air la preſſoit par deſſus s'ouvre & laiſſe paſſer l'eau qui eſt preſſée par le piſton, lequel étant percé tranſverſalement, la laiſſe auſſi paſſer dans la partie du tuyau qui eſt au-deſſus du corps du piſton. Si on leve une ſeconde fois le piſton, l'eau entrera auſſi-tôt dans le tuyau, car en l'abbaiſſant on a diminué la hauteur & le poids de la colomne d'eau, laquelle ne peut plus faire équilibre avec l'air extérieur ; ainſi l'eau qui eſt au dehors eſt obligée d'entrer dans le tuyau ; ſi on abbaiſſe de nouveau le piſton, elle ſortira une ſeconde fois par l'ouverture en H. Par ce mouvement non interrompu du piſton, l'eau entrera & ſortira alternativement.

Fig. 17. 143. Dans les pompes foulantes le corps de pompe AB trempe dans l'eau ; lorſqu'on leve le piſton, la ſoupape G s'ouvre parce qu'il n'y a point d'air dans le corps de pompe l'eau qui l'environne preſſe la ſoupape G de bas en haut & l'oblige de s'ouvrir, & elle entre dans le corps de pompe pour ſe mettre de niveau ; lorſqu'on abbaiſſe le piſton, la ſoupape G ſe ferme, & l'eau qui eſt dans le corps de pompe étant preſſée eſt contrainte d'entrer dans le tuyau montant NM & de le remplir ; ſi on leve une ſeconde fois le piſton l'eau entre de nouveau dans le corps de pompe ; & pour empêcher l'eau qui eſt dans le tuyau NM d'y deſcendre, il y a une ſoupape en H qui en ferme l'entrée : elle s'ouvre lorſqu'on abbaiſſe le piſton, & elle ſe ferme lorſqu'on le leve.

Fig. 18. 144. Dans les pompes qui ſont aſpirantes & foulantes, l'eau entre d'abord dans le tuyau AB par aſpiration, c'eſt-à-dire, par la ſeule preſſion de l'air lorſqu'on leve le piſton, & lorſqu'on l'abbaiſſe la ſoupape G ſe ferme & l'eau eſt contrainte de paſſer dans le tuyau montant NM & de le remplir ; & pour l'empêcher de redeſcendre dans le corps de pompe lorſqu'on leve le piſton, il y a une ſoupape en H qui en ferme l'entrée.

CHAPITRE QUATRIEME.

De la percussion ou choc des Fluides.

145. LES fluides en mouvement ſont capables de faire impreſſion ſur les corps qu'ils rencontrent, ils les ébranlent, les entraînent, & les obligent de ſuivre la détermination qu'ils ont dans leur écoulement. Les fluides peuvent choquer & preſſer par leur maſſe ou par leur reſſort, & par cette double action non-ſeulement mouvoir les corps, mais les retarder, & même leur ôter toute la viteſſe qu'ils ont. Dans ce Chapitre on conſiderera 1°. le choc des fluides par leur maſſe. 2°. L'impulſion des fluides par le reſſort. 3°. La réſiſtance qu'ils font aux corps en mouvement.

Du choc des Fluides par leur masse.

146. Si les fluides ſuivoient dans le choc les mêmes loix que les corps fermes, il ne ſeroit pas néceſſaire d'en traiter à part, ce qu'on en a dit dans le troiſiéme Livre ſuffiroit ; mais les fluides n'agiſſent pas dans leur choc tout-à-fait de la même maniere que les corps fermes : un corps ferme frappe, pour ainſi dire, à la fois par toute ſa maſſe, ſes parties étant liées, & les unes ne pouvant avancer ſans les autres, elles font effort toutes en même-tems; il n'en eſt pas ainſi des fluides, par éxemple, un courant d'eau ne peut pas choquer à la fois par tout ſon volume, parce que les parties ne tiennent point les unes aux autres, il eſt vrai qu'elles vont enſemble, & qu'elles s'entreſuivent, mais parce que chacune a ſa viteſſe propre & indépendante de celle des autres, il n'y a que les premieres qui faſſent effort; elles ſe retirent enſuite pour faire place aux ſuivantes; de cette ſorte un fluide ne peut choquer à la fois que par quelques-unes de ſes parties.

147. Il ſuit de-là que la communication du mouvement eſt bien plus lente dans le choc des fluides que dans le choc des ſolides. On peut remarquer cette lenteur dans les machines qui ſont mues par un courant, lorſqu'elles commencent à être miſes en branle.

Il eſt évident qu'un corps qui ſuit le courant d'un fluide ne peut en recevoir plus de viteſſe que le courant n'en a ; & que s'il en a une moindre, il ſera choqué à tous les inſtans, & que ſa viteſſe ſera accélérée juſqu'à ce qu'il aille auſſi vîte que le fluide qui choque. On éxaminera 1°. la force du choc des fluides contre des ſurfaces qui ſont en repos ; 2°. contre des ſurfaces qui ſont en mouvement.

De la force du choc des Fluides contre des surfaces qui ſont en repos.

148. L'impreſſion qu'un même courant peut faire ſur une ſurface varie ſelon que la ſurface eſt plane ou courbe, & ſuivant la courbure. Dans ce Chapitre nous n'examinerons que le choc contre des ſurfaces planes & contre des ſurfaces ſphériques, lorſque nous en ferons à la réſiſtance des fluides.

149. Dans les Propoſitions ſuivantes on ſuppoſera que toutes les parties d'un fluide courant ſont mûes d'une égale viteſſe ; ſi elles avoient des viteſſes différentes, il faudroit en déterminant la force du choc, y avoir égard.

Fig. 19. Si un fluide repréſenté par ABF choque la ſurface DC ſuivant une direction perpendiculaire à cette ſurface, la force du choc eſt la plus grande qu'elle puiſſe être, c'eſt-à-dire, que ſi le courant rencontre la même ſurface ſuivant une direction oblique, la force du choc ſera moindre. Cette Propoſition eſt vraie non-ſeulement lorſqu'il s'agit des corps fermes, mais auſſi à l'égard des fluides ; car ſi on conſidere chaque goutte ou parcelle du fluide comme un petit corps qui choque obliquement une ſurface, il eſt viſible que l'impreſſion qu'il ſera ſera d'autant moindre que ſa direction ſera plus oblique à la ſurface, & qu'au contraire la force du choc ſera d'autant plus grande qu'il choquera plus directement, qu'enfin elle ſera la plus grande qu'elle puiſſe être lorſque la direction ſera perpendiculaire à la ſurface.

Fig. 20. 150. Si un fluide choque obliquement une ſurface, ſa force eſt décompoſée en deux efforts, l'un perpendiculaire à la ſurface, l'autre parallele à la même ſurface. Cette Propoſition eſt auſſi vraie à l'égard des fluides & des corps fermes. Car chaque corpuſcule ne choque pas la ſurface autrement qu'un corps ferme ; or ſi un corps ferme choque une ſurface, ſa force eſt décompoſée en deux efforts, dont l'un eſt perpendiculaire & l'autre parallele à la ſurface (*Liv. III.* 49) ; donc &c.

PROPOSITION X.

Fig. 19. 21. 151. *Si deux courans repréſentez par* ABF, abf *choquent directement deux ſurfaces égales* DC, dc, *ils ſont des impreſſions qui ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes, en ſorte que ſi le courant* ABF *va deux fois plus vîte, il fera ſur la ſurface* DC *un effort quadruple.*

Demonst. On ſuppoſe que les deux courans ſont de même

pesanteur spécifique ; que c'est, par exemple, de l'eau, & que les petits corps ou globules du fluide sont mûs d'une égale vitesse dans un même courant. Cela posé, si l'on conçoit que l'un & l'autre courant est divisé en filets, il y en aura le même nombre dans les deux, puisque les surfaces DC, *dc* sont égales, & que le choc est direct ; & parce que tous les filets d'un même courant sont des impressions égales sur la surface qu'ils choquent, il s'ensuit que les impressions totales sont entr'elles dans la même raison que celles qui sont produites par deux filets. Il suffit donc de considérer deux filets, par exemple, AF, *af*. Or je dis que les impressions que ces filets font en même-tems sont entr'elles comme les quarrez des vîtesses ; en sorte que si la vitesse du filet AF est triple de celle du filet *af*, il fera une impression neuf fois plus grande sur la surface DC ; car les petits corps qui à chaque instant choquent les deux surfaces ayant même masse, leurs forces sont entr'elles comme les vitesses ; donc les impressions qu'ils font sont aussi entr'elles comme les vitesses ; si la vitesse du filet AF est triple de la vitesse du filet *af*, chaque petit corps du filet AF fera une impression trois fois plus grande ; en sorte que si dans le même tems il ne se détachoit pas plus de petits corps du filet AF qu'il ne s'en détache du filet *af*, les impressions que les surfaces DC, *dc* recevroient, seroient entr'elles comme les vitesses ; mais par l'hypotèse le filet AF est mû trois fois plus vîte ; donc en même-tems il s'en détache trois fois plus de corpuscules que du filet *af*. Donc l'impression qui n'auroit été que triple à raison de la vitesse triple, devient encore trois fois plus grande à raison du nombre de globules trois fois plus grands qui choquent en même-tems ; donc l'impression que le filet AF produit sur la surface DC est neuf fois plus grande que l'effort du filet *af* ; donc l'impression totale est aussi neuf fois plus grande ; par conséquent les impressions que les deux courans font sur les surfaces DC, *dc* sont entr'elles comme les quarrez 9 & 1 des vitesses 3 & 1.

152. Corollaires. 1°. Dans la Proposition on a supposé que les surfaces DC, *dc* étoient choquées directement : si le choc étoit oblique, la Proposition seroit encore vraie, pourvû que les directions fussent également inclinées aux surfaces ; car pour lors les vitesses absolues seroient décomposées dans l'un & dans l'autre courant en deux vitesses, dont l'une seroit perpendiculaire & l'autre parallele à la surface : or les vitesses perpendiculaires seroient entr'elles dans la raison des vîtesses absolues, c'est pourquoi on peut conclure que les impressions que les surfaces DC, *dc* suppo-

ſées égales reçoivent dans le choc oblique, ſont entr'elles comme les quarrez de viteſſes abſolues, pourvû que l'obliquité des courans à l'égard des ſurfaces ſoit la même.

153. 2°. *Dans le choc direct ſi les viteſſes ſont égales & que les ſurfaces* DC, dc *ſoient inégales, les impreſſions qu'elles reçoivent ſont dans la raiſon même des ſurfaces.*

Une ſurface double reçoit le choc d'un courant qui a une étendue double, ou qui contient un nombre de filets deux fois plus grand ; donc puiſque la viteſſe eſt la même dans les deux courans, les impreſſions produites ne peuvent différer qu'à raiſon du plus grand ou du moindre nombre de filets ; c'eſt pourquoi elles ſont entr'elles comme les ſurfaces choquées ; car les nombres de filets ſont dans la raiſon des ſurfaces.

154. 3°. *Si le choc eſt direct, ou s'il ſe fait avec la même obliquité, & que les ſurfaces* DC, dc *ſoient inégales, les impreſſions qu'elles reçoivent ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes, & des ſurfaces, ou en raiſon compoſée de ces quarrez & des ſurfaces ;* car ſi les ſurfaces DC, *dc* étoient égales, les impreſſions produites ſeroient entr'elles comme les quarrez des viteſſes, mais ſi la ſurface DC eſt plus grande, qu'elle ſoit, par exemple, double, elle ſupportera le choc d'un courant deux fois plus grand, & qui contiendra un nombre de filets deux fois plus grand, la force du choc ſera donc plus grande à raiſon du quarré de la viteſſe, & à raiſon de la plus grande ſurface : donc, &c.

PROPOSITION XI.

Fig. 20. 155. *Si une même ſurface eſt expoſée au choc d'un courant ſous différens degrez d'obliquité, la force du choc direct eſt la force du choc oblique, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'incidence oblique.*

DEMONSTRATION. ſi les ſurfaces DE, DC égales en tout ſont expoſées au même courant ; que la ſurface DE ſoit choquée directement, & la ſurface DC obliquement ; je dis que la force du choc direct eſt à la force du choc oblique, comme le quarré du ſinus de l'angle droit eſt au quarré du ſinus de l'angle BDC, qui eſt l'incidence oblique. Puiſque tous les filets du courant ſont paralleles entr'eux, le filet ACF ſera parallele à BD ; ainſi l'angle DCF ſera égal à l'angle BDC, c'eſt-à-dire, qu'il eſt égal à l'incidence oblique ; donc ſi on conſidere la largeur DC ou DE comme ſinus total, DF ſera le ſinus de l'angle d'incidence. Or DE & DF meſurent les largeurs, ou plutôt les portions du courant, ou les nombres de filets qui font impreſſion en même-tems ſur les ſurfaces

faces DE, DC, de ſorte que ſi les filets qui rencontrent la ſurface DC la choquoient avec autant de force que ceux qui rencontrent la ſurface DE, les impreſſions ſeroient entr'elles comme les nombres de filets qui choquent les deux ſurfaces, c'eſt-à-dire, comme DE & DF, ou comme le ſinus total eſt au ſinus de l'incidence oblique; mais les filets qui rencontrent directement la ſurface DE font plus d'impreſſion que ceux qui rencontrent obliquement la ſurface DC, & ces impreſſions ſont entr'elles comme le ſinus total eſt au ſinus de l'incidence oblique; donc la force du choc direct qui étoit déja plus grande que la force du choc oblique dans la raiſon du ſinus total au ſinus de l'incidence oblique doit encore augmenter dans la même raiſon; par conſéquent pour avoir la raiſon des preſſions, il faut multiplier la raiſon du ſinus total au ſinus de l'incidence oblique par elle-même; donc la force du choc direct eſt à la force du choc oblique, comme le quarré du ſinus total eſt au quarré du ſinus de l'incidence oblique.

156. COROLLAIRES. 1°. *Si deux ſurfaces égales ſont expoſées à un même courant qui les choque avec différentes obliquités, elles en reçoivent des impreſſions qui ſont entr'elles comme les quarrez des ſinus des angles d'incidence:* car puiſque les ſinus des angles d'incidence meſurent les nombres de filets qui choquent les deux ſurfaces égales, ſi les filets d'une part choquoient avec la même force que les filets de l'autre part, les impreſſions totales ſeroient entre elles comme les ſinus des incidences; mais les filets d'un courant choquent avec plus de force que ceux de l'autre courant dans la raiſon des ſinus des incidences; d'où l'on conclura que les impreſſions cauſées ſont entr'elles comme les quarrez de ces ſinus, ainſi qu'on vient de faire voir dans la Propoſition.

Si l'une des ſurfaces étoit parallele au courant, le ſinus de l'angle d'incidence ſeroit nul; la ſurface ne recevroit donc le choc d'aucun filet du courant, & la force du choc ſeroit nul. En effet, pour lors le fluide courant étant mû parallelement à la ſurface, ne feroit que gliſſer ſans y cauſer aucune impreſſion.

157. 2°. *Si deux ſurfaces inégales ſont expoſées à un même courant qui les choque avec des obliquitez différentes, il y cauſe des impreſſions qui ſont entr'elles comme les produits des quarrez des ſinus des incidences & des ſurfaces choquées.* Ce Corollaire ſe prouve de la même maniere que le troiſiéme Corollaire de la Propoſition précédente. Si les ſurfaces étoient égales, les impreſſions cauſées ſur les ſurfaces ſeroient entr'elles comme les quarrez des ſinus des angles d'inci-

dence; mais parce que les ſurfaces ſont inégales, la preſſion cauſée ſur la grande augmente dans le rapport de la même ſurface à la moindre; donc pour avoir le vrai rapport des preſſions cauſées, il faut multiplier les quarrez des ſinus des angles d'incidence par les ſurfaces; donc &c.

158. 3°. *Si deux ſurfaces inégales ſont expoſées à deux courans qui les choquent avec des obliquitez différentes, les preſſions ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes, des quarrez des ſinus des angles d'incidence, & des ſurfaces.* Si les courans choquoient avec la même obliquité, les impreſſions ſeroient entr'elles comme les quarrez des viteſſes, les ſurfaces étant ſuppoſées égales; une viteſſe double donneroit une preſſion quadruple: mais ſi le courant qui va avec une viteſſe double choque plus directement, les ſurfaces ſuppoſées encore égales, que le ſinus d'incidence ſoit, par éxemple, triple, la ſurface recevra le choc d'un nombre de filets trois fois plus grand: d'ailleurs chaque filet à raiſon de la moindre obliquité choquera avec une force trois fois plus grande, d'où l'on voit que le rapport des preſſions qui étoit exprimé par celui des quarrez des viteſſes, augmentera dans la raiſon des quarrez des ſinus des incidences; ainſi les preſſions ſeroient entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes, & des quarrez des ſinus des incidences, ſuppoſé que les ſurfaces fuſſent égales; mais ſi le courant qui va plus vîte rencontre une ſurface plus grande, elle ſera choquée par un courant d'une plus grande étendue; c'eſt pourquoi la raiſon des preſſions augmentera encore dans la raiſon des ſurfaces. Par conſéquent les preſſions dont il s'agit dans ce Corollaire, ſont entr'elles comme le produit des quarrez des viteſſes, des quarrez des ſinus des incidences, & des ſurfaces choquées.

Si les ſurfaces ſont égales, les preſſions ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes & des quarrez des ſinus des angles d'incidence.

159. 4°. Dans les Corollaires qui précedent on a ſuppoſé que les courans qui choquent deux ſurfaces étoient de même peſanteur ſpécifique ou de même denſité, *Si les peſanteurs étoient différentes, les preſſions ſeroient entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes, des quarrez des ſinus des angles d'incidence, des ſurfaces & des peſanteurs ſpécifiques.* Ainſi le vif-argent étant 14 fois plus peſant que l'eau, doit cauſer une preſſion quatorze fois plus grande, toutes choſes étant ſuppoſées égales, viteſſes, incidences & ſurfaces.

Du choc des fluides contre des surfaces en mouvement.

160. Lorſqu'un même courant choque deux ſurfaces égales avec la même obliquité, il y cauſe des preſſions inégales, ſi l'une des ſurfaces eſt en mouvement, & l'autre en repos; les fluides à cet égard ſuivent des loix ſemblables à celles du choc des corps fermes; c'eſt-à-dire, que comme dans le choc des corps fermes, la preſſion eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective lorſque les maſſes ſont les mêmes, quelles que ſoient d'ailleurs les viteſſes propres; ainſi dans la percuſſion des fluides la force du choc eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe reſpective, lorſque c'eſt la même ſurface qui eſt choquée, & que l'incidence du courant ſur la ſurface eſt auſſi la même, comme nous allons voir.

PROPOSITION XII.

161. *Si une même ſurface ou deux ſurfaces égales ſont mûes dans un même courant, les impreſſions qu'elles en reçoivent ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes reſpectives & des quarrez des ſinus d'incidence.*

Preparation pour la Demonstration.

Soit la ſurface DC mûe dans le courant LM ſuivant la direction DG avec une viteſſe exprimée par DG, & le courant LM avec une viteſſe exprimée par AG. Du point G il faut mener GH parallele à la ſurface DC & des points A, D tirer AE, DH perpendiculaires à GH; du point G mener GF perpendiculaire à DC prolongée en F s'il eſt néceſſaire; & du point A, AB perpendiculaire à GF prolongée en B, s'il eſt néceſſaire. Cela fait, 1°. Puiſque la viteſſe de la ſurface DC eſt exprimée par DG, que d'ailleurs tous les points de cette ſurface ſont mûs parallelement à DG, il eſt viſible que ſi rien ne s'oppoſe au mouvement de cette ſurface, DG ſera la route du point D, de même que AG eſt la route du point ou globule A; & parce que les viteſſes de ces deux points ſont exprimées par DG, AG, ils arriveront en même-tems en G, & GH ſera la ſituation de la ſurface DC, lorſque le point D ſera arrivé en G, puiſque GH eſt parallele à DC. 2°. Lorſque les points A, D ſe rencontreront en G, leurs viteſſes propres ſeront décompoſées ſuivant deux directions, l'une parallele aux plan GH ou DC, & l'autre perpendiculaire au même plan; les viteſſes paralleles ſont exprimées par GH, GE, & les viteſſes perpendiculaires par AE, DH, ou par GB, GF. 3°. Il eſt évident que les Fig. 22, 23, 24, 25, 26, 27.

points D, A ne ſe choquent point par les viteſſes paralleles, car par ces viteſſes ils ne font que gliſſer l'un ſur l'autre; il reſte donc qu'ils ſe choquent par les viteſſes perpendiculaires GB, GF: or ces viteſſes ne ſont pas toujours employées entierement à produire le choc, ce n'eſt que dans le cas où la ſurface DC prévient le globule A, comme dans la fig. 22, que la ſomme des viteſſes GB, GF fait le choc des points A, D; dans les autres cas le choc eſt ſeulement produit par la différence des viteſſes perpendiculaires; ainſi BF qui eſt la ſomme des viteſſes perpendiculaires lorſque les points A, D vont à la rencontre l'un de l'autre, ou la différence des mêmes viteſſes lorſqu'ils vont du même côté & qu'ils fuient l'un devant l'autre, exprime la viteſſe reſpective avec laquelle les points A, D s'approchent.

Demonstrat. Il faut donc démontrer que la force du choc eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe BF multiplié par le quarré du ſinus de l'angle d'incidence AGH. Si la ſurface DC pouvoit décrire librement la ligne DG tandis que le point ou globule A décrit la ligne AG, la force du choc ſeroit proportionnelle à la viteſſe reſpective BF. Cela poſé, quoique la ſurface DC ne parvienne pas en G, cela n'empêche pas que les globules qui la touchent actuellement ne la frappent avec la même force que ſi le choc ſe faiſoit en G, puiſque tous les globules ont la même viteſſe que le globule A, & que leurs directions ſont auſſi paralleles à celle du globule A; donc tous les globules qui rencontrent la ſurface DC font contre elle le même effort que ſi cette ſurface étant en repos ils la choquoient directement avec la viteſſe BF. Suppoſons pour un moment que la ſituation de la ſurface DC à l'égard du courant LM eſt la même pour toutes les figures, la viteſſe reſpective BF étant différente, il eſt certain que l'effort que chaque globule fait contre la ſurface DC, eſt proportionnel à la viteſſe BF; mais il eſt évident que plus la viteſſe reſpective eſt grande, plus il ſe détache de globules d'un même filet, tel que AG; ainſi lorſque la ſurface DC va au-devant des globules, le nombre de ceux qui choquent en même-tems eſt bien plus grand, que lorſqu'elle fuit leur rencontre, & ce nombre eſt encore proportionnel à la viteſſe reſpective BF, d'où l'on voit que la force du choc de chaque globule, laquelle eſt proportionnelle à la viteſſe reſpective, augmente à raiſon du plus grand nombre, lequel eſt auſſi proportionnel à la viteſſe reſpective; donc pour avoir l'effort produit par un filet contre la ſurface DC, il faut multiplier l'effort d'un globule, c'eſt-à-dire, la viteſſe reſpective par le nombre de globules qui choquent, c'eſt-à-dire, par

a viteſſe reſpective ; donc ſi la ſituation de la ſurface DC étoit la même, la force du choc ſeroit proportionnelle au quarré de la viteſſe reſpective ; mais ſi la ſituation de la ſurface DC eſt différente, le ſinus d'incidence ne ſera pas le même ; or le nombre de filets qui choquent la ſurface EC eſt proportionnel au ſinus d'incidence ; donc la force du choc qui étoit proportiennelle au quarré de la viteſſe reſpective, augmentera à raiſon du plus grand nombre de filets, lequel eſt proportionnel au ſinus de l'angle d'incidence ; d'ailleurs plus le ſinus de l'angle d'incidence eſt grand, toutes choſes étant ſuppoſées égales, plus l'effort de chaque filet eſt grand ; donc pour avoir l'effort total du courant contre la ſurface DC, il faudra multiplier l'effort d'un filet, lequel eſt proportionnel au quarré de la viteſſe (en ſuppoſant que la ſituation de la ſurface eſt la même), par le ſinus d'incidence à raiſon du plus grand nombre de filets, & encore ce produit par le même ſinus à raiſon de la moindre obliquité avec laquelle chaque filet frappe la ſurface DC ; par conſéquent la force du choc eſt proportionnel au quarré de la viteſſe reſpective multiplié par le quarré du ſinus de l'angle d'incidence.

162. Corollaires. 1°. *Si les ſurfaces qui ſont expoſées à un même courant étoient inégales, la force du choc ſeroit proportionnelle au produit du quarré de la viteſſe reſpective, du quarré du ſinus de l'angle d'incidence, & de la grandeur de la ſurface. Ce Corollaire eſt évident après tout ce qui précede.*

163. 2°. Il eſt aiſé d'appercevoir que les viteſſes propres ni du courant ni de la ſurface ne déterminent la force du choc, mais la ſeule viteſſe reſpective, eu égard à la ſituation de la ſurface DC & à ſa grandeur ; qu'ainſi il peut ſe faire qu'un même courant choque une même ſurface avec plus ou moins d'effort, quoiqu'elle conſerve une ſituation ſemblable : il peut ſe faire que la force du choc ſoit plus grande que tout l'effort que le courant eſt capable de faire par ſa viteſſe propre, comme lorſque la ſurface DC prévient le courant (fig. 22). Si la ſurface DC fuit le courant, quelque ſituation qu'on lui ſuppoſe, la force du choc ſera néceſſairement moindre que l'impreſſion qu'elle peut recevoir de toute la viteſſe du courant (fig. 23) ; il peut encore arriver que la ſurface DC évite tout choc, comme lorſque ſa viteſſe perpendiculaire GF eſt égale à la viteſſe perpendiculaire BG du courant (fig. 24) ; & ſi la viteſſe GF eſt plus grande que la viteſſe BG, la ſurface DC, (fig. 25) choquera elle-même le courant au lieu d'en être choque.

164. 3°. *Si tous les points qui ſont dans la longueur* DC *de la* Fig. 26. 27.

ſurface ſont mûs ſur la même ligne DC *prolongée, la force du choc ſera la même que ſi la ſurface étoit en repos*; car la viteſſe perpendiculaire de cette ſurface ou des points qui la compoſent, ſera nulle; donc la ſurface n'ira ni au-devant du courant, ni ne le fuira, & elle ſera choquée par tout l'effort de la viteſſe perpendiculaire du courant, de même que ſi elle étoit en repos.

165. 4°. *Si la ſurface tourne autour d'un axe, comme les ailes d'un moulin, la viteſſe reſpective du courant ne ſera pas la même pour toutes les parties de la ſurface*; car comme elles vont plus ou moins vîte ſelon qu'elles ſont plus ou moins éloignées de l'axe qui eſt le centre commun du mouvement, que d'ailleurs la viteſſe abſolue du courant eſt la même dans toutes ſes parties, ainſi qu'on ſuppoſe, il eſt néceſſaire que la viteſſe reſpective du courant ſoit différente à l'égard des différentes parties de la ſurface.

De l'impulsion des fluides par le reſſort.

166. On ne connoît gueres que l'air, la flamme & la vapeur de l'eau bouillante, qui ſoient capables de produire de grands effets par la force du reſſort. La force du reſſort eſt comparable à celle de la peſanteur, elle ne produit pas tout ſon effet en un inſtant, ce n'eſt que par degrez, & dans un certain tems qu'elle parvient à donner aux corps la viteſſe qu'elle peut leur communiquer; c'eſt pour cela que l'on donne une certaine longueur aux canons où l'on condenſe l'air & où l'on allume de la poudre, afin que le reſſort agiſſe plus long-tems ſur le corps qui eſt en mouvement.

167. *Le reſſort de l'air acquiert par la condenſation des degrez de force proportionnels aux poids qui le compriment*; car l'air ſe condenſe dans la proportion des poids; donc la force du poids qui le comprime eſt toute employée à le condenſer; d'ailleurs ſon reſſort n'eſt point affoibli par la compreſſion, puiſqu'auſſi-tôt qu'il eſt libre il reprend ſa premiere extenſion: d'où il ſuit que l'air ne ſoutient les poids qui le compriment, que par la force de ſon reſſort; il faut donc que cette force ſoit proportionnelle aux mêmes poids.

168. *Cette force eſt encore proportionnelle aux degrez de condenſation, puiſque l'air ſe condenſe dans la proportion des poids. Lors donc que le reſſort de l'air ou de la poudre enflammée, &c. ſe débande & qu'il pouſſe un même corps, il lui communique à chaque inſtant des degrez de viteſſes qui ſont proportionnels aux degrez de condenſation*; car la force d'un reſſort qui ſe débande eſt proportionnelle à la quantité de mouvement qu'il produit à meſure qu'il ſe détend: Or dans l'hypothèſe préſente c'eſt le même corps, la

même masse qui reçoit tous les [illegible] de en lui communiquant une vi-
produit ; donc les degrez de force [illegible] mouvement que le fluide reçoit
viteſſe ; mais la force du reſſort [illegible] quadruple, c'eſt-à-dire, qu'elle
condenſation ; donc la viteſſe q[illegible] teſſe, mais la réſiſtance du
pouſſe en avant, eſt proportionn[illegible] le mouvement qu'elle dé-

169. *Les degrez de viteſſe que* [illegible] elle eſt proportionnelle
corps, ſont entr'eux réciproquement [illegible] re que la ſeconde des
les viteſſes que ce reſſort donne à u[illegible] ; conforme aux voies
degrez de condenſation qu'il a r[illegible]
entr'elles réciproquement comme [illegible] ette maniere. La
pace auquel l'air eſt réduit n'eſt [illegible] c'eſt le corps
douziéme, la quinziéme partie de [illegible] e le corps en
état naturel, il aura le double, de qu[illegible] viteſſe reſ-
ſera douze, quinze fois plus grande ; par c[illegible] en repos
viteſſe qu'il communique ſont entr'eux récipr[illegible] roient
eſpaces qu'il occupe. [illegible] pro-

D'où il ſuit que ſi les eſpaces qu'un même air conde[illegible] es
dans un canon ſont connus, on aura auſſi le rapport des v[illegible]
qu'il peut communiquer, lorſqu'en ſe rarefiant il occupe ces di[illegible]
rens eſpaces.

De la réſistance que les fluides font aux corps en mouvement.

170. Les fluides, comme l'air, l'eau, &c. ſont de vrais corps ; lors donc qu'un corps ferme eſt mû dans l'air ou dans l'eau conſiderez en repos, il les choque & communique de ſon mouvement aux parties qu'il rencontre, ſa viteſſe ſe rallentit peu à peu, & il rentre bien-tôt dans le repos ; c'eſt cette perte ou diminution de viteſſe que reçoit un corps qui eſt mû dans un fluide, qu'on appelle *la réſiſtance du fluide*, ou plutôt ce retardement eſt l'effet de la réſiſtance. On a dit dans le ſecond Livre quelque choſe de la réſiſtance de l'air ; mais c'eſt ici le lieu de traiter cette matiere avec un peu plus d'étendue, & d'expoſer dans un plus grand détail ce qui arrive aux corps qui ſont mûs dans un milieu qui réſiſte, tels que l'air, l'eau, &c.

171. 1°. Plus un milieu eſt denſe, plus il réſiſte. Car un corps qui eſt mû avec la même viteſſe dans un milieu plus denſe, rencontre en même-tems un plus grand nombre de parties qui lui ôtent par conſéquent une plus grande portion de ſa viteſſe.

Lorſqu'un corps eſt mû dans un milieu, on peut faire deux hypothèſes ſur la réſiſtance du milieu ; on peut ſuppoſer que cette ré-

ſiſtance eſt proportionnelle à la viteſſe actuelle du corps, ou au quarré de cette viteſſe.

PROPOSITION XIII.

172. *Lorſqu'un corps eſt mû dans un milieu réſiſtant, la réſiſtance qu'il trouve à chaque inſtant eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe actuelle, laquelle eſt égale à la différence de la viteſſe initiale & de la viteſſe perdue.*

On ſuppoſe que la direction du corps fait toujours le même angle avec ſa ſurface.

Demonstration. Pour décider laquelle de ces deux hypothèſes a lieu dans la nature, nous ferons le raiſonnement ſuivant. Suppoſons qu'un corps en frappe un autre avec différens degrez de viteſſe, il eſt certain que le choqué recevra du choquant des viteſſes qui ſeront entr'elles dans la même raiſon que celles avec leſquelles le choquant l'approche. Si la viteſſe du choquant eſt double, triple, quadruple, la viteſſe communiquée au choqué ſera auſſi double, triple, quadruple, &c. car les quantitez de mouvement du choquant ſont entr'elles comme les viteſſes; d'ailleurs pour avoir la viteſſe commune après le choc, c'eſt-à-dire, la viteſſe du choqué, il faut diviſer ces différentes quantitez de mouvement par la ſomme des maſſes; donc les quotiens qui expriment les viteſſes du choqué ſont entr'elles comme les dividendes qui ſont repréſentez par viteſſes du choquant, puiſque c'eſt par le même diviſeur qu'on diviſe ces différentes quantitez; donc les viteſſes qu'un corps communique à un autre ſont entr'elles comme les différentes viteſſes avec leſquelles le choquant l'approche: or lorſqu'un corps ſe meut dans un milieu réſiſtant, c'eſt pour ainſi dire le même corps qu'il rencontre à chaque inſtant, il paroîtroit donc d'abord que ce corps communiqueroit au fluide réſiſtant des viteſſes qui ſeroient entre elles dans la même raiſon que celles avec leſquelles il choque: d'où il ſuivroit que les réſiſtances du milieu, leſquelles dans l'hypothèſe que c'eſt le même corps qui eſt choqué, ſont entr'elles comme les viteſſes que le choquant lui communique, ſeroient auſſi entr'elles dans la raiſon des viteſſes avec leſquelles ce corps eſt mû dans le milieu réſiſtant.

Mais il faut faire attention que lorſqu'un corps eſt mû dans un milieu avec des viteſſes inégales, ce n'eſt pas le même corps ou la même maſſe qu'il choque, cette maſſe change ou eſt différente à raiſon de la viteſſe; ſi le corps eſt mû avec une viteſſe double, il eſt néceſſaire qu'il rencontre un volume double, ou un nombre de parties deux fois plus grand; il met donc en mouvement une portion

tion de fluide deux fois plus grande en lui communiquant une viteſſe double; donc la quantité de mouvement que le fluide reçoit & qu'il ôte au corps qui choque, eſt quadruple, c'eſt-à-dire, qu'elle eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe, mais la réſiſtance du fluide eſt proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle détruit dans le corps qu'elle retarde; donc elle eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe. D'où il faut conclure que la ſeconde des deux hypothèſes que l'on vient de faire eſt plus conforme aux voies de la nature que la premiere.

On peut encore démontrer la Propoſition en cette maniere. La force du choc eſt la même, ſoit que l'on ſuppoſe que c'eſt le corps qui choque le fluide, ou que c'eſt le fluide qui choque le corps en repos, pourvû que dans l'une & l'autre ſuppoſition la viteſſe reſpective ſoit la même. Or ſi le fluide choquoit le corps en repos avec des viteſſes différentes, il feroit des impreſſions qui ſeroient entr'elles comme les quarrez des viteſſes avec leſquelles il s'approcheroit du corps; donc ſi le corps rencontre le fluide avec toutes ces différentes viteſſes, il y fait auſſi des impreſſions qui ſont entre elles comme les quarrez des mêmes viteſſes.

173. COROL. 1°. *Il ſemble qu'une ſurface plane qui eſt mûe dans un fluide dans la rigueur & ſelon les regles de la Mécanique, ne doit jamais perdre toute ſa viteſſe;* car quoique le mouvement du mobile diminue dans la raiſon des quarrez des viteſſes reſtantes, & qu'il ſemble qu'elle doive être enfin entierement détruite; cependant ſelon les loix du choc un corps qui en choque un autre en repos, ne lui communique jamais tout ſon mouvement, quelque grand que le choqué puiſſe être; il faut cependant convenir que cette viteſſe finale eſt ſi petite qu'elle eſt équivalente au repos.

174. 2°. *Si pluſieurs ſpheres égales ſont mûes dans un milieu avec des viteſſes inégales, elles trouvent des réſiſtances qui ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes actuelles;* car la ſurface de la ſphere étant parfaitement uniforme, la direction de la force ne peut être dirigée que d'une maniere à l'égard de cette ſurface, c'eſt pourquoi la différence des réſiſtances ne peut venir que de la différence des viteſſes; donc ſelon la propoſition ces réſiſtances ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes actuelles ou reſtantes. Ce corollaire eſt vrai auſſi à l'égard des autres corps ſemblables & égaux, pourvû que durant le mouvement ils conſervent une ſituation ſemblable à l'égard de la direction.

175. *Si pluſieurs corps de figure ſphérique inégaux ſont mûs dans un fluide avec des viteſſes inégales, ils trouvent des réſiſtances qui*

ſont entr'elles comme les produits des quarrez des diametres & des quarrez des viteſſes reſtantes. Car les ſurfaces des Spheres étant ſemblables, & ſemblablement ſituées à l'égard des directions, ces corps doivent faire ſur le fluide des impreſſions qui ſoient entr'elles dans la raiſon de ces ſurfaces la même, c'eſt-à-dire, dans la raiſon des quarrez des diametres, (en ſuppoſant que les viteſſes des mobiles ſoient égales) puiſque ſi un fluide rencontre en repos des ſurfaces ſemblables, & ſemblablement ſituées, les impreſſions qu'il y fait ſont dans la raiſon des ſurfaces, & que d'ailleurs la force du choc eſt la même, ſoit que la ſurface ſe meuve contre le fluide ou que le fluide aille choquer la ſurface; mais ſi les viteſſes ſont inégales les réſiſtances augmenteront ou diminueront dans la raiſon des quarrez des viteſſes; donc pour avoir le rapport des réſiſtances il faudra multiplier les quarrez des diametre de ſpheres par les quarrez des viteſſes. Donc, &c.

Ce corollaire eſt vrai auſſi à l'égard des corps ſemblables pourvû qu'ils gardent toujours des ſituations ſemblables, c'eſt-à-dire, que leurs directions faſſent les mêmes angles avec leurs ſurfaces.

176. 4°. *Si des ſurfaces planes égales ſont mues dans un milieu, que les directions ſoient obliques aux mêmes ſurfaces, elles trouvent des réſiſtances qui ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes & des quarrez des ſinus d'incidence.* Si les ſurfaces ſont inégales, les réſiſtances ſont entr'elles comme les produits des quarrez des viteſſes, des quarrez des ſinus, des angles d'incidence & des grandeurs des ſurfaces. Cette propoſition ſe prouve de la même maniere que le corollaire precedent.

177. 5°. L'on voit donc que trois choſes concourent de la part d'un mobile à former, ou à augmenter la réſiſtance qu'il éprouve lorſqu'il eſt mû dans un milieu, la viteſſe, la ſurface & la maniere dont il la préſente; ce n'eſt pas préciſément la grandeur de la ſurface qui rend le mouvement plus difficile, car il peut ſe faire qu'une ſurface ſoit mue dans un milieu ſans en recevoir aucune impreſſion, comme lorſqu'elle avance parallelement à la direction du mobile; ainſi ſi un cylindre eſt mu dans un eau tranquille ſuivant une direction perpendiculaire à ſa baſe, tout l'effort de l'eau tombe ſur cette baſe, & les côtez ne ſont aucunement choqués, puiſque l'eau ne fait que couler parallelement à la longueur du cylindre; c'eſt donc le plus ou le moins d'obliquité avec laquelle une ſurface rencontre un milieu qui eſt cauſe de l'inégalité des réſiſtances qu'elle y trouve; *c'eſt cette obliquité qui fait*

qu'un fluide réſiſte moins à la ſurface d'une ſphere ou d'un hémiſphere qu'à un de ſes grands cercles qui eſt mû directement contre le fluide.

Car le cercle & l'hemiſphere choquent en même-tems une égale quantité de fluide, puiſqu'ils ont ſelon l'hypothèſe la même viteſſe, & que d'ailleurs la ſurface convexe de l'hémiſphere ne reçoit pas un plus grand nombre de filets, ou une colomne de fluide de plus grande baſe que celle qui s'appuie ſur le grand cercle, comme il eſt aiſé de ſe le repréſenter; de ſorte que ſi l'hemiſphere choquoit directement toutes les parties du fluide comme le cercle, les réſiſtances ſeroient égales de part & d'autre; mais parce que l'hemiſphere rencontre les parties du fluide ſuivant des directions plus ou moins obliques, il eſt néceſſaire que la force du choc ſoit moindre, & par conſéquent la réſiſtance que l'hémiſphere trouve à être mû.

178. 6°. *On peut demontrer que la réſiſtance de l'hemiſphere n'eſt que la moitié de celle du grand cercle.*

L'hemiſphere étant repréſenté par le demi cercle ADF & le grand cercle par le diametre AF, nous ne conſidérerons d'abord que les réſiſtances que les points correſpondans D, E trouvent dans le fluide ſuivant la direction EDN perpendiculaire à AF. Fig. 28.

Si l'on mene le rayon CD, la tangente DO, & la perpendiculaire NO; nous démontrerons en premier lieu *que les réſiſtances des points D, E ſont entr'elles comme les quarrez de ED & de CD, c'eſt-à-dire, comme* $\overline{ED}^2$ *eſt à* $\overline{CD}^2$. La direction EDN étant oblique à la ſurface repréſentée par la tangente DO, la force du choc direct eſt à la force du choc oblique comme le ſinus total eſt au ſinus de l'angle d'incidence, c'eſt-à-dire, comme DN eſt à NO; & parce que les lignes NO, DC ſont perpendiculaires à la tangente DO les angles DNO, EDC ſont égaux & les triangles rectangles DON, CED ſemblables, & les angles ODN, ECD auſſi égaux: c'eſt pourquoi les forces du choc direct & du choc oblique qui ſont repréſentées par DN, ON ſeront auſſi repréſentées par DC, DE; donc l'impulſion que le point D reçoit de la force du choc eſt dirigée ſuivant DC perpendiculaire à la ſurface DO, & elle eſt exprimée par DE, & la force du choc direct par DC; mais il eſt évident que l'impulſion que le point D reçoit ſuivant DC n'eſt pas directement contraire à la détermination qu'il a ſuivant EDN; ainſi l'effort exprimé par DE & dirigé ſuivant DC ſe décompoſe en deux efforts dont l'un eſt parallele à AF ou perpendiculaire à la direction EDN, lequel ne rétarde ni n'avance le point D; &

l'autre effort eſt dirigé ſuivant DE, & eſt entierement oppoſé à la détermination ſuivant EDN: DC étant la direction de l'effort qui eſt décompoſé, & AF comme le plan d'incidence, la force ſuivant DC ſera à l'effort ſuivant DE comme le ſinus total & le ſinus d'incidence DCE ſont entr'eux, c'eſt-à-dire, comme DC eſt à DE. Si l'on nomme R la réſiſtance du point E ou celle que le point D trouveroit s'il choquoit le fluide directement, κ celle que le point D trouve ſuivant DC, r celle qui eſt directement oppoſée à ſa détermination ſuivant DEN, ſelon ce qui vient d'être dit nous ferons les proportions $r.\ \kappa :: ED.\ CD.$ & $\kappa.\ R :: ED.\ CD.$ ſi on multiplie par ordre & que l'on diviſe les deux premiers produits par κ il en réſultera la proportion $r.\ R :: \overline{DE}^2.\ \overline{CD}^2$. on démontrera de la même maniere que la réſiſtance du point d eſt à celle du point e ou E comme $\overline{ed}^2$ eſt à $\overline{Cd}^2$ ou $\overline{CD}^2$, enſorte que les réſiſtances des points D, d, &c. ſont exprimées par les quarrez des perpendiculaires ED, ed; celles des points E, e l'étant par les quarrez de CD ou de Cd.

$r.\ \kappa :: ED.\ CD.$
$\kappa.\ R :: ED.\ CD.$

$r.\ R :: \overline{ED}^2.\ \overline{CD}^2.$

En ſecond lieu, ſi l'on trouve une troiſiéme proportionnelle à CD, ED telle que BG l'on aura la proportion CD. ED :: ED. BG; donc $\overline{CD}^2.\ \overline{ED}^2 :: CD.\ BG$; par conſéquent les deux derniers termes de cette proportion exprimeront les reſiſtances des points E, D puiſqu'elles ſont proportionnelles aux deux premiers $\overline{CD}^2$, $\overline{ED}^2$; on trouvera par une opération ſemblable que CD ou Cd & bg expriment les réſiſtances des points e, d, d'où l'on voit que par une opération réïterée l'on trouveroit toutes les lignes telles que BG, bg, &c. qui expriment les réſiſtances des points du quart de cercle ADH. Or je dis que la ligne courbe CGP qui termine les lignes BG, bg repréſentatives des réſiſtances des points D, d, &c. eſt une demie parabole dont le ſommet eſt au point C. Car à cauſe de la proportion $\overline{CD}^2.\ \overline{ED}^2 ::$ CD. BG l'on aura $\overline{CD}^2 - \overline{ED}^2.\ \overline{CD}^2 ::$ CD−BG. CD. Sur quoi on remarquera que le quarré $\overline{CD}^2$ étant égal aux quarrez $\overline{ED}^2 + \overline{CE}^2$, ſi on en retranche le quarré $\overline{ED}^2$ le quarré $\overline{CE}^2$ ou $\overline{GM}^2$ ſera égal à $\overline{CD}^2 - \overline{ED}^2$; & puiſque EB eſt égale à CD, CD−BG ſera égale à EG ou à CM; la proportion ſera donc changée en celle-ci $\overline{GM}^2.\ \overline{CD}^2 ::$ CM.

CD. & ſi au lieu de $\overline{CD}^2$ on prend $\overline{PH}^2$ qui lui eſt égal ; & au lieu de CD, CH, l'on aura encore cette proportion $\overline{GM}^2 . \overline{PH}^2 :: CM . CH$, c'eſt-à-dire que les quarrez des ordonnées GM, PH ſont entr'eux comme les coupées CM, CH ; donc la ligne courbe CGP eſt une demie parabole, & par conſéquent la ligne BG s'y termine ; on démontrera la même choſe pour les autres lignes *bg*.

En troiſiéme lieu ſi l'on conçoit que le rectangle ACHP tourne autour de l'axe CH avec le quart de cercle ADH, la demie parabole AGP & les lignes BG, *bg*, &c. qui rempliſſent l'aire CGPH, le rectangle décrira un cylindre qui a pour baſe le grand cercle qui eſt mû dans le fluide, l'eſpace parabolique CGPH décrira unſoli de que l'on nomme paraboloïde ; le quart de cercle tracera la ſurface de l'hémiſphere, les points D, *d* décriront des circonférences ou zones paralleles à AF qui formeront la ſurface de l'hemiſphere ; & puiſque GB exprime la réſiſtance du point D, l'eſpace que GB tracera en tournant autour de CH repréſentera la ſomme des réſiſtances des points qui ſe trouvent ſur la circonférence ou zone décrite par le point D ; de même l'eſpace décrit par *gb* repréſentera la ſomme des réſiſtances des points qui ſont ſur la circonférence décrite par le point *d* ; & comme les eſpaces décrits par les lignes GB, *gb* qui rempliſſent l'aire CGPH compoſent le paraboloïde décrit par la demie parabole, il s'enſuit que ce ſolide, exprime la réſiſtance de l'hémiſphere, & le cylindre décrit par le rectangle ACHP, la réſiſtance du cercle.

En quatriéme lieu il ne reſte donc plus qu'à faire voir que le paraboloïde eſt la moitié du cylindre. Il faut concevoir que ces deux ſolides ſont diviſez en tranches indefiniment minces paralleles à PS ; les tranches circulaires du paraboloïde ſont entr'elles comme les quarrez de leurs rayons ou comme les quarrez des ordonnées de la parabole leſquels ſont entr'eux comme les coupées ; or les coupées augmentent du ſommet juſqu'à la baſe en progreſſion arithmetique ; les tranches circulaires du cylindre ſont toutes égales entr'elles & à la plus grande du paraboloïde, d'où il ſuit manifeſtement que ce ſolide n'eſt que la moitié du cylindre ; car comme il eſt vrai de dire qu'un triangle eſt la moitié d'un rectangle de même baſe & de même hauteur, de cela ſeul que les élémens du triangle augmentent en progreſſion arihmetique du ſommet à la baſe, & que ceux du rectangle ſont tous égaux entr'eux & au plus grand du triangle ; il faut auſſi tirer la même concluſion du paraboloïde par rapport

au cylindre de même baſe & de même hauteur.

Un vaiſſeau qui en navigant ſouffriroit la moindre réſiſtance poſſible auroit certainement un avantage conſidérable ſur un autre qui en éprouveroit un grande; or le dernier Corollaire fait entrevoir qu'une grande ſurface par une conſtruction particuliere peut trouver moins de difficulté à fendre l'eau, qu'une autre qui ſeroit plus petite.

De la resistance des Pendules.

179. Lorſque dans le ſecond livre on a dit que les vibrations grandes & petites d'un pendule étoient iſochrones ou d'égale durée, on a ſuppoſé qu'il étoit mû dans un milieu non réſiſtant; il eſt cependant vrai que l'air réſiſte, le pendule eſt donc rétardé, & il décrit chaque arc en plus de tems que s'il ne trouvoit ſur ſon paſſage aucun obſtacle: on ſe propoſe de déterminer juſqu'à quel point l'Iſochroniſme des vibrations d'un pendule eſt troublé par la réſiſtance du milieu.

PROPOSITION XIV.

180. 1°. *Les vibrations grandes & petites d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde dans un milieu réſiſtant ſont iſochrones ſi les réſiſtances qu'il trouve à chaque inſtant ſont dans la raiſon des viteſſes actuelles.* 2°. *Si ces réſiſtances ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes, les rétardemens cauſez par la réſiſtance du milieu ſont entr'eux comme les arcs décrits.*

Fig. 29. Demonst. de la premiére partie. Il faut concevoir que les arcs AD, BD que le pendule décrit ſont diviſez l'un & l'autre en un même nombre de parties égales. Puiſque le milieu ſelon l'hypothèſe réſiſte à proportion de la viteſſe, il en faut ſuppoſer une au pendule; & parce que les parties ſemblables AG, Bg dans leſquelles on conçoit les arcs AD, BD diviſez, ſont très-petites, on peut ſuppoſer auſſi que le pendule décrit dans chaque arc la premiére ſans être rétardé: or les viteſſes que le pendule acquiert par les parties correſpondantes AG, Bg ſont entr'elles comme les forces qui les produiſent leſquelles ſont entr'elles comme les arcs AD, BD (*Liv.* 11. 204); donc les viteſſes initiales ſont entr'elles comme les arcs AD, BD. Cela poſé les arcs GD, gD ſont dans la raiſon des arcs AD, BD; donc les forces qui accélerent le pendule par les ſecondes parties correſpondantes étant entr'elles comme les arcs GD gD, ſont auſſi entr'elles comme les arcs AD, BD; de plus les réſiſtances que le milieu fait au pendule en G & g ſont comme les viteſſes, c'eſt-à-dire, comme les arcs AD, BD; donc les réſiſtances ſont

entr'elles comme les forces qui accelerent le pendule en G & g ; donc les forces diminuées ſeront entr'elles cõme les forces entieres (9. *Arit.*) ; donc elles produiront des viteſſes qui ſeront entr'elles comme les arcs GD, gD, ou comme les arcs AD, BD ; donc les viteſſes acquiſes par les deux premieres parties correſpondantes des arcs AD, BD ſont dans la raiſon de ces arcs : on prouvera de la même maniere que les viteſſes acquiſes par les trois premieres, les quatre premieres parties correſpondantes, &c. ſont entr'elles comme les arcs AD, BD : les eſpaces parcourus étant entr'eux pendant tout le tems du mouvement dans le rapport des viteſſes il s'enſuit qu'ils ſeront parcourus en tems égaux, par conſéquent, les vibrations du pendule par les arcs doubles de AD & de BD ſeront iſochrones.

Demonstration de la seconde partie. Dans cette ſeconde partie on ſuppoſe que les réſiſtances ſont comme les quarrez des viteſſes : ſi les viteſſes étoient entr'elles comme les arcs AD, BD, les quarrez des viteſſes ſeroient entr'eux comme les quarrez des mêmes arcs ; par conſéquent les réſiſtances ſeroient entre elles comme les quarrez des arcs AD, BD : or quoique dans l'hypotheſe préſente les viteſſes ne ſoient pas dans la raiſon exacte des arcs AD, BD, cela n'empêche pas que les deux raiſons précedentes ne ſoient ſenſiblement égales. Suppoſons que l'arc AD eſt double de l'arc BD, & que la viteſſe acquiſe par une certaine partie de l'arc AD, ſi le milieu ne réſiſtoit point, ſoit exprimée par 100 celle qui ſeroit acquiſe par la partie correſpondante de l'arc DB ſeroit exprimée par 50 ; que la réſiſtance du milieu detruiſe 1 degré de viteſſe lorſque le pendule decrit dans l'arc AD la partie ſuppoſée, elle détruit $\frac{1}{4}$ de degré lorſque le pendule décrit la partie correſpondante dans l'arc BD, ce qui n'empêche pas que les viteſſes reſtantes ne ſoient ſenſiblement comme les arcs AD, BD ; donc les réſiſtances qui ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes, ſont auſſi entr'elles comme les quarrez des arcs AD, BD. Cela poſé, ſi la réſiſtance par l'arc BD étoit à la réſiſtance par l'arc AD comme le produit de l'arc BD par l'arc AD eſt au quarré de l'arc AD, c'eſt-à-dire, comme BD×AD eſt à AD×AD, ces produits ſeroient entr'eux comme BD & AD (8. *Arit.*) ; donc les réſiſtances ſeroient auſſi entr'elles comme ces arcs, de même que les viteſſes ; donc les arcs BD & AD ſeroient décrits en tems égaux, ſelon ce qui vient d'être prouvé dans la premiere partie. Donc lorſqu'il ne s'agit que du retardement ou du plus long-tems, c'eſt la même choſe

de ſuppoſer que le pendule décrit l'arc AD en y trouvant la réſiſtance exprimée par AD×AD, ou qu'il décrive l'arc BD avec la réſiſtance exprimée par AD×BD ; cela étant ainſi les retardemens par l'arc BD produits par les réſiſtances BD×AD & BD×BD étant les effets de ces reſiſtances, ſont entr'eux comme ces produits, c'eſt-à-dire, comme les arcs AD, BD en diviſant les deux produits par BD. Donc le retardement par l'arc AD, c'eſt-à-dire, le tems que le pendule met de plus à décrire l'arc AD dans le milieu reſiſtant que dans le milieu non réſiſtant, eſt au retardement par l'arc BD, comme AD eſt à BD.

181. COROL. 1°. *Si l'on connoît les tems qu'un pendule emploie à décrire deux arcs inégaux dans un milieu réſiſtant, comme l'air, on pourra auſſi connoître le tems par les mêmes arcs ſi le milieu ne réſiſtoit point.*

Soit nommé T le tems par le grand arc AD dans le milieu réſiſtant ; τ le tems par l'arc BD dans le même milieu ; t le tems par l'arc AD ou BD ſi le milieu ne réſiſtoit point ; $\tau - t$ ſera le retardement par le moindre arc BD dans le milieu réſiſtant, & $T - t$ le retardement par le grand arc AD. Donc ſelon la propoſition $AD . BD :: T - t . \tau - t$ & $AD - BD . BD :: T - t - \tau + t . \tau - t$ ou $AD - BD . BD :: T - \tau . \tau - t$: or dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus ; donc le dernier $\tau - t$ qui eſt le retardement par le moindre arc BD ſera auſſi connu : ainſi ſi du tems par le moindre arc on retranche le retardement connu, on aura le tems par le même arc dans le milieu non réſiſtant.

182. 2°. Puiſque les retardemens ſont proportionnels aux arcs AD, BD, il s'enſuit que plus l'arc BD ſera petit, plus le retardement ſera auſſi petit ; donc les vibrations d'un pendule approchent d'autant plus de l'iſochroniſme qu'elles ſont plus petites ; & l'on peut regarder les plus petites dans le milieu qui reſiſte comme étant de même durée que celles qui ſe feroient dans le milieu non-réſiſtant.

183. 3°. Les petits arcs qu'un pendule décrit au bas d'une Cycloïde & auprès du repos ne differant pas des arcs du cercle qui auroit pour rayon la longueur du pendule, il s'enſuit que les petites vibrations du pendule circulaire ſont de même durée à très peu de choſe près que ſi elles ſe faiſoient dans un milieu ſans réſiſtance. *La Propoſition précedente eſt de M. Newton, Liv. 2, des Principes, Propoſition 29.*

DE

De la direction d'un corps qui est mû dans un milieu qui réſiſte.

Lorſqu'un corps eſt mu dans un milieu réſiſtant d'une viteſſe uniforme, il faut une force qui a chaque inſtant ſurmonte la réſiſtance du milieu, autrement le corps perdroit à tout moment de ſa viteſſe, & ſeroit mu d'un mouvement retardé ; donc pour entretenir un corps dans ſa viteſſe uniforme, il eſt néceſſaire qu'une force lui ſoit continuellement appliquée, & cette force doit être égale à la réſiſtance du milieu, car ſi elle étoit moindre la réſiſtance étant ſuperieure, ralentiroit la viteſſe du corps ; & ſi la force prévaloit, le corps en recevroit des nouveaux degrez de viteſſe, & il ſeroit mu d'un mouvement acceleré : ainſi lorſqu'un vaiſſeau ſur mer commence à faire voile, & qu'après un certain tems il a acquis toute ſa viteſſe s'il la conſerve, il faut que le vent tontinue de ſouffler également, s'il ſe renforce, la viteſſe du navire augmente de nouveau, s'il ſe relache, elle diminue : or quelle que ſoit la viteſſe du corps, uniforme ou variable, il n'y a qu'un cas où il ſuit la direction de la force mouvante, c'eſt lorſque cette direction partage la réſiſtance totale, de maniere que les réſiſtances partielles qui ſont des deux côtez de la direction ſont égales, ſi l'un d'elles eſt plus grande que l'autre, il eſt néceſſaire que le corps ſe jette vers le côté où eſt la moindre réſiſtance. C'eſt ce détour qui en termes de marine eſt appellé *derive*.

La ſphere eſt le ſeul corps qui à cauſe de ſa parfaite uniformité n'eſt point ſujet à la derive ; car dans quelque ſens que la force mouvante dirige ſon action, la ſphere preſente toujours la même ſurface au milieu, & le milieu lui réſiſte toujours de la même maniere & avec la même obliquité ; mais il n'en eſt pas ainſi des autres corps. Ce que nous allons dire du mouvement d'un corps de figure rectangulaire pourra donner une idée de la derive ou détour que les corps prennent dans un milieu qui réſiſte.

Suppoſons que le corps rectangulaire ABDE eſt mu dans un milieu reſiſtant, par exemple, dans l'eau la ſurface ABDE étant parallele à celle de l'eau. Si la direction de la force mouvante eſt ſuivant CM ou CN perpendiculaires aux côtez AB, AE, & que le point C par où paſſe la direction CM ou CN ſoit le centre de gravité du corps, il eſt viſible que l'eau ne réſiſtera qu'au côté AE ou au côté AB, & que la réſiſtance de l'eau ſur l'un ou l'autre côté étant également partagée par la direction CM ou CN, le corps ne ſe détournera ni a droite ni à gauche de cette direction, le centre C ſuivra donc la direction CM ou CN : mais ſi la direction de la force eſt ſuivant CG oblique aux deux côtez AB, AE, Fig. 30.

il pourra ſe faire que la réſiſtance qui eſt d'un côté de cette direction ſoit plus grande que celle qui eſt de l'autre côté, pour lors le centre C ne ſera pas mu ſuivant CG, mais ſuivant une direction CL ſituée entre CG & CM s'il y a plus de facilité de ce côté de CG que de l'autre côté.

Lorſque le corps eſt mu d'une vitéſſe uniforme le centre C ſuit la ligne droite, car le mouvement en ligne courbe eſt inégal, lorſque la force mouvante pouſſe le corps conſtamment ſuivant la même direction comme on ſuppoſe ici. Puiſque c'eſt la force dirigée ſuivant CG qui ſurmonte la réſiſtance de l'eau ou du milieu, il faut que la direction de cette réſiſtance ſoit contraire & diametralement oppoſée à celle de la force mouvante: or l'eau réſiſte aux côtez AE & AB, ces deux réſiſtances ſe compoſent donc en une qui eſt dirigée ſuivant CO tandis que la force qui la ſurmonte eſt dirigée ſuivant CG prolongement de CO; de plus on ſçait qu'un corps ne preſſe un plan que ſuivant la perpendiculaire à ce plan; c'eſt pourquoi ſi on conçoit que toutes les réſiſtances du côté AE ſont réunies au point M, & que toutes les réſiſtances partielles du côté AB ſont réunies au point N, l'eau réagira ſur les côtez AE, AB ſuivant les perpendiculaires MCI, NCK; & puiſque ces réſiſtances ſe compoſent en une ſeule qui eſt dirigée ſuivant CO, il s'enſuit que les réſiſtances ſuivant NK, MI ſont exprimées par les côtez CK, CI du rectangle IK.

Fig. 30. *La direction* CG *de la force mouvante étant connue, ou l'angle* GCM, *on peut trouver la direction* CL *du mobile.* Car puiſque le corps eſt mû ſuivant CL, les angles LCM, LCN ſont les angles d'incidence ſur les ſurfaces BA, EA ou leurs paralleles CM, CN: or l'angle CLM eſt égal à l'angle LCN; donc ſi on prend CL pour ſinus total, LM & CM ſeront les ſinus des angles d'incidence LCM, LCN. Cela poſé, les réſiſtances CK, CI que les ſurfaces AB, AE trouvent dans l'eau, ſont entr'elles comme les quarrez $\overline{LM}^2$, $\overline{CM}^2$ multipliez par ces ſurfaces, c'eſt-à-dire, par 2AN ou 2CM, & par 2AM (157) l'on aura donc CK . CI :: $\overline{LM}^2 \times 2CM . \overline{CM}^2 \times 2AM$ ou CK . CI :: $\overline{LM}^2 . CM \times AM$ en diviſant les deux derniers termes par 2CM: & parce que les côtez CK & CI ou OK ſont proportionnels aux côtés GM, CM, on aura la proportion GM . CM :: $\overline{LM}^2 . CM \times AM$. Donc $GM \times CM \times AM = CM \times \overline{LM}^2$ ou $GM \times AM = \overline{LM}^2$ en diviſant par CM. Donc AM . LM :: LM . GM, c'eſt à-dire, que pour avoir le point L de la direction CL ſur EALG, il faut trouver une troiſiéme proportionnelle entre AM & MG. *Cette Propoſition eſt tirée de la manœuvre des vaiſſeaux de M. Bernoulli.*

Fin du ſixiéme Livre le 1 aouſt 1741.

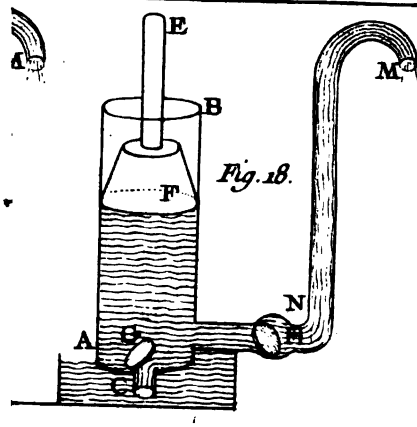


Fig. 18.

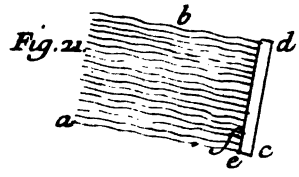


Fig. 21.

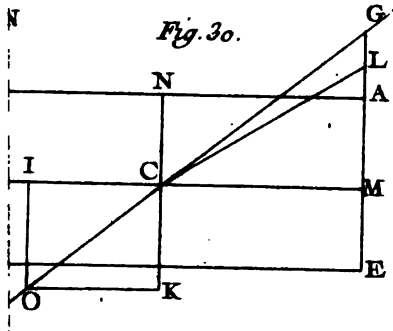


Fig. 30.

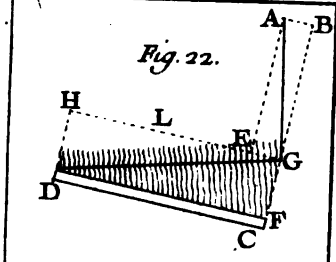


Fig. 22.

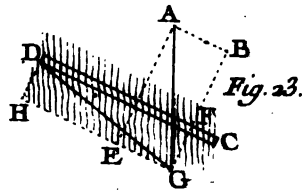


Fig. 23.

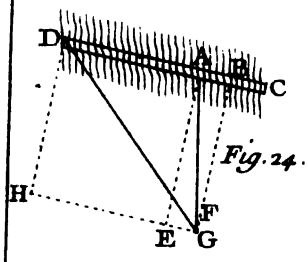


Fig. 24.

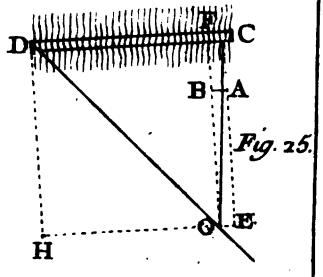


Fig. 25.

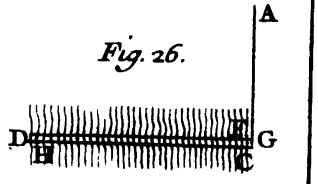


Fig. 26.

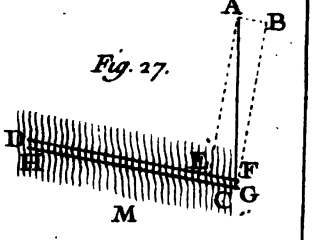


Fig. 27.

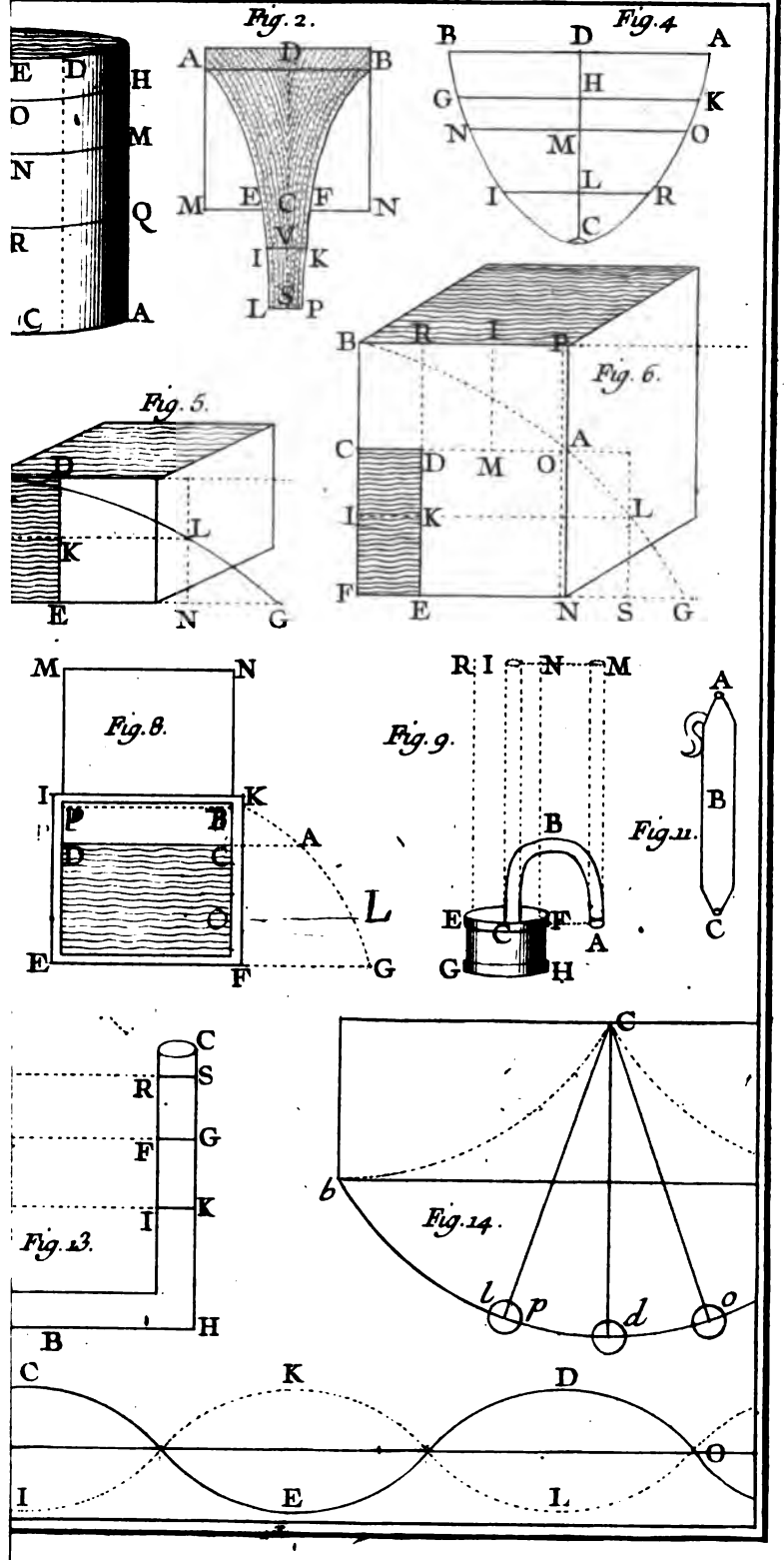


Fig. 2.
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 11.
Fig. 13.
Fig. 14.

LIVRE CINQUIEME.

DE L'HYDROSTATIQUE.

L'On nomme Hydrostatique la Science qui meſure & détermine les preſſions que les fluides peſans éxercent les uns ſur les autres, & contre les corps ſolides dans le cas de l'équilibre. On peut auſſi rapporter à l'Hydroſtatique la preſſion que les fluides élaſtiques cauſent par leur reſſort. On diviſe ce Livre en trois Chapitres : dans le premier, on explique l'Equilibre des liqueurs entr'elles : dans le ſecond, l'Equilibre des liquides avec les ſolides : dans le troiſiéme, l'Equilibre des fluides élaſtiques (1).

CHAPITRE PREMIER.

De l'Equilibre des Liqueurs par leur pesanteur.

ON éxamine une propriété ſinguliere commune à tous les fluides, qui eſt de ſe comprimer également en tous ſens. L'on tâche de déduire cette propriété d'un phénomene qui ſe manifeſte dans toutes les liqueurs ; & l'on conſidere l'égalité de preſſions en tous ſens ; 1°. En ſuppoſant que les fluides ſont ſans peſanteur. 2°. Dans les fluides peſans ; & l'on fait voir que les parties d'une même liqueur qui eſt abandonnée à elle-même ſont en équilibre, & que ſa ſurface eſt de niveau (2, 3, 4, 5, &c. *juſqu'à* 23).

De la pression qu'une liqueur produit sur le fond & sur les parois du vaisseau qui la contient.

La preſſion qu'une liqueur éxerce ſur le fond ou ſur les parois du vaiſſeau qui la contient, peut être plus ou moins grande que n'eſt ſon poids abſolu. Si le fond eſt horizontal, cette preſſion eſt proportionnelle au produit de la baſe ou fond horizontal du vaiſſeau, & de la hauteur perpendiculaire qu'il y a depuis la ſurface juſqu'à ce fond, quelle que ſoit d'ailleurs la figure du vaiſſeau ; ainſi cette preſſion eſt égale au poids d'une colomne de la liqueur qui auroit pour baſe le fond horizontal, & pour hauteur celle dont on vient de parler ; ſoit que la liqueur contenue ſoit en plus grande ou en moindre quantité que n'eſt la colomne (23, 24, *juſqu'à* 33). Si le fond n'eſt pas horizontal, il faut le réduire en des élémens paralleles entr'eux & à l'horizon ; de même que les parois du vaiſſeau après avoir tracé ſur un plan horizontal ſon dévelopement : or chaque élément peut être conſidéré comme un fond horizontal, & l'on peut trouver la charge ou preſſion qu'il ſupporte : de cette maniere on forme des ſolides de la liqueur, leſquels repréſentent les charges ou preſſions des fonds qui ne ſont point horiſontaux, & des parois des vaiſſeaux : or ces ſolides, & par conſéquent les charges qu'ils repréſentent peuvent être évaluées par les regles de la Géométrie (33, 34, *juſqu'à* 47).

De l'equilibre des liqueurs dans les vaisseaux qui communiquent.

Cet équilibre eſt tout fondé ſur la propriété que les liqueurs ont de ſe mettre de niveau. Si un vaiſſeau a deux branches inégalement larges, & qui communiquent, la liqueur s'y met de niveau, & la liqueur qui eſt contenue dans la moindre branche fait équilibre avec celle qui eſt contenue dans la grande ; l'expérience montre cependant que lorſque l'un des tuyaux eſt capillaire, la liqueur ſe tient au-deſſus du niveau de celle qui eſt contenue dans la grande branche, ſi c'eſt de l'eau : mais ſi c'eſt

du vif-argent, le contraire arrive. On examine d'où peut procéder cette exception à la regle (47, 48, *juſqu'à* 52). Si les liqueurs ſont de différentes peſanteurs ſpécifiques, elles ſont en équilibre lorſque les hauteurs qu'elles occupent dans les deux branches au-deſſus du niveau ſont réciproquement proportionnelles aux peſanteurs ſpécifiques (52 *juſqu'à* 56).

De l'Equilibre des Liqueurs dans des Vaiſſeaux ſouples, & qui changent facilement de figure.

L'équilibre ne ſe fait pas autrement dans ces vaiſſeaux que dans les vaiſſeaux ordinaires. Cet équilibre peut avoir quelque rapport à l'action des muſcles lorſqu'ils ſont équilibre avec les poids qu'ils ſoutiennent (56 *juſqu'à* 74).

De la Peſanteur de l'Air.

On rapporte les expériences les plus célebres qui ont été faites ſur la peſanteur de l'air (74 *juſqu'à* 91).

Des Effets de la Peſanteur de l'Air.

Ces effets ſont tirez du Traité de la Peſanteur de l'Air de M. Paſcal (91 *juſqu'à* 101).

Des Variations ou Changemens qui arrivent à la peſanteur de l'Air, & du Barometre.

On rapporte au long le ſentiment de M. Daniel Bernoulli ſur la maniere dont l'air peſe ſur les corps terreſtres & ſur la cauſe des variations de cette peſanteur (101 *juſqu'à* 112).

CHAPITRE SECOND.

De l'Equilibre des Liquides avec les Solides.

Les liqueurs peuvent faire équilibre par leur peſanteur avec les corps fermes. Lorſqu'un corps ferme eſt plus peſant qu'un pareil volume de la liqueur ſur laquelle on la met, il deſcend au fond : s'il eſt de même peſanteur ſpécifique, il s'enfonce entierement, & demeure dans l'endroit où l'on le met : S'il eſt plus leger, il ſurnage & ne s'enfonce qu'en partie ; & dans tous ces cas la perte que le ſolide fait de ſa peſanteur eſt égale au poids du volume de liqueur qu'il déplace : d'où l'on déduit des regles pour déterminer les peſanteurs ſpécifiques des liqueurs, & des ſolides : on peut s'aſſurer ſi les métaux ſont altérez, & en quelle quantité. On propoſe pour cet effet le Problême fort connu de la couronne d'Hyeron : on peut auſſi déterminer la charge d'un vaiſſeau, &c. (112 *juſqu'à* 147).

CHAPITRE III.

De l'Equilibre et de la Preſſion des Fluides par le reſſort.

L'Air à une grande force de reſſort, il peut faire équilibre par cette force avec de très grands poids, le reſſort de l'air peut être affoibli par le froid, & la chaleur peut le fortifier. La rarefaction diminue la force du reſſort de l'air, & la condenſation l'augmente, ſi cet air conſerve le même degré de chaleur (147 *juſqu'à* 157). Deux airs également échauffez ſe condenſent dans la proportion des poids (157 *juſqu'à* 163).

De la Compreſſion de l'Atmoſphere.

On expoſe la regle que M. Mariotte donne pour déterminer la hauteur de l'Atmoſphere, & l'on fait voir qu'elle ne s'accorde pas avec les expériences (163 *juſqu'à* 170).

De la condenſation et de la dilatation de l'air dans les vaiſſeaux.

On peut condenſer l'air dans un vaiſſeau en réduiſant celui qu'il contient à occuper un moindre eſpace, ou bien en introduiſant du nouvel air dans le vaiſſeau par le moyen d'une ſeringue. On peut le dilater dans telle proportion que l'on veut par le moyen de la machine Pneumatique, & en faiſant l'expérience de Toricelli (170 *juſqu'à* 182). On détermine le rapport des poids qui preſſent dans deux vaiſſeaux deux airs inégalement échauffez par des ouvertures inégales (182, 183, 184). On détermine auſſi par la même méthode le rapport des poids que la poudre enflammée & inégalement condenſée dans deux vaiſſeaux peut ſoutenir par la force de ſon reſſort (185, 186, 187).

LIVRE SIXIE'ME.

DE L'HYDRAULIQUE.

DANS l'Hydraulique on conſidere le mouvement des fluides, & ſur-tout le mouvement des eaux. Lorſqu'une liqueur n'eſt pas ſoutenue de tous côtez, elle coule ou jaillit par l'action de la peſanteur, ou par l'action d'une cauſe étrangere, & dans leur écoulement elles ſont impreſſion ſur les corps qu'elles rencontrent. Ce Livre eſt diviſé en quatre Chapitres. Dans le premier on examine l'écoulement des liqueurs lorſqu'elles ſortent de leurs réſervoirs par des ouvertures horizontales. Dans le ſecond, leur écoulement par des ouvertures verticales. Dans le troiſiéme, leur mouvement en tant qu'il eſt l'effet d'une cauſe étrangere. Dans le quatriéme, le choc ou la percuſſion des fluides (1).

CHAPITRE PREMIER.

De l'écoulement des liqueurs par des ouvertures horizontales.

DE quel endroit du réſervoir la liqueur vient lorſqu'elle ſort par une ouverture pratiquée au bas de ce réſervoir (2, 3, 4, 5, 6).

Du rapport des viteſſes d'une liqueur lorſqu'elle ſort de deux réſervoirs qui ont des hauteurs inégales, au moment de leur ſortie.

Ces viteſſes ſont entr'elles comme les racines quarrées des hauteurs ou perpendiculaires abbaiſſées de la ſurface juſqu'à l'ouverture (7 *juſqu'à* 19).

De la viteſſe réelle avec laquelle une liqueur ſort d'un réſervoir par une ouverture horizontale, & de celle avec laquelle elle continue d'être mûe après qu'elle eſt ſortie.

Cette viteſſe eſt égale à celle qu'une goutte de la liqueur acquerroit en tombant depuis le niveau de la liqueur juſqu'à l'ouverture (19 *juſqu'à* 41).

De l'écoulement d'une liqueur lorſque les vaiſſeaux ou réſervoirs qui la contiennent ſe vuident entierement.

L'on donne auſſi une idée des Clepſidres (41 *juſqu'à* 53).

CHAPITRE SECOND.

De l'écoulement d'une liqueur lorsque les orifices des réservoirs ſont verticaux.

Lorqu'une liqueur coule d'une réſervoir par une ouverture verticale, les lames horiſontales qui ſortent en même-tems par cette ouverture ont des viteſſes inégales. Or parmi ces viteſſes il y en a une que l'on peut appeller moyenne, laquelle étant multipliée par l'ouverture, donne la quantité de liqueur qui s'écoule (53 *juſqu'à* 73).

Du mouvement d'une liqueur qui court dans un Canal.

Si le canal eſt horizontal, l'eau y coule avec la même viteſſe que lorſqu'elle ſort d'un réſervoir par une ouverture verticale. Si le canal eſt incliné, l'eau y coule comme ſur un plan incliné, & elle acquiert ſucceſſivement ſa viteſſe ; celle qui eſt près du fond du canal a plus de viteſſe que celle qui coule proche de la ſurface, & celle-ci ne preſſe aucunement par ſon poids celle qui eſt au-deſſous : maniere dont on peut s'y prendre pour meſurer la quantité d'eau qui coule dans un canal incliné (73, *juſqu'à* 90).

De la mesure des eaux (90, 91).

CHAPITRE III.

Du mouvement d'une liqueur en tant qu'il a pour principe l'action d'une cauſe étrangere (92, 93).

De la viteſſe d'une liqueur qui ſort d'un Siphon.

Si les jambes du ſiphon ſont égales, & qu'elles n'excedent pas 32 pieds, l'eau y demeure ſuſpendue ſans s'écouler ; ſi les jambes ſont égales & qu'elles excedent 32 pieds, la liqueur coule de l'une & de l'autre branche juſqu'à ce que la hauteur qu'elle y occupe ſoit de 32 pieds, enſuite elle s'arrête. Si les jambes ſont inégales, l'eau ſort par la plus longue des deux branches, & la viteſſe qu'elle a à ſa ſortie eſt égale à celle qu'elle acquerroit ſi elle tomboit d'une hauteur égale à la différence des deux jambes, pourvû que la longue branche n'excéde pas 32 pieds (94 *juſqu'à* 107).

De la viteſſe avec laquelle l'eau coule dans les Siphons.

Si l'eau remplit éxactement le ſiphon, la viteſſe avec laquelle elle coule dans toute la longueur eſt égale à celle avec laquelle elle ſort, mais ſi elle ne remplit pas éxactement la capacité du tuyau, elle a différentes viteſſes dans la longueur du ſiphon (108 *juſqu'à* 119).

Des balancemens qui arrivent a une liqueur dans un Siphon.

Ces balancemens imitent les vibrations d'un pendule à cycloïde, & ils ſont reglez ſuivant la même loi, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont iſochrones, & ſe font en tems égaux (119 *juſqu'à* 129).

Des ondes qui ſe forment a la surface de l'eau.

Elles reſſemblent aux balancemens d'une liqueur dans un ſiphon, & l'on détermine leur viteſſe ou l'eſpace qu'elles parcourent (129 *juſqu'à* 137).

DE L'ÉCOULEMENT D'UNE LIQUEUR PAR LA CONDENSATION de l'air (137, 138, 139).

DES POMPES.

Elles ſont aſpirantes, foulantes, & tout enſemble foulantes & aſpirantes (140, 141, 142, 143, 144).

CHAPITRE IV.

DE LA PERCUSSION OU CHOC DES FLUIDES (145).

DU CHOC DES FLUIDES PAR LEUR MASSE.

1°. Contre des ſurfaces en repos. 2°. Contre des ſurfaces en mouvement (146 *juſqu'à* 166).

DE L'IMPULSION DES FLUIDES PAR LE RESSORT. (166, 167, 168, 169).

DE LA RÉSISTANCE QUE LES FLUIDES FONT AUX CORPS en mouvement.

La réſiſtance d'un fluide eſt proportionnelle au quarré de la viteſſe du mobile, ſuppoſé que la direction ſoit toujours ſemblablement ſituée à l'égard de la ſurface qui choque. Il n'eſt pas néceſſaire de faire cette exception pour la ſphere, à cauſe de la parfaite uniformité de ſa ſurface. Si des ſpheres égales ſont mûes dans un milieu avec des viteſſes inégales, elles trouvent des réſiſtances qui ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes actuelles. Si elles ſont inégales, les réſiſtances ſont entr'elles comme les quarrez des diametres multipliez par les quarrez des viteſſes. Si des ſurfaces planes égales ſont mûes en ſuivant des directions obliques, elles trouvent des réſiſtances qui ſont entr'elles comme les quarrez des viteſſes & des ſinus des angles d'incidence (174, 175, 176). La réſiſtance qu'une ſphere trouve dans un milieu qui lui réſiſte n'eſt que la moitié de celle que le milieu fait à un grand cercle de cette ſphere lorſqu'il eſt mû directement contre le milieu réſiſtant (178).

DE LA RESISTANCE DES PENDULES.

Les vibrations grandes & petites d'un pendule qui décrit des arcs de cycloïde dans un milieu réſiſtant ſont iſochrones, ſi les réſiſtances qu'il trouve à chaque inſtant ſont dans la raiſon des viteſſes actuelles: & ſi ces réſiſtances ſont entr'elles comme les quarrez de viteſſes, les retardemens cauſez par la réſiſtance du milieu ſont entr'eux comme les arcs décrits (179, 180).

DE LA DIRECTION D'UN CORPS QUI EST MÛ DANS UN milieu qui réſiſte; & de la Derive (181, 182, 183).

Fin de la Table.

De l'Imprimerie de PHILIPPE-NICOLAS LOTTIN, rue S. Jacques, à la Vérité. 1741.

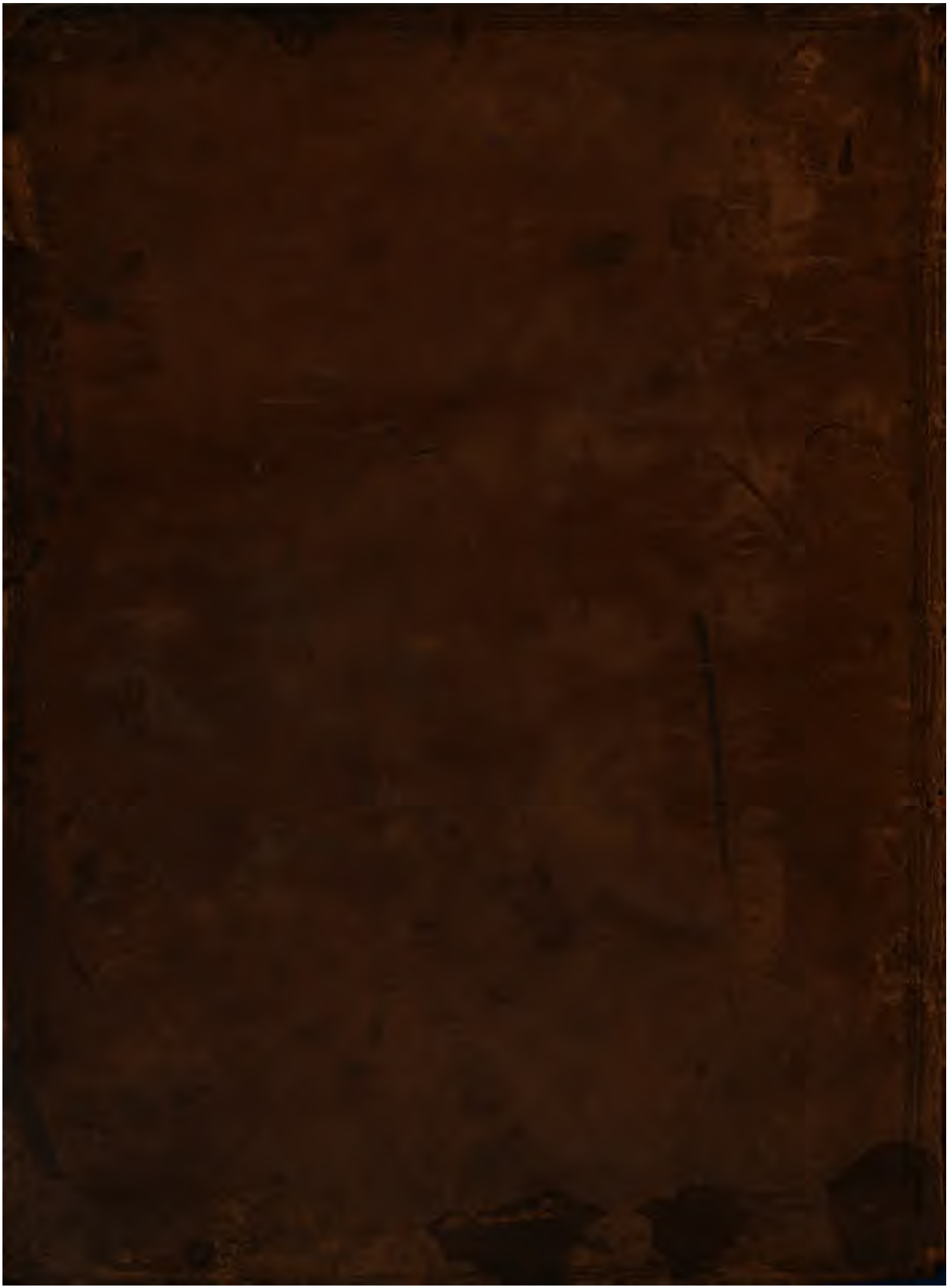
APPROBATION.

J'Ai lû par orde de Monſeigneur le Chancelier un Manuſcrit intitulé : *Principes ſur le Mouvement & l'Equilibre pour ſervir d'introduction aux Mécaniques & à la Phyſique* ; dans lequel je n'ai rien trouvé qui en puiſſe empêcher l'impreſſion. Fait à Paris ce 30 Juin 1740. BREMOND.

PRIVILEGE DU ROY.

LOUIS par la Grace de Dieu, Roi de France & de Navarre : A nos amés & feaux Conſeillers les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prevôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Notre bien-amé le Sieur TRABAUD, Nous ayant fait remontrer qu'il ſouhaiteroit faire imprimer & donner au Public un Ouvrage qui a pour titre : *Principes ſur le Mouvement & l'Equilibre pour ſervir d'introduction aux Mécaniques & à la Phyſique par ledit Sieur Trabaud*, s'il nous plaiſoit lui accorder nos Lettres de privilege ſur ce néceſſaires, offrant pour cet effet de le faire imprimer en bon papier & beaux caracteres ſuivant la feuille imprimée & attachée pour modele ſous le contreſcel des préſentes. A ces cauſes, voulant favorablement traiter ledit Expoſant, Nous lui avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer ledit Ouvrage ci-deſſus ſpécifié, en un ou pluſieurs volumes, conjointement ou ſéparement, & autant de fois que bon lui ſemblera, & de le faire vendre & debiter par tout notre Royaume pendant le tems de neuf années conſécutives, à compter du jour de la date deſdites Préſentes. Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere, dans aucun lieu de notre obéiſſance. Comme auſſi à tous Libraires, Imprimeurs & autres, d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre ledit Ouvrage ci-deſſus expoſé en tout ni en partie, ni d'en faire aucuns extraits ſous quelque prétexte que ce ſoit, d'augmentation, correction, changement de titre ou autrement, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit dudit Expoſant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiſcation des éxemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit ſieur Expoſant, & de tous dépens, dommages & intérêts, à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles, que l'impreſſion de cet Ouvrage ſera faite dans notre Royaume & non ailleurs, & que l'impétrant ſe conformera en tout aux Reglemens de la Librairie; & nottamment à celui du dix Avril 1725, & qu'avant que de l'expoſer en vente, le Manuſcrit ou imprimé qui aura ſervi de copie à l'impreſſion dudit Ouvrage, ſera remis dans le même état ou l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur DAGUESSEAU Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres : le tout à peine de nullité des Préſentes, du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit ſieur Expoſant ou ſes ayans-cauſes, pleinement & paiſiblement ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement; Voulons que la copie deſdites Préſentes qui ſera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, ſoit tenu pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amez & féaux Conſeillers & Secretaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original; Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous Actes requis & neceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires; CAR tel eſt notre plaiſir. DONNÉ à Compiegne le douziéme jour d'Août l'an de grace 1740, & de notre Regne le vingt-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil.

Signé, SAINSON.

Regiſtré ſur le Regiſtre dixiéme de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, No. 401. Fol. 389. conformément au Reglement du 1723, qui fait défenſe Art. IV. à toutes perſonnes de quelque qualité & condition qu'elles ſoient autres que les Libraires & Imprimeurs, de vendre, faire vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre en leurs noms, ſoit qu'ils s'en diſent les auteurs ou autrement, & à la charge de fournir à ladite Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, les huit Exemplaires preſcrits par l'Art. CVIII. du même Reglement. A Paris le 15 Septembre 1740.

Signé SAUGRAIN, *Syndic.*